I 2557

ACADEMIA REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

46. 1987

STUDII ŞI CERCETARI DE MECANICĂ APLICATĂ

1987-03-26

1

TOMUL 46

Ianuarie — Februarie
1987

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CONSILIUL DE CONDUCERE

Acad. IOAN ANTON, *redactor şef*

Membri:

Acad. ŞTEFAN BĂLAN
Acad. CAIUS IACOB
Acad. DAN MATEESCU
Acad. RADU VOINEA
Prof. CONSTANTIN AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
Prof. GHEORGHE BUZDUGAN, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
Dr. ing. NICOLAE PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
Prof. RADU C. BOGDAN
Dr. ing. ION CRIŞAN
Prof. TRAIAN DEMIAN
Prof. DUMITRU MANGERON
Dr. ing. DAN PANTAZOPOL
Prof. DAN PAVELESCU
Prof. CRISTIAN PELECUDI
Prof. RADU PRIŞCU
Dr. ing. MIRCEA RADEŞ
Prof. GHEORGHE SILAŞ
Dr. ing. CONSTANTIN TEODORESCU
Dr. doc. VIOREL VISARION

Prof. TEODOR OROVEANU, *secretar de redacţie*

COLEGIUL DE REDACŢIE

Acad. IOAN ANTON, *redactor şef*

Membri:

Acad. DAN MATEESCU
Dr. ing. ION CRIŞAN
Prof. TRAIAN DEMIAN
Dr. ing. DAN PANTAZOPOL
Dr. ing. CONSTANTIN TEODORESCU

Prof. TEODOR OROVEANU, *secretar de redacţie*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei R. S. România se vor adresa: ROMPRESFILATELIA — sectorul export-import presă, P. O. Box 12—201, telex 10376 prsfir, Calea Griviţei nr. 64—66, 78104 Bucureşti, România; în ţară, abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă se trimit pe adresa Comitetului de redacţie al revistei, 79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei nr. 125.

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 46, nr. 1 — ianuarie—februarie 1987

SUMAR

STUDII

H. DUMITRESCU şi ŞT. N. SĂVULESCU, Consideraţii asupra formulării matematice a efectului Coandă în fluid real. Aplicaţii 3

I. ŢEPOSU, Sarcinile aerodinamice pe organele avionului în cazul manevrelor longitudinale neliniare cu variaţii mici de altitudine şi viteză. II 14

D. NICODIM, Evaluarea debitului de scăpări prin rosturile de execuţie a ecranelor 30

I. JELEV, Calculul regimului tranzitoriu al apei în conducte şi reţele de conducte sub presiune. I 38

G. ONU, Echivalent cu constringeri pentru coloana activă ca element al structurilor cu fundaţii flexibile 66

D. CONSTANTINESCU, Contribuţii la utilizarea carburilor metalice sinterizate în foraj. II 81

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

P. ROMAN, O nouă teorie a turbulenţei în cadrul sistemelor dinamice disipative . . . 94

1989

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
F
1557
FOLYÓIRAT OSZTÁLY

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
1848
KÖZPONTI KÖNYVTÁRA

CONSIDERAȚII ASUPRA FORMULĂRII MATEMATICE A EFECTULUI COANDĂ ÎN FLUID REAL. APLICAȚII

de H. DUMITRESCU și ȘT. N. SĂVULESCU

INCREST, București

Autorii prezintă o metodă de tratare a efectului Coandă pe baza ecuațiilor de mișcare ale fluidului real, cu condiții la limită specifice curgerii în vecinătatea unui perete curb. Ca aplicații ale metodei se arată în continuare modul de extindere la cazul tridimensional, axial-simetric, pentru efectul Coandă exterior și interior.

1. INTRODUCERE

Tratarea clasică matematică a efectului Coandă a fost în general efectuată prin considerarea fluidului ideal și prin introducerea unor ipoteze fizice suplimentare care să țină seama de influențele vîscozității manifestate prin fenomenele de desprindere, de antrenare a aerului ambiant și de aderare la pereții solizi [1]. Deși aproximația fluidului ideal plus ipotezele suplimentare semiempirice conduc la rezultate satisfăcătoare în ceea ce privește descripția efectului Coandă, totuși explicația producerii lui, a naturii acestui fenomen, rămîne nesatisfăcător clarificată.

În lucrarea de față se expune în linii mari o metodă de a ataca problema acestui efect numai pe baza ecuațiilor fundamentale de mișcare ale fluidului real, cu condițiile la limită specifice configurației de curgere în vecinătatea unui perete curb. Punctul de plecare îl constituie ecuațiile Navier-Stokes în aproximația stratului limită, scrise în coordonate curbi-

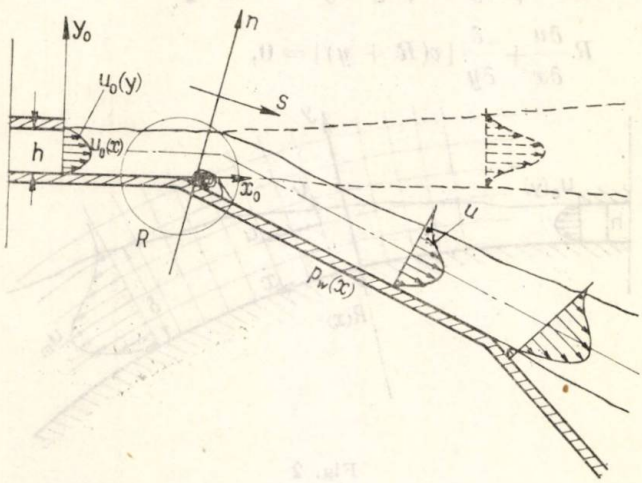


Fig. 1

linii. În esență, peretele curb introduce anumiți termeni care acționează ca un gradient de presiune pentru jetul subțire ce aderă la perete în sensul conservării unui profil de viteze fără punct de desprindere. Un exemplu ilustrativ este arătat în figura. 1.

Pentru obținerea soluțiilor se utilizează, pe de o parte, o transformare integrală de coordonate și, pe de altă parte, o nouă expresie a frecării turbulente, introduse de autori în lucrările lor anterioare [2], [3].

Condițiile de mai sus se extind și asupra cazului cînd jetul de fluid și fluidul ambiant sînt deosebite, scriindu-se ecuația de difuzie turbulentă.

Aplicațiile metodei se referă la extinderea tridimensională axial simetrică, atît pentru efectul Coandă exterior, cît și pentru efectul Coandă interior

2. ECUAȚIILE FUNDAMENTALE ALE CAZULUI PLAN, INCOMPRESIBIL

Să considerăm figura 2, conform căreia apar :

— rețeaua de coordonate (x, y) paralele și respectiv normale pe peretele curb ;

— componentele vitezei $u \cdot v$ și presiunea p ;

— peretele curb dat prin $R(x)$;

— profilul de viteze inițial al jetului $u(y)\,|_{x=0} = u_0(y)$;

— fluidul înconjurător în repaus.

În aceste condiții ecuațiile de mișcare se scriu :

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{R}{R+y}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right],$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right], \qquad (2.1)$$

$$R\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}[v(R+y)] = 0,$$

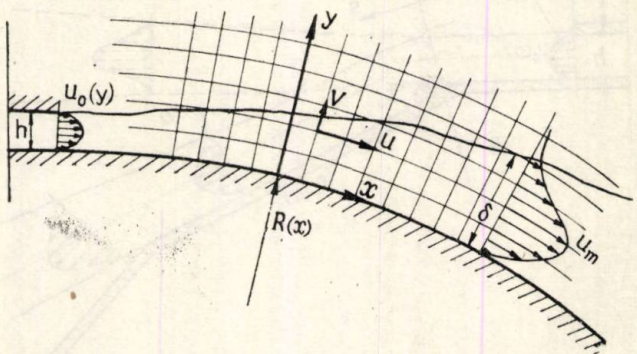


Fig. 2

unde [4]

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{R}{R+y}u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{uv}{R+y},$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{R}{R+y}u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{u^2}{R+y},$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right)_{laminar} = \nu\left[\frac{R^2}{(R+y)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{R+y}\frac{\partial u}{\partial y}-\right.$$

$$\left.-\frac{u}{(R+y)^2}+\frac{2R}{(R+y)^2}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{R}{(R+y)^3}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\left(v-y\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right], \qquad (2.2)$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right)_{laminar} = \nu\left[\frac{R^2}{(R+y)^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1}{R+y}\frac{\partial v}{\partial y}-\right.$$

$$\left.-\frac{v}{(R+y)^2}-\frac{2R}{(R+y)^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{R}{(R+y)^3}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\left(u+y\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right].$$

Pentru τ vom utiliza expresia generalizată a frecării turbulente [3], care pentru τ_{xy} se scrie :

$$\tau_{xy} = \mu\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right]-\rho\widetilde{u'v'} \simeq \mu[1+k(\eta_0-\eta_2)]\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad (2.3)$$

$$\eta_0 = \frac{y}{\delta}, \quad \eta_2 = \frac{\int_0^y u^2\mathrm{d}y}{\int_0^\delta u^2\mathrm{d}y},$$

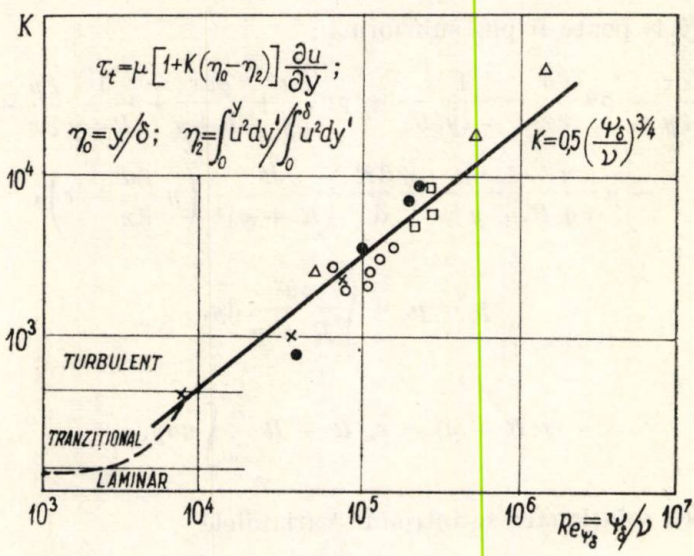


Fig. 3

unde $K = K(\psi_\delta/\nu)$, relație verificată în numeroase cazuri, după cum se vede în figura 3.

Reținînd termenii cei mai importanți și considerînd curgerea staționară turbulentă, avem pentru valori medii ecuațiile [5]:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+\left(1+\frac{y}{R}\right)v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{uv}{R}+\frac{1}{\rho}\frac{1}{R}\frac{\partial p}{\partial x}=$$

$$=\nu\left[\left(1+\frac{y}{R}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\frac{1}{(R+y)^2}\left(y\frac{\partial u}{\partial x}-v\right)\right]-\widetilde{u'v'}\left(1+\frac{y}{R}\right),$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{\rho u^2}{R+y},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[v(R+y)\right]+R\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{2.4}$$

cu condițiile la limită

$$\begin{aligned}
&y=0: && u=0, && v=v_w(x),\\
&y=y_M(x): && u=U_M(x), && \frac{\partial u}{\partial y}=0,\\
&y=\delta(x): && u=U_e(x)\simeq 0, && \frac{\partial u}{\partial y}\simeq 0,\\
&x=0: && u=u_0(y).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Sistemul (2.4) poate fi pus sub forma:

$$\frac{\partial \tau}{\partial y}=\rho u\frac{\partial u}{\partial x}\frac{1}{1+(y/R)}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\rho uv}{R+y}+\frac{1}{R+y}\frac{\partial p}{\partial x}-$$

$$-\mu\frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{R+y}-\mu\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\frac{R}{(R+y)^2}\left(y\frac{\partial u}{\partial x}-v\right), \tag{2.6}$$

$$p=p_e+\int_{\delta}^{y}\frac{\rho u^2}{R+y}\,\mathrm{d}y,$$

$$v(R+y)=v_w R-R\frac{\partial}{\partial x}\int_0^y u\,\mathrm{d}y.$$

Pentru soluționare se introduc variabilele

$$\xi=x,\ \eta=\int_0^y u\,\mathrm{d}y'\Big/\int_0^{\delta}u\,\mathrm{d}y'=\psi/\psi_{\delta}. \tag{2.7}$$

conform cărora avem

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta},\qquad \frac{\partial}{\partial y}=\frac{u}{\psi_\delta}\frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\mathrm{d}y=\frac{\psi_\delta}{u}\mathrm{d}\eta,\qquad y=\psi_\delta\int_0^\eta\frac{\mathrm{d}\eta'}{u}, \tag{2.8}$$

$$\eta_0-\eta_2=\int_0^\eta\frac{\mathrm{d}\eta'}{u}\Big/\int_0^1\frac{\mathrm{d}\eta'}{u}-\int_0^\eta u\mathrm{d}\eta'\Big/\int_0^1 u\mathrm{d}\eta'.$$

Sistemul (2.6) se scrie :

$$\frac{\partial\tau}{\partial\eta}=\Sigma f_i,\ f_p=\frac{\psi_\delta}{u}\frac{1}{R+y}\frac{\partial p}{\partial x},\ f_{uv}=\frac{\psi_\delta\rho v}{R+y'},\ \text{etc.,} \tag{5}$$

$$p=p_e(x)+\rho\psi_\delta\int_1^\eta\frac{u\mathrm{d}\eta'}{R+\psi_\delta\int_0^{\eta'}\frac{\mathrm{d}\eta''}{u}},$$

$$p_w-p_e=-\rho\psi_\delta\int_0^1\frac{u\mathrm{d}\eta'}{R+\psi_\delta\int_0^{\eta'}u^{-1}\mathrm{d}\eta''}, \tag{2.9}$$

$$v=v_w\frac{R}{R+y}-\frac{R}{R+y}\frac{\partial}{\partial x}(\eta\psi_\delta).$$

Integrîndu-se odată se obține :

$$\tau=\mu\frac{u}{\psi_\delta}\left[1+K\left(\frac{\int_0^\eta u^{-1}\mathrm{d}\eta'}{\int_0^1 u^{-1}\mathrm{d}\eta'}-\frac{\int_0^\eta u\mathrm{d}\eta'}{\int_0^1 u\mathrm{d}\eta'}\right)\right]\frac{\partial u}{\partial\eta}=\Sigma\int_1^\eta f_i\,\mathrm{d}\eta',$$

$$\tau_w=\Sigma\int_1^0 f_i\,\mathrm{d}\eta=\mu\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=\frac{\mu}{2\psi_\delta}\left|\frac{\partial(u^2)}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}, \tag{2.10}$$

$$\tau\big|_{\eta=\eta_M}=0=\frac{\mu}{2\psi_\delta}\left[1+K\left(\frac{\int_0^{\eta_M}u^{-1}\mathrm{d}\eta}{\int_0^1 u^{-1}\mathrm{d}\eta}-\frac{\int_0^{\eta_M}u\mathrm{d}\eta}{\int_0^1 u\mathrm{d}\eta}\right)\right]\left|\frac{\partial(u^2)}{\partial\eta}\right|_{\eta=\eta_M}=\Sigma\int_1^{\eta_M}f_i\,\mathrm{d}\eta.$$

Integrîndu-se a doua oară se obţine :

$$u^2 = \frac{2\psi_\delta}{\mu} \frac{\Sigma \int_0^\eta \left[\int_1^{\eta'} f_i \, d\eta'' \right] d\eta'}{1 + K \left[\frac{\int_0^\eta u^{-1} \, d\eta'}{\int_0^1 u^{-1} \, d\eta'} - \frac{\int_0^\eta u d\eta'}{\int_0^1 u d\eta'} \right]} + K \frac{\int_0^\eta \left[\frac{u}{\int_0^1 u^{-1} d\eta} - \frac{u^3}{\int_0^1 u d\eta} \right] d\eta'}{1 + K \left[\frac{\int_0^\eta u^{-1} d\eta'}{\int_0^1 u^{-1} d\eta'} - \frac{\int_0^\eta u d\eta'}{\int_0^1 u d\eta'} \right]},$$

$$U_e^2 = \frac{2\psi_\delta}{\mu} \Sigma \int_0^1 \left[\int_1^\eta f_i \, d\eta' \right] d\eta + K \int_0^1 \left[\frac{u}{\int_0^1 u^{-1} d\eta} - \frac{u^3}{\int_0^1 u d\eta} \right] d\eta = 0. \tag{2.11}$$

Primele concluzii calitative ale studiului sînt :

a) termenii $\frac{uv}{R+y}$, $\frac{\mu \frac{\partial u}{\partial y}}{R+y}$ acţionează cu un gradient de presiune longitudinal care întîrzie desprinderea ;

b) aproximaţiile modelului sînt valabile pentru $h/\delta \sim 1$;

c) diferenţa de presiuni între perete şi exterior $(p_e - p_w) > 0$ şi depinde de profilul de viteze şi de raza de curbură $R(x)$;

d) ecuaţia razei de curbură se deduce din condiţia de desprindere pentru optimizare, $\tau_w \neq 0$, $x \gg x_0$;

e) se poate defini un coeficient de antrenare

$$k_a = \frac{\psi_\delta}{\psi_{\delta_0}}, \quad \psi_\delta = \int_0^\delta u dy, \quad \psi_{\delta_0} = \int_0^h u_0 \, dy ;$$

f) variaţiia grosimii stratului de fluid, care aderă la perete şi care este influenţat de vîscozitate, $\delta(x)$, depinde de x, de $R(x)$ şi de $u_0(y)$.

3. EXTINDERILE LA CAZUL AXIAL SIMETRIC

Pentru cazul axial simetric să considerăm schema din figura 4. Ecuaţiile de mişcare se scriu :

$$\frac{\partial \tau}{y} = \rho u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{1 + (y/R)} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\rho uv}{R(1 + (y/R))} + \frac{1}{R(1 + (y/R))} \frac{\partial p}{\partial x} -$$

$$-\frac{\mu\dfrac{\partial u}{\partial y}}{R(1+(y/R))}-\mu\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\frac{R}{(R+y)^3}\left(y\frac{\partial u}{\partial x}-v\right),$$

$$p=p_e+\int_{\delta}^{y}\frac{\rho u^2}{R+y}\,\mathrm{d}y',$$

$$vr\left(1+\frac{y}{R}\right)=v_w r-\frac{\partial}{\partial x}\int_0^y ur\,\mathrm{d}y',\quad r(X)=r(X(x))\cdot \tag{3.1}$$

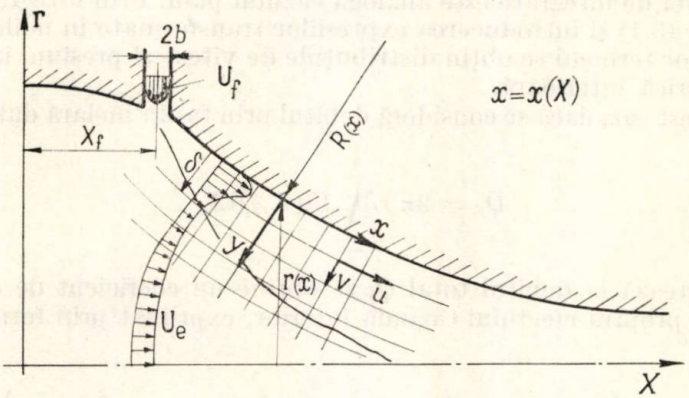


Fig. 4

Pentru curgerea interioară, acestor ecuații li se adaugă condiția conservării debitului pentru $X > X_f$,

$$Q=2\pi\int_0^{\cdot}\left(r-\frac{y}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}X}\right)^2}}\right)u\,dy+\pi\left(r-\frac{\delta}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}X}\right)^2}}\right)^2 U_e \tag{3.2}$$

și, de asemenea, condiția respectării ecuației lui Bernoulli în nucleul central

$$p_0+\frac{\rho}{2}U_0^2=p_e(X)+\frac{\rho}{2}U_e^2(X). \tag{3.3}$$

În fond, problema se reduce la curgerea de intrare axial-simetrică, în prezența unor jeturi periferice, dirijate în sensul curgerii. Această problemă a fost deja tratată în cazul plan, într-o lucrare anterioară, pentru curgere laminară [6].

În cazul de față, vom utiliza noua expresie a frecării turbulente, verificată și pentru curgerea axial-simetrică prin conducte, avînd deci un caracter foarte general. Vom pune:

$$\tau_t=\mu[1+K(\eta_0-\eta_2)]\frac{\partial u}{\partial y},\quad \eta_0=y/\delta,\quad \eta_2=\int_0^y u^2\mathrm{d}y'\Big/\int_0^{\delta}u^2\,\mathrm{d}y',$$

şi vom introduce noile variabile

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{\int_0^y u\,dy'}{\int_0^\delta u\,dy'} = \frac{\psi}{\psi_\delta},$$

conform cărora sistemul de ecuaţii (3.1) devine asemănător sistemului (2.9) cu anumiţi termeni suplimentari.

Metoda de integrare este analogă cazului plan. Prin integrarea dublă a ecuaţiilor (3.1) şi introducerea expresiilor transformate în noile variabile ale diverşilor termeni se obţin distribuţiile de viteze şi presiuni în curgerea axial-simetrică interioară.

În acest caz, dacă se consideră debitul prin fanta inelară dat de relaţia

$$Q_f = 2\pi r_f \int_{-b}^{b} U_f(X_f)\,dX_f \tag{3.4}$$

şi se raportează la debitul total Q, se obţine un coeficient de ejecţie (de antrenare) propriu efectului Coandă interior, exprimat prin formula generală

$$k_a = \frac{Q}{Q_f} = \frac{2\psi_\delta \int_0^1 \left(r - \frac{y}{\sqrt{1+(dR/dx)^2}}\right) d\eta + \left(r - \frac{\delta}{\sqrt{1+(dR/dx)^2}}\right)^2 U_e}{2r_f \int_{-b}^{b} U_f(X_f)\,dX_f}. \tag{3.5}$$

Este, deci posibil să se determine expresia acestui coeficient în funcţie de următorii parametri :

— profilul de viteze din fantă $U_f(X_f)$;

— raza la care este situată fanta (r_f) şi lăţimea ei $2b$;

— raza de curbură a profilului curbei meridian $R(x)$.

De asemenea, o mărime interesantă care apare în acest caz este lungimea de umplere, adică distanţa din conductă — începînd de la fantă — pînă la care cele două straturi limită de pe pereţi, modificate prin prezenţa jeturilor periferice, se întîlnesc astfel că nucleul central potenţial dispare.

4. CAZUL AMESTECULUI A DOUĂ FLUIDE DIFERITE

O problemă specială, care apare la considerarea efectului Coandă interior, o constituie evoluţia amestecului celor două fluide care intervin : fluidul primar, introdus prin fantă şi cel antrenat din mediul ambiant. În fond, se pune chestiunea de a şti, la o anumită distanţă de fantă, proporţia

de amstec a celor două fluide. Vom trata această problemă ca pe o problemă de difuzie turbulentă în curgerea de intrare. În figura 5 este prezentată schematic această situație.

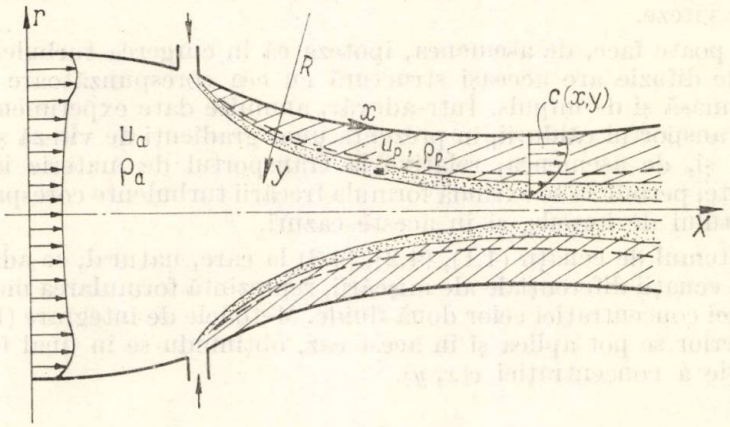


Fig. 5

Dacă afectăm cu indicii p caracteristicile fluidului primar și cu indicele a — caracteristicile fluidului antrenat, vom pune, de exemplu ρ_p — densitatea fluidului primar, ρ_a — densitatea fluidului antrenat.

Definim acum o densitate a amestecului prin expresia :

$$\rho = c\rho_p + (1 - c)\,\rho_a. \tag{4.1}$$

Mărimea adimensională c, care joacă rolul unei concentrații, verifică o ecuație de difuzie transversală, de tipul următor :

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial Q_c}{\partial y}, \tag{4.2}$$

unde

$$Q_c = D[1 + K_c(\tau_{0c} - \tau_{2c})]\frac{\partial c}{\partial y}, \quad \tau_{0c} = \frac{y}{\delta_c}, \quad \tau_{2c} = \frac{\int_0^y u_p^2\,dy'}{\int_0^{\delta_c} u_p^2\,dy'},$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + u_p\frac{\partial c}{\partial x}\frac{1}{1 + (y/R)} + v_p\frac{\partial c}{\partial y}. \tag{4.3}$$

Condițiile la limită care se pun pentru această mărime sînt :

$$\begin{aligned} y = 0 : &\qquad c = 1, \\ y = \delta_c : &\qquad c = 0,\ \frac{dc}{dy} \simeq 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Condițiile de mai sus exprimă faptul că peretele este complet în contact cu fluidul primar, care, la o oarecare depărtare, se amestecă cu cel antrenat, încît la frontiera $y = \delta_c$ găsim numai fluid antrenat. Se poate lua, într-o primă aproximație, $\delta_c = \delta$, adică grosimea dedusă din distribuția de viteze.

Se poate face, de asemenea, ipoteza că în curgerea turbulentă coeficientul de difuzie are aceeași structură cu cea corespunzătoare transportului de masă și de impuls. Într-adevăr, anumite date experimentale relative la transportul căldurii, în prezența unor gradienți de viteză și de temperatură și, de asemenea, relative la transportul de materie în jeturile turbulente, permit să se extindă formula frecării turbulente corespunzătoare transportului de impuls, și în aceste cazuri.

Sistemul de ecuații (4.1), (4.2), (4.3) la care, natural, se adaugă sistemul de ecuații diferențiale ale mișcării, reprezintă formularea matematică a evoluției concentrației celor două fluide. Metodele de integrare (FID) arătate anterior se pot aplica și în acest caz, obținîndu-se în final funcția de distribuție a concentrației $c(x, y)$.

5. CONCLUZII

Considerațiile expuse într-un mod foarte general în această lucrare permit, totuși, desprinderea următoarelor concluzii :

a) expresia frecării turbulente, verificată experimental în numeroase cazuri, precum și generalizările propuse, permit integrarea sistemului de ecuații ce reprezintă mișcarea turbulentă reală, în diverse configurații de curgeri ;

b) efectul Coandă poate fi astfel tratat teoretic pornind de la ecuațiile fundamentale ale curgerii turbulente și caracteristicile lui pot fi deduse din soluțiile acestor ecuații ;

c) metodele aproximative propuse de autori se referă la aproximația de tip strat limită a ecuațiilor, la utilizarea unor transformări integrale de coordonate, ca și la transformarea sistemului de ecuații diferențiale într-un sistem de ecuații integro-diferențiale, care prezintă anumite avantaje de rezolvare numerică ;

d) explicația fizică a efectului Coandă, deși calitativă, rezultă clar din formularea matematică propusă, în sensul creării unei diferențe de presiune între cele două frontiere ale unui jet ce este silit să evolueze *asimetric* în prezența pereților înconjurători. Termenii ce apar în ecuațiile de mișcare a fluidului real — și care sînt datorați curburii peretelui — acționează ca un gradient de presiune longitudinal ce deplasează desprinderea conform teoriei clasice a stratului limită ;

e) În sfîrșit, subliniem că pentru o tratare matematică completă, și riguroasă a acestui fenomen, atît de important în aplicații, este necesar un program de studii teoretice, extinse ca volum, în special în privința integrărilor numerice. Scopul acestor studii se referă la obinerea unor soluții cantitative, al dependenței lor în mod diferențial, de diverși parametri, al exprimării, acestor dependențe prin formule simplificate de calcul și

proiectare, ca și la optimizarea corelațiilor funcționale ale fenomenului aplicat.

Autorii speră că liniile acestui program au fost într-o oarecare măsură schițate în lucrarea de față.

Primit la redacție la 14 iunie 1986

BIBLIOGRAFIE

1. C. TEODORESCU, *Sur l'ecoulement des jets plans dans le voisinage des parois solides au profil divergent. L'effet Coanda*, Reev. Roum., Sci. Tech. Méc. Appl., **10**, 3 (1965).
2. ȘT. N. SĂVULESCU, *Tranziția de la curgerea laminară la cea turbulentă*, Ed. Academiei, București, 1968.
3. ȘT. N. SĂVULESCU — H. DUMITRESCU, *Theoretical Considerations on the Friction în Shear Flow Turbulence*, Rev. Roum. Sci. techn. — Méc. Appl. **15**, 5 (1970).
4. H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*, McGraw Hill Book Co. Inc., N.Y., 1960.
5. H. DUMITRESCU, ȘT. N. SĂVULESCU, *On the effects of surface curvature on the turbulent boundarg layer*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., **18**, 4 (1973).
6. H. DUMITRESCU, ȘT. N. SĂVULESCU, *L'écoulement laminaire à l'entrée dans un canal en présence des jets longitudinaux prés des parois*, Rev. Roum. Sci. Techn. Méc. Appl., **14**, 6 (1969).

SARCINILE AERODINAMICE PE ORGANELE AVIONULUI ÎN CAZUL MANEVRELOR LONGITUDINALE NELINIARE CU VARIAȚII MICI DE ALTITUDINE ȘI VITEZĂ. II *)

de I. ȚEPOSU

Institutul de Aviație, INCREST, București

5. SARCINILE DE MANEVRĂ PE ORGANELE AVIONULUI

Prin rezolvarea sistemului de ecuații integrale (4.15) se obține răspunsul avionului la comenzile profundorului, flapsului, sau frînei aerodinamice. Dacă α_0 și q_0 sînt valorile inițiale, la plecarea în manevră, ale incidenței, respectiv vitezei de tangaj, valorile la un moment oarecare $t \in [t_0, T]$ ale acestor parametri sînt

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \Delta\alpha(t),$$
$$q(t) = q_0 + \Delta q(t). \tag{5.1}$$

De îndată ce toți parametrii de răspuns sînt determinați, pot fi calculate sarcinile de manevră pe toate organele componente ale avionului.

5.1. PORTANȚA COMBINAȚIILOR ARIPĂ-FUZELAJ ȘI STABILIZATOR-PROFUNDOR

Dacă $C_{L\alpha}^{AO}$ este panta curbei de portanță a ampenajului orizontal, cu profundorul în poziția neutră, portanța combinației stabilizator-profundor se determină din relația

$$L^{AO} = \zeta_\rho \frac{V^2}{2} S_{AO} C_{L\alpha}^{AO} \left[(1 - \varepsilon_\alpha)\ \alpha + \chi_{AO} + \frac{d_{AO}}{V} (q + \dot{\alpha}\, \varepsilon_\alpha) + \left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\delta}\right)_e \delta_e \right], \tag{5.2}$$

S_{AO} fiind suprafața de referință la care este raportată panta $C_{L\alpha}^{AO}$. Formula (5.2) este foarte utilizată în literatura de specialitate (vezi [5]), însă din punct de vedere practic are unele dezavantaje. Cel mai important este legat de faptul că în multe situații există incertitudini în ceea ce privește cunoașterea derivatei ε_α. Prin modul cum intervine ε_α în (5.2), gradul de incertitudine asupra acestei mărimi se transmite direct asupra lui L^{AO}. Din acest motiv, diverși autori au propus alte relații pentru calculul lui L^{AO} (vezi, de exemplu, [3]), în care să nu intervină direct derivata ε_α. În continuare vom deduce o astfel de expresie, compatibilă cu dezvoltările din prezenta lucrare.

Notăm cu L^A portanța combinației aripă-fuzelaj-flaps, $L^A = L^{AF} + L^f$ și cu L^{AO} portanța ampenajului orizontal, $L^{AO} = L^t + L^e$. De asemenea, vom introduce notațiile

$$\Delta x^f = x^f - x^A;\ \Delta z^f = z^f - z^A,$$
$$\Delta x^e = x^e - x^{AO};\ \Delta z^e = z^e - z^{AO}. \tag{5.3}$$

*) Partea întîi a apărut în Studii și cercetări de mecanică aplicată, tomul 45, nr. 5 (1986).

Cu aceste notații, prin intermediul expresiilor (3.4) și (3.5) putem scrie relațiile,

$$\begin{aligned} &L^A \cos\alpha + L^{AO} \cos\alpha'_{AO} = X_1, \\ &L^A(x^A \cos\alpha + z^A \sin\alpha) + L^{AO}(x^{AO} \cos\alpha'_{AO} + z^{AO} \sin\alpha'_{AO}) = X_2 \end{aligned} \tag{5.4}$$

unde

$$X_1 = m[g\cos\vartheta + (q - \dot{\alpha}) V \cos\alpha - \dot{V}\sin\alpha] - D^A \sin\alpha - D^{AO} \sin\alpha'_{AO} - \sum_{i=1}^{n} T_i \sin\alpha_i^T, \tag{5.5}$$

$$X_2 = I_y \dot{q} - M_{y*}^{AF} + D^A(z^A \cos\alpha - x^A \sin\alpha) + D^{AO}(z^{AO}\cos\alpha'_{AO} - x^{AO}\sin\alpha'_{AO}) + D^f(\Delta z^f \cos\alpha - \Delta x^f \sin\alpha) + D^e(\Delta z^e - \cos\alpha'_{AO} - \Delta x^e \sin\alpha'_{AO}) - L^f(\Delta z^f \sin\alpha + \Delta x^f \cos\alpha) - L^e(\Delta z^e \sin\alpha'_{AO} + \Delta x^e \cos\alpha'_{AO}) - \sum_{i=1}^{n} T_i(z_i^T \cos\alpha_i^T + x_i^T \sin\alpha_i^T) - \sum_{i=1}^{m} N_i^b(x_i^b \cos\delta_i^b - z_i^b \sin\delta_i^b).$$

Mărimile $\dot{\alpha}$, $\dot{q}$ și $\dot{V}$ care intervin în (5.5) se determină din (4.11) iar restul din relațiile lor de definiție (conform § 3.4).

Rezolvînd sistemul (5.4), rezultă

$$\begin{aligned} L^A &= \frac{1}{\Delta}[X_1(x^{AO} \cos\alpha'_{AO} + z^{AO} \sin\alpha'_{AO}) - X_2 \cos\alpha'_{AO}], \\ L^{AO} &= \frac{1}{\Delta}[X_2 \cos\alpha - X_1(x^A \cos\alpha + z^A \sin\alpha)], \end{aligned} \tag{5.6}$$

unde

$$\Delta = (x^{AO} - x^A)\cos\alpha \cos\alpha'_{AO} + z^{AO} \cos\alpha \sin\alpha'_{AO} - z^A \sin\alpha \cos\alpha'_{AO}. \tag{5.7a}$$

Determinantul Δ din (5.7a) poate fi aproximat suficient de bine prin

$$\Delta \approx x^{AO} - x^A + \alpha'_{AO} z^{AO} - \alpha z^A \tag{5.7b}$$

sau încă

$$\Delta \approx x^{AO} - x^A. \tag{5.7c}$$

Prin urmare, $|\Delta| \approx d'_{AO}$, d'_{AO} fiind distanța dintre focarul combinației aripă-fuzelaj și focarul ampenajului orizontal. Astfel, avem garanția că $\Delta \neq 0$, deci sistemul (5.4) are întotdeauna soluție bine determinată.

5.2. ALTE COMPONENTE ALE SARCINILOR AERODINAMICE

În relațiile (5.5) intervin anumite componente ale sarcinilor aerodinamice pe organele avionului, pentru care ne propunem, în continuare, să dăm cele mai adecvate expresii. Pentru aceasta vom ține seama de relațiile de definiție din § 3.4.

Portanța provenită din bracajul flapsului, respectiv al profundorului, este dată de

$$L^f = QC^f_{L\delta}\,\delta_f;\quad L^e = QC^e_{L\delta}\,\delta_e, \tag{5.8}$$

unde

$$\delta_f = \delta^0_f + \Delta\delta_f,\quad \delta_e = \delta^0_e + \Delta\delta_e, \tag{5.9}$$

iar pantele $C^f_{L\delta}$ și $C^e_{L\delta}$ sînt definite în (3.15).
În mod similar, pentru rezistența la înaintare produsă de bracaje admitem aproximațiile

$$D^f = QC^f_D,\quad D^e = \zeta Q\,C^e_D, \tag{5.10}$$

unde

$$C^f_D = K_{AF}(C^f_L)^2,\quad C^e_D = K_{AO}(C^e_L)^2,$$

coeficienții K_{AF} și K_{AO} fiind dați în (3.12), iar

$$C^f_L = C^f_{L\delta}\,\delta_f,\quad C^e_L = C^e_{L\delta}\,\delta_e. \tag{5.11}$$

Pentru calculul rezistenței la înaintare al combinațiilor aripă-fuzelaj, respectiv stabilizator-profundor, vom folosi expresiile

$$D^A = QC^A_D,\quad D^{AO} = \zeta QC^{AO}_D, \tag{5.12}$$

unde

$$C^A_D = C^{AF}_{D*} + K_{AF}(C^A_L)^2,\quad C^{AO}_D = C^{AO}_{D*} + K_{AO}(C^{AO}_L)^2. \tag{5.13}$$

Coeficienții de portanță ai combinațiilor aripă-fuzelaj, respectiv stabilizator-profundor, se determină din

$$\begin{aligned} C^A_L &= C^A_{L0} + \Delta\alpha C^{AF}_{L\alpha} + \Delta q C^{AF}_{Lq} + \Delta\dot\alpha\, C^{AF}_{L\dot\alpha} + C^f_{L\delta}\,\Delta\delta_f,\\ C^{AO}_L &= C^{AO}_{L0} + \Delta\alpha C^t_{L\alpha} + \Delta q C^t_{Lq} + \Delta\dot\alpha C^t_{L\dot\alpha} + C^e_{L\delta}\,\Delta\delta_e, \end{aligned} \tag{5.14}$$

C^A_{L0} și C^{AO}_{L0} fiind valorile corespunzătoare la momentul inițial t_0, cînd bracajele sînt δ^0_f, respectiv δ^0_e.

5.3. CONSIDERAȚII PRIVIND SARCINILE INERȚIALE

Pentru calculul sarcinilor inerțiale pe organele avionului este necesară cunoașterea distribuției maselor, precum și a accelerațiilor în diferite puncte ale acestuia. De aceea, în cele ce urmează vom face cîteva considerații privind determinarea componentelor accelerației, ale factorilor de sarcină și suprasarcină.

Traiectoria avionului este situată în planul vertical xOz. În locul coordonatei z vom utiliza altitudinea H, astfel că accelerațiile normală, respectiv tangențială, în centrul de greutate al avionului au expresiile

$$a_n = \frac{V^2}{R},\qquad a_t = \dot V, \tag{5.15}$$

V fiind mărimea vitezei în centrul de greutate, iar R raza de curbură a traiectoriei care se exprimă prin

$$R = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{H}^2)^{3/2}}{\dot{x}\ddot{H} - \dot{H}\ddot{x}}. \tag{5.16}$$

a_n este orientată spre centrul de curbură al traiectoriei. $R > 0$ pentru o traiectorie convexă și $R < 0$ pentru una concavă. Mărimile $\dot{x}$ și $\dot{H}$ sînt date de (vezi [6])

$$\dot{x} = V\cos(\theta - \alpha)\,;\ \dot{H} = V\sin(\theta - \alpha), \tag{5.17}$$

astfel că accelerația normală la traiectorie are expresia finală

$$a_n = V(q - \dot{\alpha}). \tag{5.18}$$

Prin urmare, componentele accelerației totale în centrul de greutate pe axele sistemului de referință mobil, din figura 1, sînt

$$\begin{aligned} a_x &= \dot{V}\cos\alpha + V(q - \dot{\alpha})\sin\alpha, \\ a_z &= \dot{V}\sin\alpha - V(q - \dot{\alpha})\cos\alpha. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Într-un alt punct de pe avion, diferit de centrul de greutate, accelerația mai are două componente. Prima componentă provine din accelerația liniară, iar cea de a doua din accelerația centripetă. În particular, în focarul ampenajului orizontal componentele accelerației liniare pe axele Ox și Oz sînt $\dot{q}z^{AO}$, respectiv $-\dot{q}x^{AO}$, iar componentele accelerației centripete pe aceleași axe sînt $-q^2x^{AO}$ și $-q^2z^{AO}$. Astfel, componentele accelerației totale în focarul ampenajului orizontal pe axele sistemului de coordonate legat de avion sînt

$$\begin{aligned} a_x^{AO} &= \dot{V}\cos\alpha + V(q - \dot{\alpha})\sin\alpha + \dot{q}z^{AO} - q^2x^{AO}, \\ a_z^{AO} &= \dot{V}\sin\alpha - V(q - \dot{\alpha})\cos\alpha - \dot{q}x^{AO} - q^2z^{AO}. \end{aligned} \tag{5.20}$$

De regulă, ca o măsură pentru componentele accelerației pe axele de coordonate, se utilizează noțiunea de *factor de suprasarcină* orizontală, respectiv verticală. Factorul suprasarcină verticală este definit prin

$$n_z = -\frac{a_z}{g}, \quad n_z^{AO} = -\frac{a_z^{AO}}{g} \tag{5.21}$$

g fiind accelerația gravitațională, iar factorul de suprasarcină orizontală n_x se definește în mod analog

$$n_x = -\frac{a_x}{g}, \quad n_x^{AO} = -\frac{a_x^{AO}}{g}. \tag{5.22}$$

MUZEUL TEHNIC 1848

Pe de altă parte, deoarece avionul evoluează în cîmpul gravitațional, factorii totali de sarcină pentru o unitate de masă plasată în centrul de greutate al avionului, sau în focarul ampenajului orizontal, sînt

$$n_{1x} = n_x - \sin\theta\,; \quad n_{1z} = n_z + \cos\theta, \tag{5.23}$$

respectiv

$$n_{1x}^{AO} = n_x^{AO} - \sin\theta, \quad n_{1z}^{AO} = n_z^{AO} + \cos\theta. \tag{5.24}$$

Mărimile n_{1x}, n_{1z}, n_{1x}^{AO}, n_{1z}^{AO} se mai numesc și *factori de sarcină*.

În final, remarcăm faptul că relații similare cu (5.20) la (5.24) pot fi deduse pentru orice alt punct P de pe avion care are coordonatele (x, y, z). Deoarece studiem numai manevrele longitudinale, în relațiile amintite va trebui doar să facem înlocuirile $x^{AO} \to x$ și $z^{AO} \to z$.

5.4. CONSIDERAȚII PRIVIND BRAȚAJELE SUPRAFEȚELOR DE COMANDĂ

În cadrul lucrării de față se presupune că bracajele flapsului, profundorului sau frînelor aerodinamice sînt funcții cunoscute de timp. Pentru un avion dat, parametrii care definesc violența bracajului suprafețelor de comandă menționate influențează în mod hotărîtor mărimea sarcinilor de manevră pe organele avionului respectiv, precum și evoluția în timp a acestor sarcini. Principalii parametri sînt : viteza maximă de bracare, bracajul maxim și timpul cît bracajul maxim este menținut constant în timpul manevrei. Acești parametri nu pot fi arbitrari, ei depinzînd de caracteristicile servomecanismelor de acționare a fiecăreia dintre suprafețele de comandă.

De regulă, pentru calculul sarcinilor critice de manevră se consideră cele mai severe comenzi și care nu se întîlnesc în situațiile reale de zbor. Referindu-ne, de exemplu, la profundor, regulamentul de calcul MIL (vezi [12]) prevede patru tipuri de comenzi : triunghi, trapez, trapez cu bracaj maxim și trapez cu bracaj invers (vezi fig. 4).

Parametrii care definesc violența bracajului profundorului în conformitate cu prevederile MIL sînt :

t_1 — timpul de acționare necesar pentru atingerea bracajului maxim la altitudinea și viteza la care se face calculul. Pentru diferitele tipuri de avioane $0{,}2 \leqslant t_1 \leqslant 0{,}4$ s ;

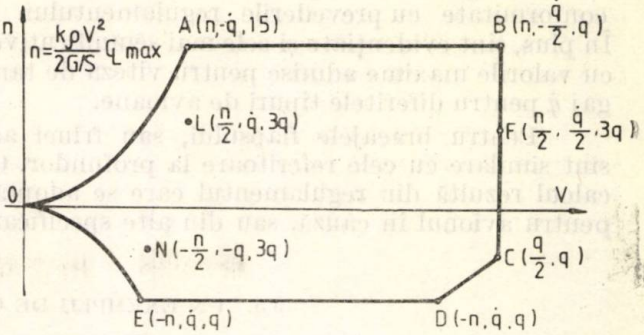
δ_{max} — bracajul maxim la altitudinea și viteza la care are loc manevra. Parametrii t_1 și δ_{max} definesc și viteza de bracare prin relația $\dot{\delta}_e = \delta_{max}/t_1$;

t_2 — timpul cît bracajul se menține constant în timpul manevrei și anume $\delta_e = \delta_{max}$. Acest parametru intervine în cadrul comenzii trapez cu bracaj maxim și se alege astfel încît factorul maxim de sarcină n în centrul de greutate al avionului să se atingă în timpul $2t_1 + t_2$.

În cazul comenzilor trapez și trapez cu bracaj invers (vezi fig. 4), în locul lui t_2 intervin parametrii t_3, respectiv t_4. În primul caz t_3 se alege astfel încît cu bracajul δ_e să se obțină factorul maxim de sarcină în timpul $2t_1 + t_3$, iar în cel de al doilea caz, t_4 se alege astfel încît cu bracajul δ_e factorul maxim de sarcină n să se atingă în timpul $5\,t_1/2 + t_4$.

a. Diagrama de manevră

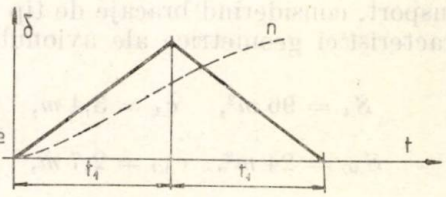
$k = 1{,}25$ pentru $M \leq 0{,}4$;
$k = 1$ pentru $M \geq 0{,}6$;
$k = 1{,}75 - 1{,}25M$ pentru $0{,}4 < M < 0{,}6$;
$q = ng/V$,
$\dot{q} = 6$ rad/s² pentru avioane de luptă ($n \geq 7{,}33$);
$3 < q < 5$ pentru alte tipuri ($3 < n < 7{,}33$);
$q = 2$ pentru avioane de transport ($n \leq 3$);



b. Bracaje tipice ale profundorului

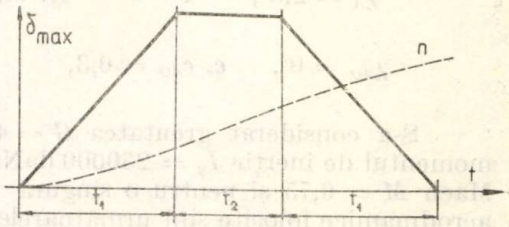
1. Comandă triunghi.

$t_1 = 0{,}2$ pentru avioane de luptă ($n \geq 7{,}33$);
$t_1 = 0{,}3$ pentru alte tipuri ($3 < n < 7{,}33$);
$t_1 = 0{,}4$ pentru avioane de transport ($n \leq 3$);
δ = bracajul profundorului capabil să realizeze factorul de sarcină maxim n;



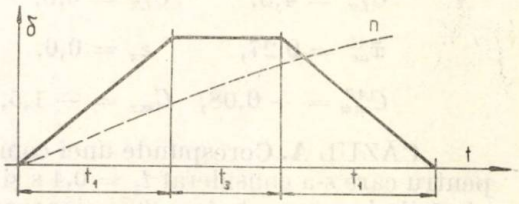
2. Comandă trapez cu bracaj maxim.

δ_{max} = bracajul maxim accesibil (eventual limitat prin control stop);
t_2 = ales astfel încît să se realizeze factorul de sarcină impus;



3. Comandă trapez.

t_3 - timp ales astfel încît împreună cu bracajul δ să realizeze factorul maxim de sarcină în timpul $2t_1 + t_3$



4. Comandă trapez cu bracaj negativ.

t_4 și δ se aleg astfel încît factorul de sarcină maxim să se realizeze cînd bracajul este $-\delta/2$.

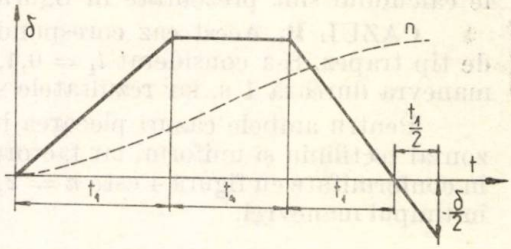


Fig. 4. — Diagrama de manevră și bracaje tipice ale profundorului după regulamentul *MIL—A—8861 (ASG)*.

În figura 4 este prezentată şi diagrama de manevră a avionului în conformitate cu prevederile regulamentului $MIL - A - 8861$ (ASG). În plus, sînt evidenţiate şi cele mai semnificative cazuri de calcul împreună cu valorile maxime admise pentru viteza de tangaj q şi acceleraţia de tangaj $\dot{q}$ pentru diferitele tipuri de avioane.

Pentru bracajele flapsului, sau frînei aerodinamice, consideraţiile sînt similare cu cele referitoare la profundor. Cazurile cele mai critice de calcul rezultă din regulamentul care se adoptă drept bază de proiectare pentru avionul în cauză, sau din alte specificaţii impuse.

5.5. UN EXEMPLU DE CALCUL

Vom ilustra metoda expusă în prezenta lucrare prin calculul răspunsului şi al sarcinilor aerodinamice de manevră pe organele unui avion de transport, considerînd bracaje de tip MIL ale profundorului. Principalele caracteristici geometrice ale avionului sînt :

$$S_A = 96\ m^2, \quad \bar{c}_A = 3{,}4\ m, \quad \Lambda_A = 8, \quad z^A = 0\ m,$$

$$S_{AO} = 24\ m^2, \quad \bar{c}_{AO} = 2{,}7\ m, \quad \Lambda_{AO} = 3{,}5, \quad d_{AO} = 13{,}5\ m,$$

$$\chi_A = 2{,}5°, \quad z^{AO} = -4{,}7\ m, \quad z^e = -4{,}7\ m, \quad S_e = 6{,}5 m^2,$$

$$\chi_{AO} = 0°, \quad c_e/c_{AO} = 0{,}3, \quad \zeta = 0{,}95, \left(\frac{d\alpha}{d\delta}\right)_e = 0{,}6.$$

S-a considerat greutatea $G = 45000$ daN, centrajul $\bar{x}_{CG} = 0{,}25$ şi momentul de inerţie $I_y = 250000$ daNms^2. Calculele s-au făcut la numărul Mach $M = 0{,}75$ şi pentru o singură altitudine, $H = 5700\ m$. Derivatele aerodinamice folosite sînt următoarele :

$$C_{L\alpha}^{AF} = 4{,}3, \quad C_{L\alpha}^{AO} = 0{,}8, \quad C_{L\delta}^{e} = 0{,}55, \quad \bar{x}_{ac}^{A} = 0{,}28,$$

$$\bar{x}_{ac}^{AO} = 0{,}27, \quad \varepsilon_\alpha = 0{,}6, \quad C_{L(\alpha=0)}^{AF} = 0{,}06, \quad C_{m(\alpha=0)}^{AF} = 0{,}06,$$

$$C_{m*}^{AF} = -0{,}08, \quad C_{m\alpha} = -1{,}5, \quad C_{D*}^{AF} = 0{,}02 \quad C_{D*}^{AO} = 0{,}004.$$

CAZUL **A.** Corespunde unei comenzi a profundorului de tip triunghi, pentru care s-a considerat $t_1 = 0{,}4$ s şi $(\delta_e)_{max} = 12°$. Rezultă că viteza maximă de bracare este $\dot{\delta}_e = 30°/s$, iar toată manevra durează 0,8 s. Rezultatele calculului sînt prezentate în figurile 5—8.

CAZUL **B.** Acest caz corespunde unei comenzi a profundorului de de tip trapez. S-a considerat $t_1 = 0{,}4$, s, $t_3 = 0{,}2$ s şi $(\delta_e)_{max} = 10°$. Toată manevra durează 1 s, iar rezultatele sînt prezentate în figurile 9—12.

Pentru ambele cazuri plecarea în manevră s-a făcut din zborul orizontal rectiliniu şi uniform, iar factorul maxim de sarcină verticală admis în conformitate cu figura 4 este $n = 2{,}5$. S-a neglijat tracţiunea motoarelor în timpul manevrei.

Primit la redacţie la 22 februarie 1986

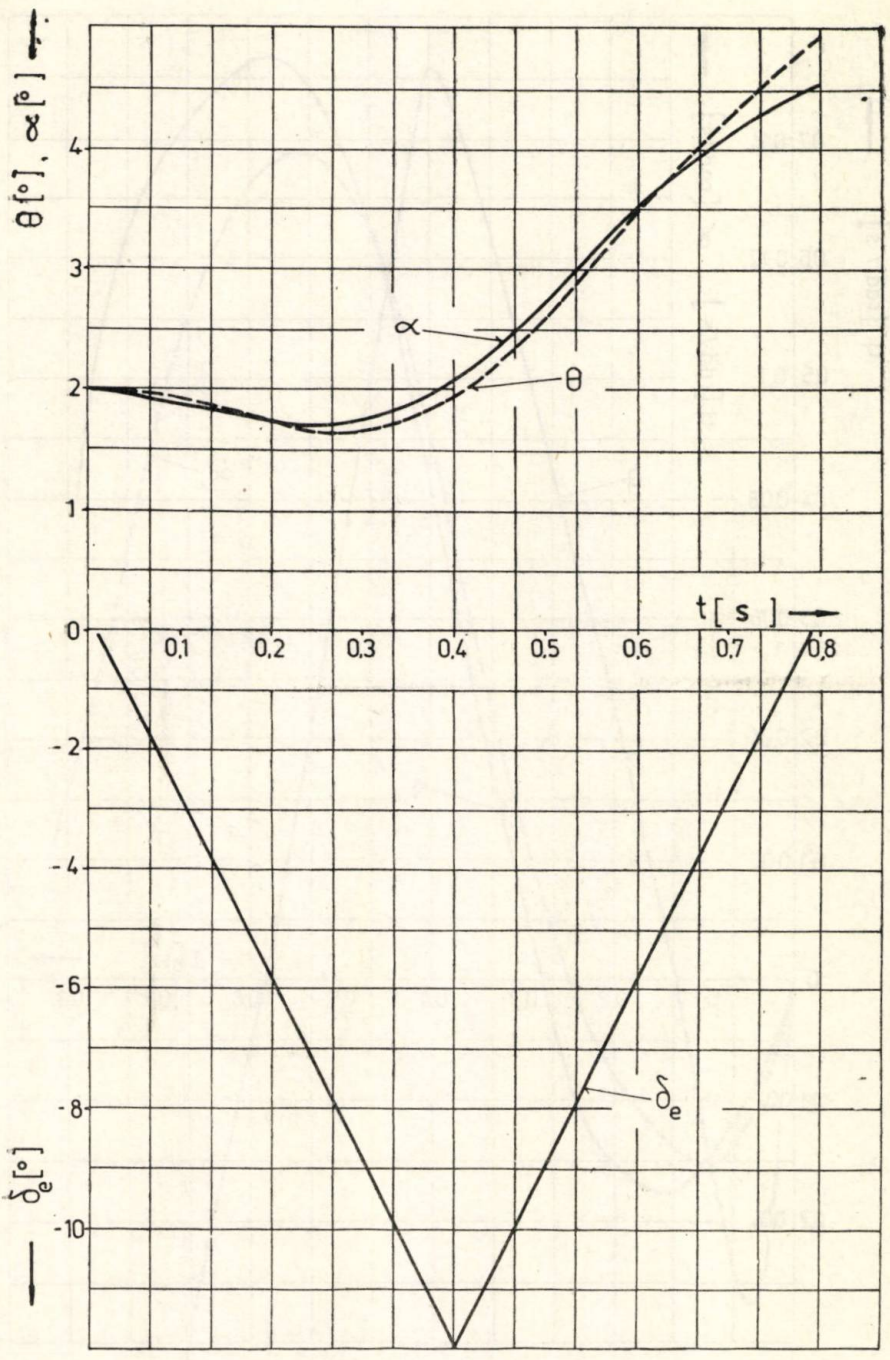


Fig. 5.— Parametrii de comandă și răspuns în cazul **A.** Bracajul profundorului δ_e, incidența α și unghiul de urcare θ.

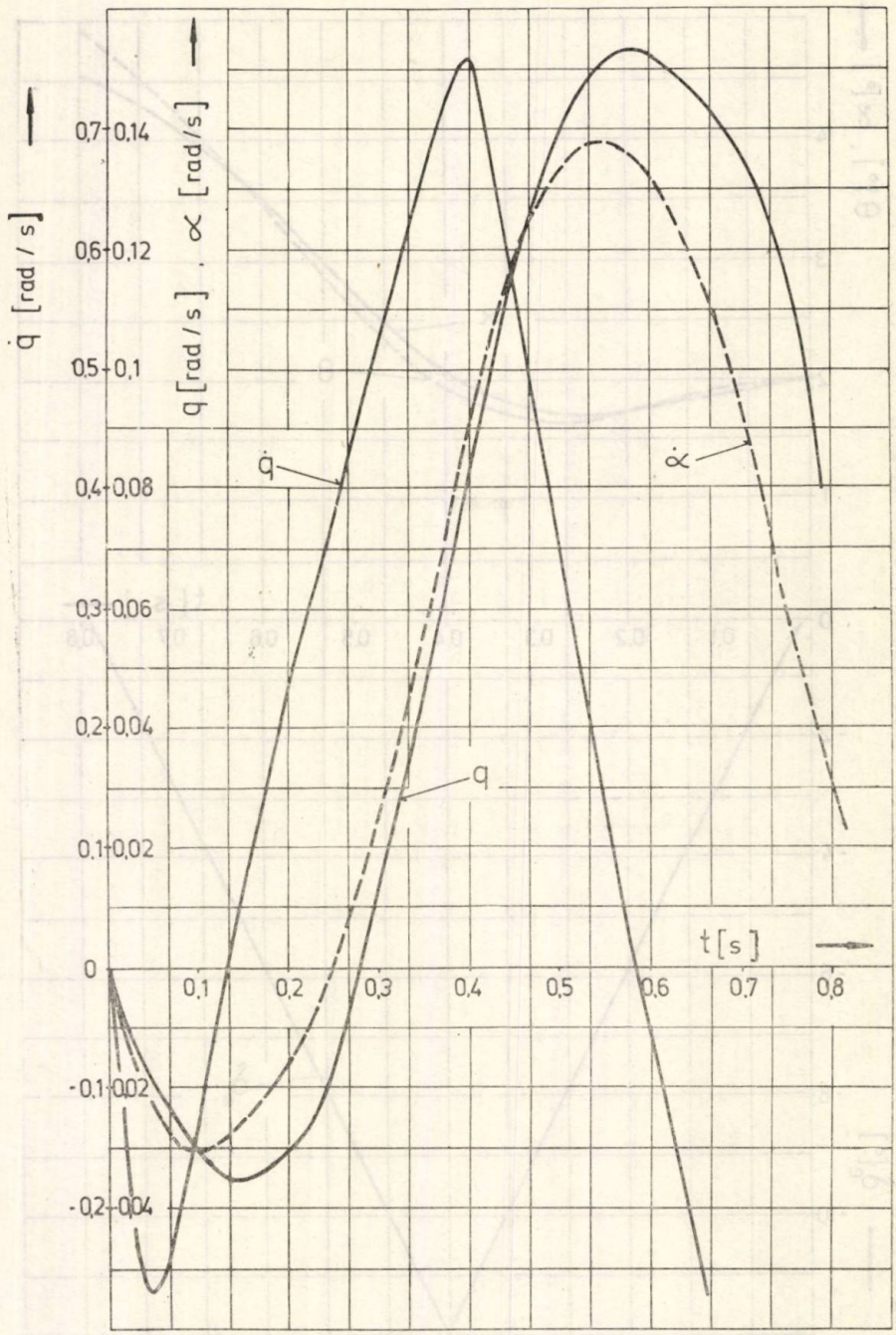


Fig. 6. — Parametrii de răspuns în cazul **A.** Viteza de tangaj q, accelerația de tangaj $\dot{q}$ și variația incidenței $\dot{\alpha}$.

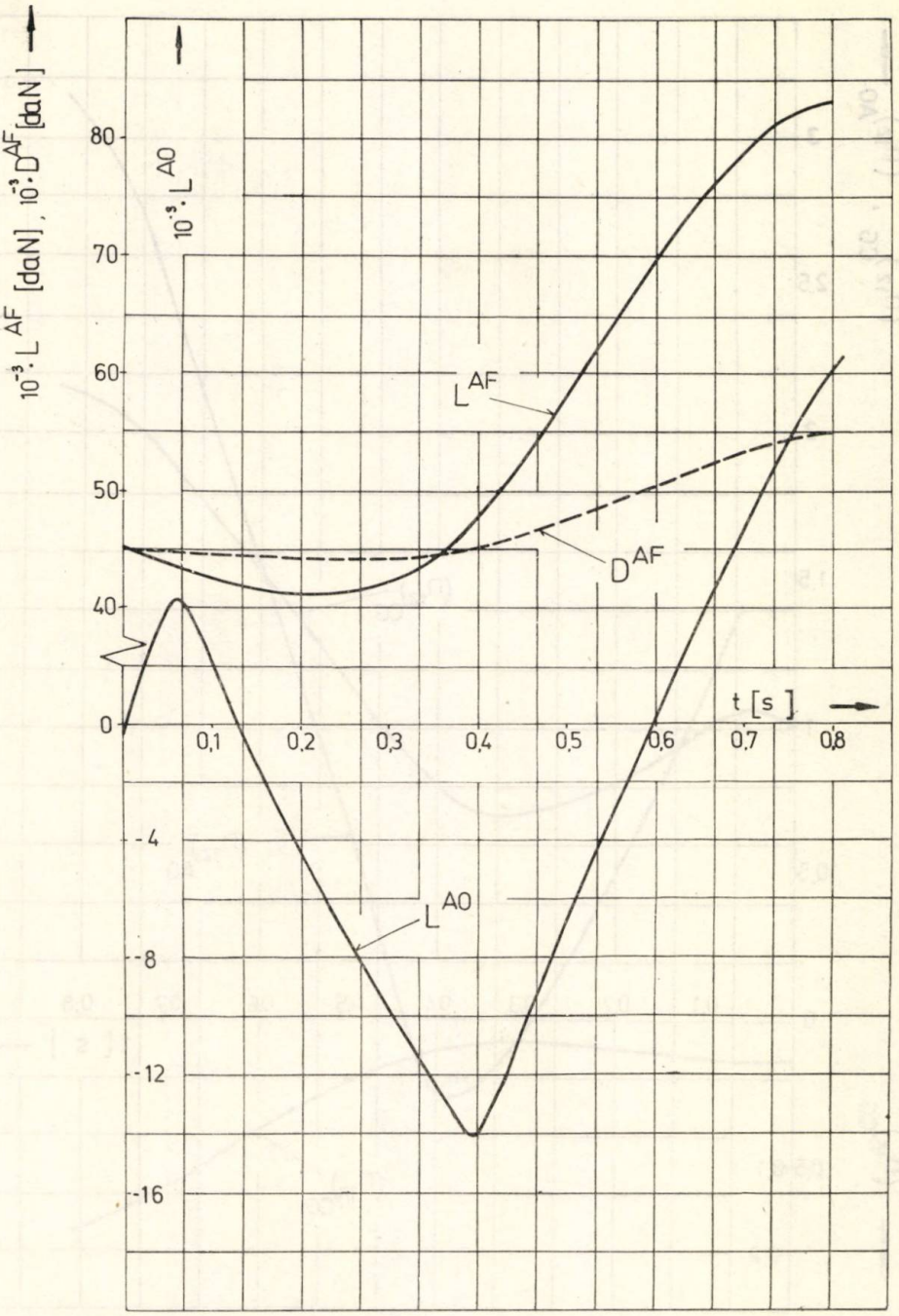


Fig. 7. — Forțele de manevră în cazul **A.** Portanța combinației aripă-fuselaj L^{AF}, rezistența la înaintare a combinației aripă-fuzelaj D^{AF} și portanța ampenajului orizontal L^{AO}.

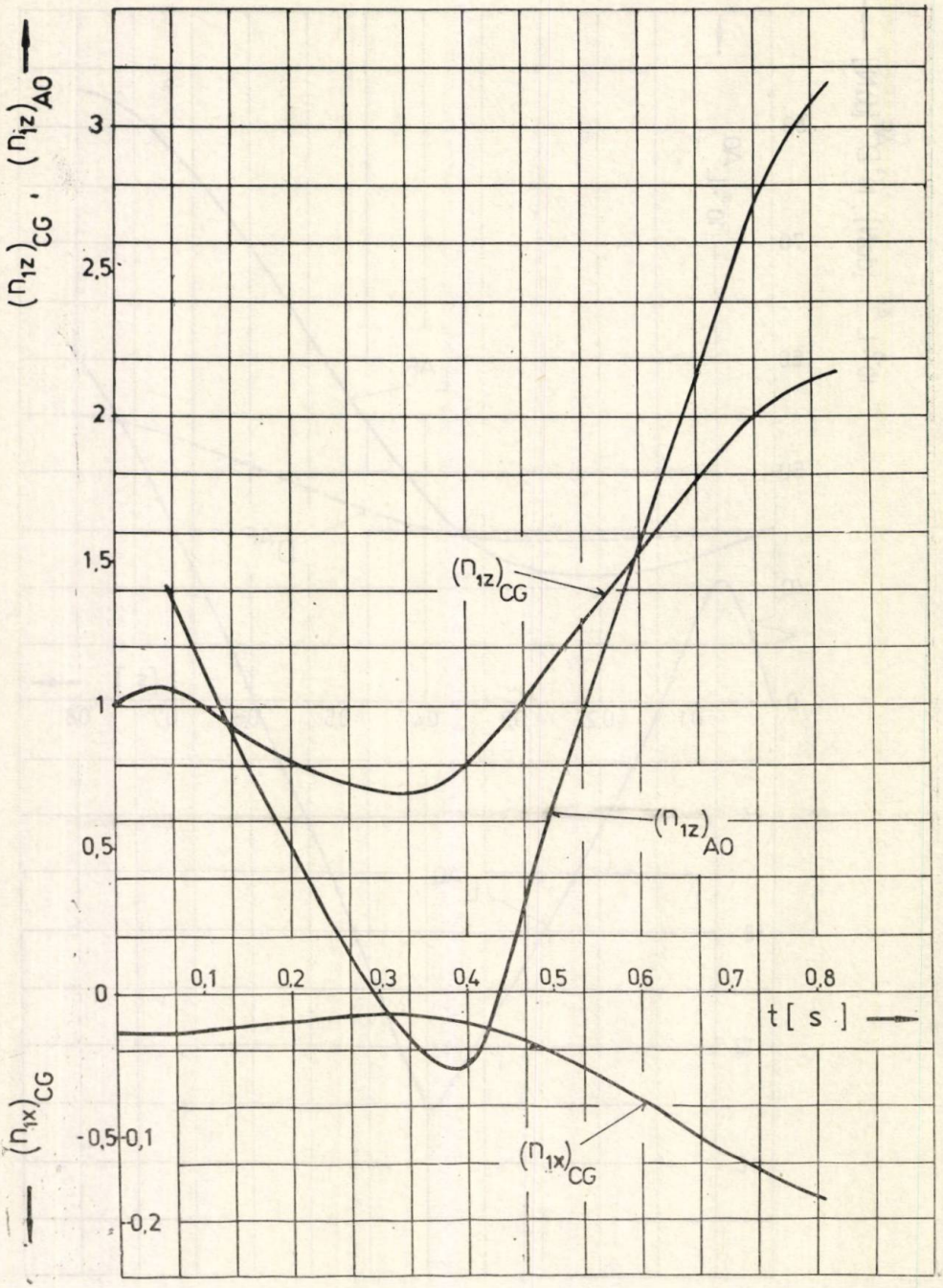


Fig. 8. — Factorii totali de sarcină în cazul A. Factorii de sarcină verticală în centrul de greutate și focarul ampenajului orizontal $(n_{1z})_{CG}$, respectiv $(n_{1z})_{AO}$ și factorul total de sarcină orizontală în centrul de greutate $(n_{1x})_{CG}$.

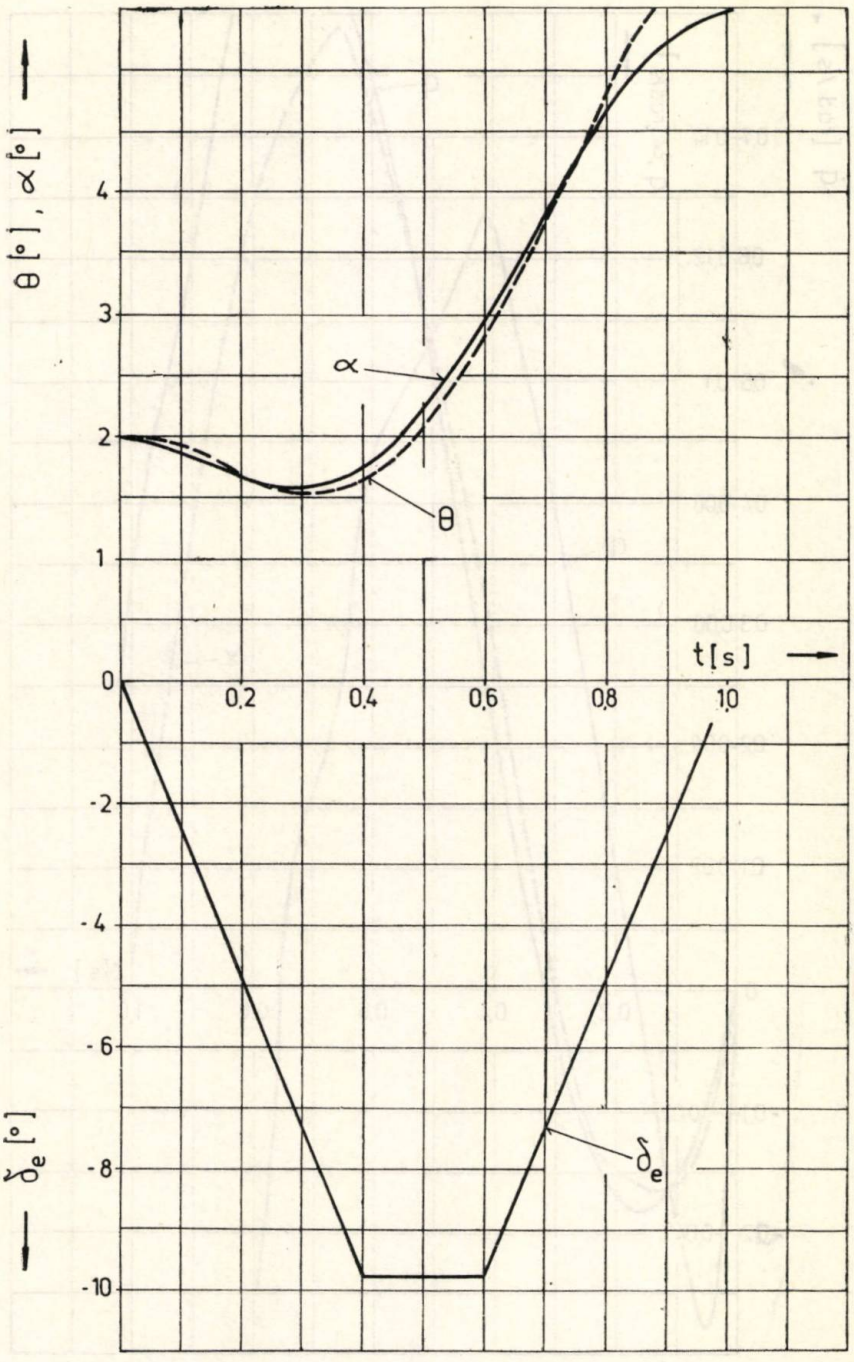


Fig. 9. — Parametrii de comandă și răspuns în cazul **B.** Bracajul profundorului δ_e, incidența α și unghiul de urcare θ.

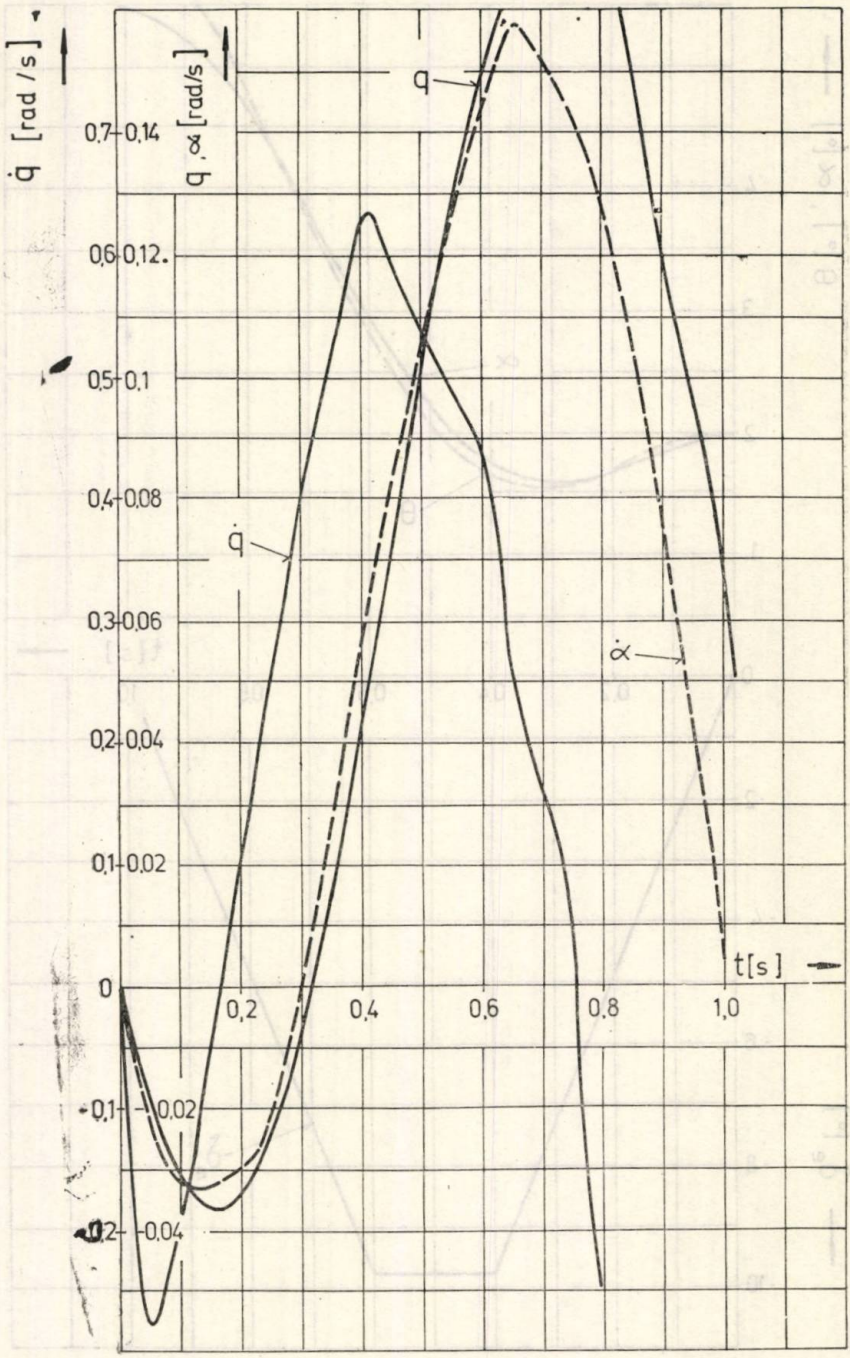


Fig. 10. — Parametrii de răspuns în cazul **B**. Viteza de tangaj q, accelerația de tangaj $\dot{q}$ și variația incidenței α.

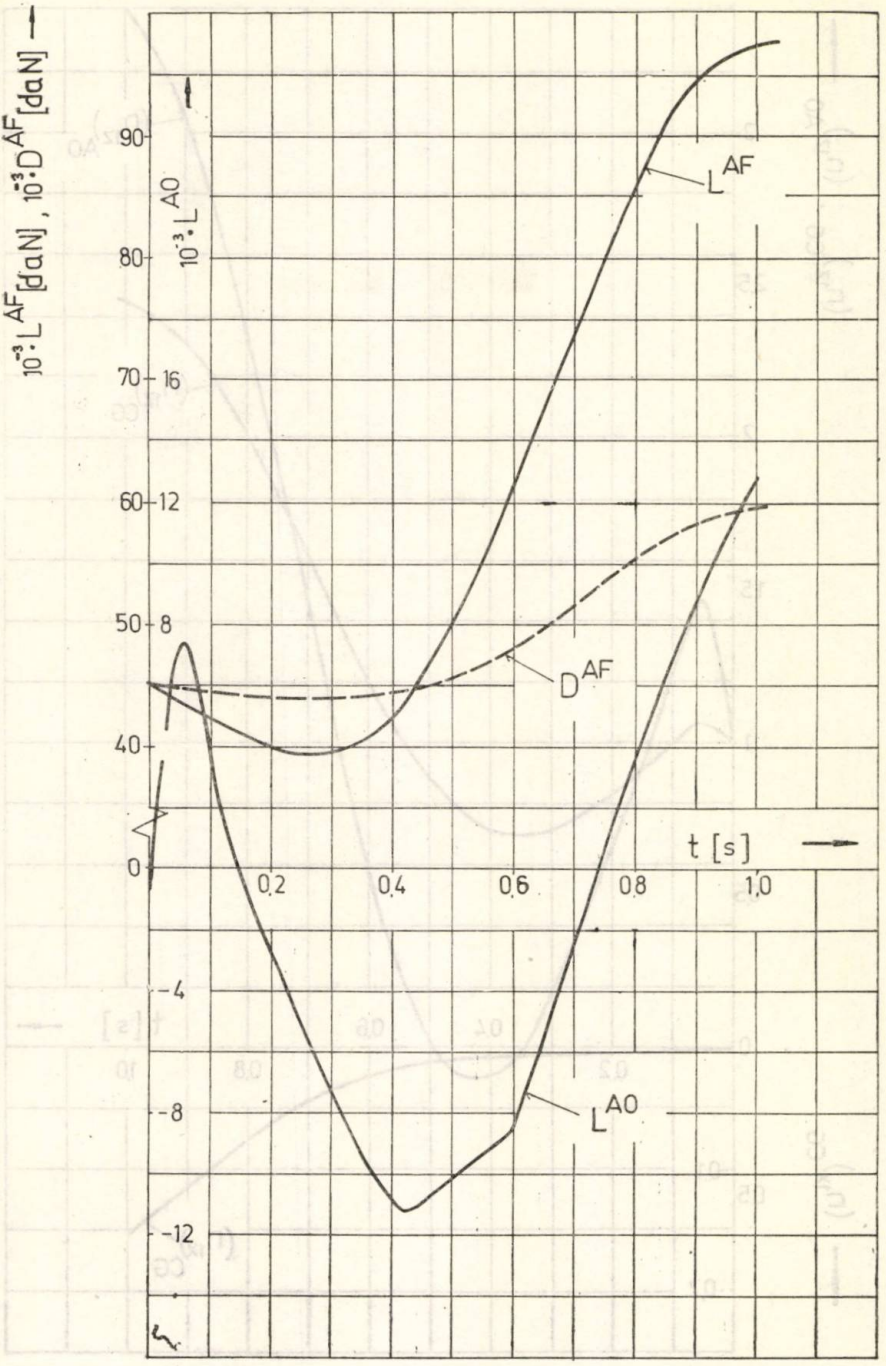


Fig. 11. — Forțele de manevră în cazul **B**. Portanța combinației aripă-fuzelaj L^{AF}, rezistența la înaintare a combinației aripă-fuzelaj D^{AF} și portanța ampenajului orizontal L^{AO}.

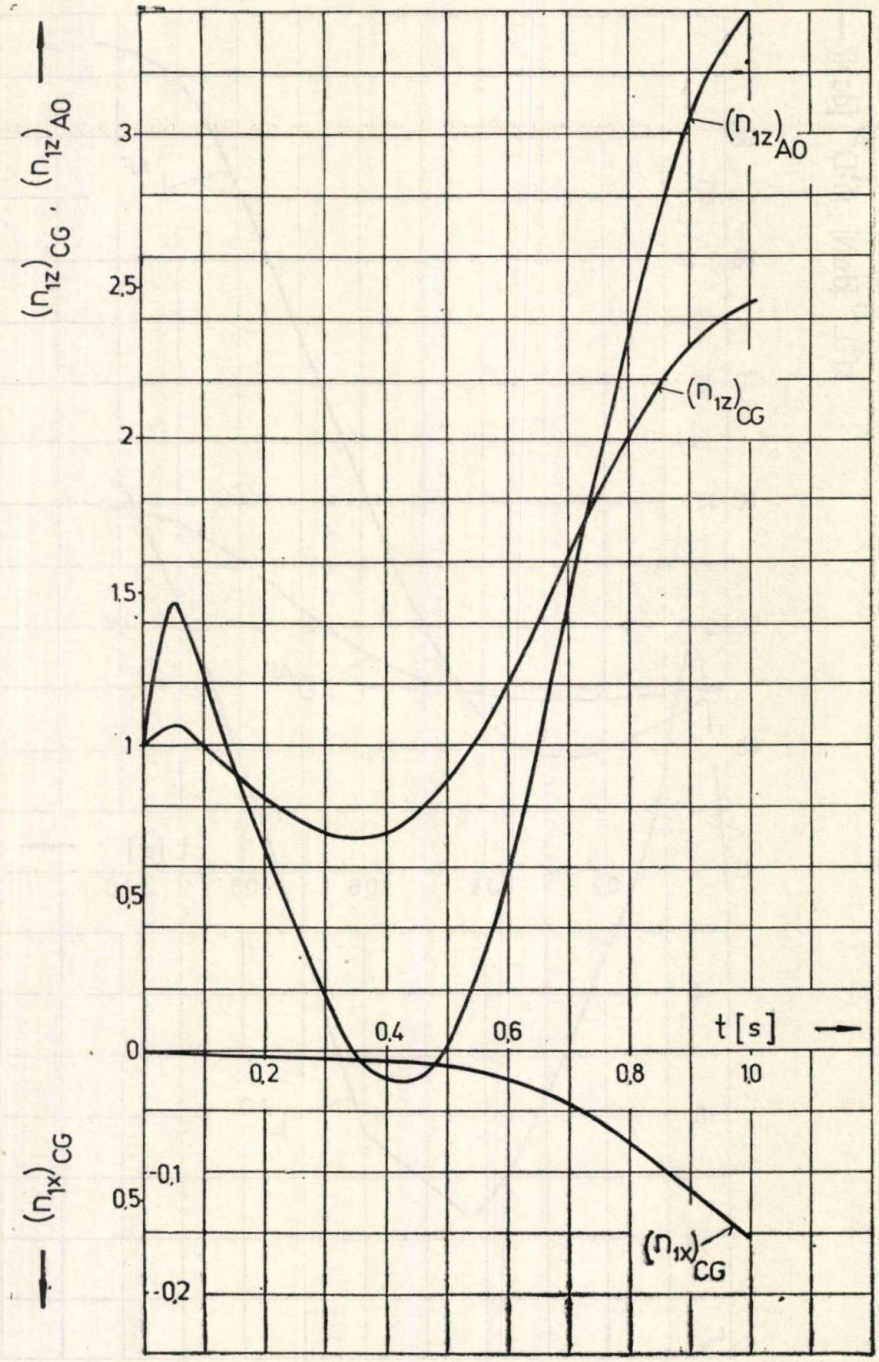


Fig. 12. — Factorii totali de sarcină în cazul **B.** Factorii totali de sarcină verticală în centrul de greutate și focarul ampenajului orizontal $(n_{1z})_{CG}$, respectiv $(n_{1z})_{AO}$ și factorul total de sarcină orizontală în centrul de greutate $(n_{1x})_{CG}$.

BIBLIOGRAFIE

1. T. CZAYKOWSKI, *Loading Conditions of Tailed Aircraft in Longitudinal Manoeuvres*, R M, Nr. 3001, 1956.
2. P. F. RICHARDS, *The Estimation of Tail Loading due to Elevator — Induced Pitching Manoeuvres*, Parts I, II and III. Aicraft Engineering, Nrs. 371, 372 and 373, 1960.
3. H. A. PEARSON, W. A. Mc GOWAN, *Horizontal Tail Loads in Manoeuvring Flight*, NACA Raport Nr. 1007, 1951.
4. H. A. PEARSON, *Derivation of Charts for Determining the Horizontal Tail Load Variation with any Elevator Motion*, NACA Raport Nr. 759, 1943.
5. H. SCHLICHTING, E. TRUCKENBRODT, *Aerodynamik des Flugzeuges*, Bd. II, Springer Verlag, Berlin — Heidelberg — New-York, 1969.
6. B. ETKIN, *Dynamics of Flight, Stability and Control*, John Wiley and Sons. Inc., New-York, 1963.
7. M. M. NIȚĂ și colab., *Influența centrajului avioanelor de transport asupra răspunsului la comenzi primare de zbor* (raport intern INCREST), 1984.
8. T. HACKER, *Stabilitate și comandă în teoria zborului*, Edit. Academiei, București, 1968.
9. L. PONTRIAGUINE, *Equations différentielles ordinaires*, Ed. Mir., Moscou, 1969.
10. L. Th. SAATY, *Nonlinear Mathematics*, Mc. Graw — Hill Book Company, New-York, 1964.
11. A. HALANAY, *Ecuații diferențiale*, Ed. Did. și Ped., București, 1962.
12. *** MIL — A — 8861 (ASC), *Airplane strenght and rigidity flight loads*, U. S. Air force, mai 1960.

EVALUAREA DEBITULUI DE SCĂPĂRI PRIN ROSTURILE DE EXECUȚIE A ECRANELOR

D. NICODIM

A.C.H. „Olt Inferior" Slatina

Se analizează pierderile de debit prin rosturile de execuție ale ecranelor de etanșare considerînd mișcarea plană de infiltrație printr-un mediu poros omogen cu un sistem periodic spațial de fante. Se indică un exemplu numeric pentru un caz practic.

I. INTRODUCERE

Amenajarea sectoarelor inferioare ale rîurilor impune importante lucrări de îndiguire în condiții geomorfologice variate. Asigurarea unui înalt grad de fiabilitate construcției și limitarea scăpărilor de debit impun condiții severe pentru tehnologia de execuție și necesită mijloace de evaluare a eventualelor erori.

Ecranul de etanșare în profunzime participă alături de pereu la izolarea hidraulică a incintei îndiguite [1]. Tehnologiile de execuție cu pereți continui de beton, gel beton și ecrane subțiri, asigură o etanșare satisfăcătoare dar prezintă unele inconveniente în zonele de racord ale panourilor adiacente unde pot să apară rosturi, fante verticale, care constituie căi de infiltrare a apei.

În lucrare se prezintă un procedeu analitic de estimare a debitului de scăpări prin rosturile de execuție, admițînd că terenul aluvionar este un mediu poros omogen, iar sistemul de fante prezintă tehnologic o periodicitate spațială în lungul digului. Se obține relația de legătură între debitul infiltrat și pierderea de presiune în zona ecranului.

II. MODELUL MATEMATIC

Procesul de infiltrație, prin terenul permeabil considerat un mediu poros omogen, ca urmare a scăpărilor prin fantele rosturilor de execuție a ecranului se poate considera cu o bună aproximație, o mișcare plană în plane orizontale. Stratul permeabil este mărginit inferior de roca de bază impermeabilă.

Ecuația de continuitate și legea lui Darcy sînt echivalente cu relațiile :

$$\begin{aligned} \bar{v} &= -K\,\overline{\operatorname{grad} h}, \\ \operatorname{div} v &= 0, \\ \nabla^2 h &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

unde K este coeficientul de permeabilitate (m/s), iar $h = p/\gamma + y$ este sarcina locală și y — cota față de planul de referință orizontal, roca de bază.

Introducînd funcţia de potenţial

$$\varphi(x, y) = -Kh(x, y) + C, \tag{2}$$

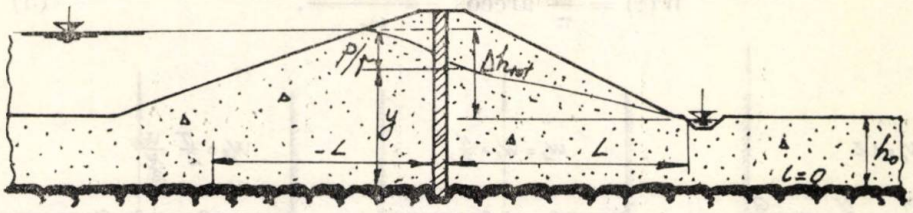


Fig. 1

se poate defini potenţialul complex al mişcării,

$$F(z) = \varphi + i\psi = -Kh + i\psi, \tag{3}$$

unde ψ reprezintă funcţia de curent [2].

La distanţă suficient de mare de ecranul de etanşare curgerea tinde să se uniformizeze. Pierderea de sarcină între două puncte la distanţa L de o parte şi de alta a ecranului de etanşare devine egală cu diferenţa de cotă între nivelul suprafeţei libere în incinta îndiguită şi nivelul suprafeţei în rigola colectoare aval de dig (fig. 1)

$$\Delta h_L = \frac{1}{K}(\varphi_L - \varphi_{-L}) = \frac{2}{K} ReF. \tag{4}$$

În relaţia de mai sus s-a ţinut seama de simetria spectrului liniilor de curent faţă de linia de etanşare în plan orizontal. Întrucît spectrul hidrodinamic prezintă o periodicitate spaţială indusă de periodicitatea

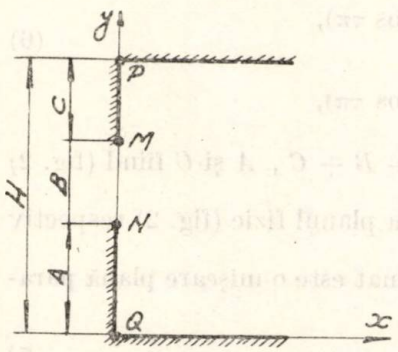


Fig. 2

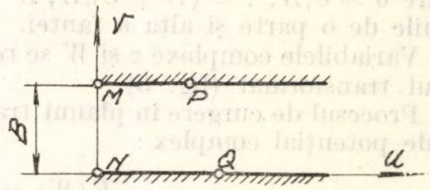


Fig. 3

fantelor în linia de etanşare, este posibil să se restrîngă analiza la una din „celulele perioadă" ale curgerii (fig. 2).

Reprezentarea conformă a domeniului fizic din figura 2 pe domeniul bandă indicat în figura 3 se obţine ca urmare a unei succesiuni de trans-

formări conforme elementare, prezentate sintetic în figura 4. Rezultatul final este funcția

$$W(z) = \frac{iB}{\pi} \arccos \frac{\operatorname{ch}\frac{\pi z}{H} + \omega_0}{\omega_e}, \tag{5}$$

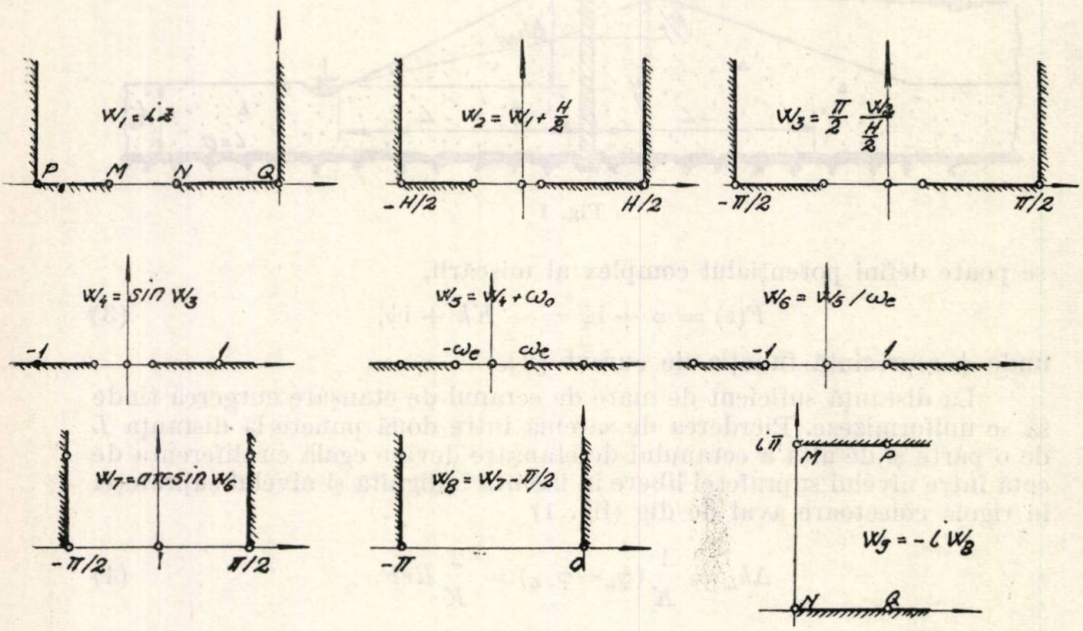


Fig. 4

unde B este lățimea fantei, H este lățimea „celulei", ω_0 și ω_e coeficienți exprimați prin relațiile :

$$\omega_0 = \frac{1}{2}(\cos \theta\pi + \cos \tau\pi),$$
$$\omega_e = \frac{1}{2}(\cos \theta\pi - \cos \tau\pi), \tag{6}$$

în care $\theta = C/H$, $\tau = (B + C)/H$, $H = A + B + C$, A și C fiind (fig. 2) lățimile de o parte și alta a fantei.

Variabilele complexe z și W se referă la planul fizic (fig. 2) respectiv planul transformat (fig. 3).

Procesul de curgere în planul transformat este o mișcare plană paralelă de potențial complex :

$$F_1(W) = \frac{Q}{B} W, \tag{7}$$

iar potențialul complex în planul fizic se scrie :

$$F(z) = \frac{iQ}{\pi} \arccos \frac{\operatorname{ch}\frac{\pi z}{H} + \omega_0}{\omega_e}. \tag{8}$$

Liniile de curent din planul transformat sînt paralele cu axa u. Reprezentînd conform în planul fizic aceste linii se obține spectrul real al liniilor de curent. Dacă se inversează relația (5) se obține formula de transformare inversă

$$z = \frac{H}{\pi} \operatorname{arch}\left(\omega_e \cos\frac{\pi W}{iB} - \omega_0\right) \tag{9}$$

avînd părțile reală și imaginară de forma :

$$x = \frac{H}{\pi} \ln\left[\frac{P_1 + P_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{P_1 + P_2}{2}\right)^2 - 1}\right], \tag{10}$$

$$y = \frac{H}{\pi} \arccos\frac{P_1 - P_2}{2},$$

unde s-au introdus notațiile :

$$P_1 = \sqrt{(R_2 + 1)^2 + I_2^2}; \qquad P_2 = \sqrt{(R_2 - 1)^2 + I_2^2},$$

$$R_2 = \omega_e \cos\frac{\pi v}{B} \operatorname{ch}\frac{\pi u}{B} - \omega_0$$

$$I_2 = \omega_e \sin\frac{\pi v}{B} \operatorname{sh}\frac{\pi u}{B}.$$

Pentru $v = v_0 = \text{const.}$, cu relațiile (10), se obține linia de curent reală sub forma parametrică,

$$x = f_1(u)\,;\; y = f_2(u),$$

în care u este parametrul variabil al curbei.

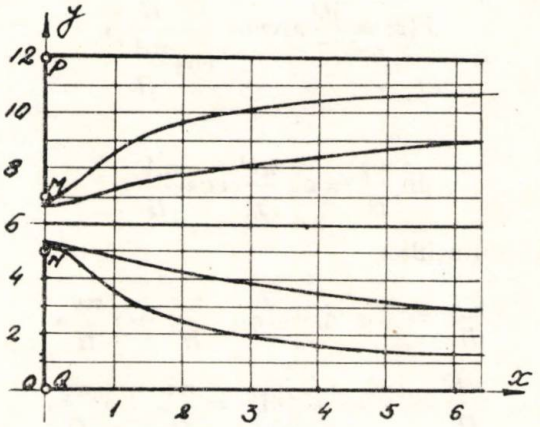


Fig. 5

În cazul unor „celule" simetrice ($A = C$ în fig. 2) $\omega_0 = 0$ și $\omega_e = \cos\pi\, A/H$ și relația (9) se scrie

$$z = \frac{H}{\pi} \operatorname{arch}\left(\cos\frac{\pi A}{H} \cdot \cos\frac{\pi W}{iB}\right). \tag{11}$$

În figura 5 se prezintă liniile de curent în coordonatele relative alegînd $A/H = C/H = 0{,}5/1{,}2$; $B/H = 0{,}2/1{,}2$. Lățimea fizică a celulei este impusă de tehnologia de execuție a ecranului.

În tabelul de mai jos se prezintă selectiv rezultatele calculului:

$x\ 10^{-1}$

u / v		0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	3,0
$NQ\infty$	x	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	2,27	4,02	—	—	
	y	5,0	4,95	4,79	4,50	4,04	3,30	1,95	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0 05	x	0,0	0,23	0,48	0,78	1,18	1,71	2,44	3,39	4,49	5,65	6,84	12,84
	y	5,3	5,26	5,16	4,98	4,71	4,36	3,96	3,60	3,34	3,18	3,10	3,0
0,10	x	0,0	0,32	0,66	1,06	1,55	2,16	2,90	3,76	4,74	5,81	6,93	12,84
	y	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0
0,15	x	0,0	0,23	0,48	0,78	1,18	1,71	2,44	3,39	4,49	5,65	6,84	12,84
	y	6,7	6,74	6,84	7,02	7,30	7,64	8,04	8,40	8,66	8,81	8,90	9,0
$NP\infty$	x	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	2,27	4,02	—	—	
	y	7,0	7,05	7,21	7,50	7,96	8,70	10,05	12,00	12,00	12,00	12,00	12,00

III. CALCULUL DEBITULUI

Întrucît ecranul de etanşare prezintă fante, suprafaţa de depresie nu are o cădere bruscă în dreptul liniei de etanşare, putîndu-se determina corelaţia dintre debitul de scăpări $q(m^3/s.m)$ şi diferenţa de nivel Δ/h_L între suprafeţele libere în incinta îndiguită şi rigola colectoare (4). În cazul unei „celule" simetrice, potenţialul complex din (8) se scrie:

$$F(z) = \frac{iQ}{\pi} \arccos \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi z}{H}}{\cos \frac{\pi A}{H}},$$

adică

$$\operatorname{ch} \frac{\pi z}{H} = \operatorname{ch} \frac{\pi F}{H} \cos \frac{\pi A}{H}. \tag{12}$$

Dacă se introduc notaţiile:

$$\frac{\pi z}{H} = \zeta = \xi + i\eta = \frac{\pi x}{H} + i \frac{\pi y}{H},$$

$$\frac{\pi F}{Q} = \omega = \alpha + i\beta = \frac{\pi \varphi}{Q} + i \frac{\pi \psi}{Q},$$

relaţia (12) devine:

$$\operatorname{ch}\zeta = \omega_e \operatorname{ch}\omega, \tag{13}$$

separînd părţile reală şi imaginară se obţin:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}\xi \cos\eta &= \omega_e \operatorname{ch}\alpha \cos\beta, \\ \operatorname{sh}\xi \sin\eta &= \omega_e \operatorname{sh}\alpha \sin\beta, \end{aligned} \tag{14}$$

egalități care pot fi interpretate ca funcții de transformare de la planul fictiv (fig. 3) la planul fizic (fig. 2). În particular, funcția de potențial φ se obține eliminînd variabila ψ din egalitățile (14), obținîndu-se relația implicită

$$\frac{\cos^2 \eta \operatorname{ch}^2 \xi}{\omega_e^2 \operatorname{ch}^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \eta \operatorname{sh}^2 \xi}{\omega_e^2 \operatorname{sh}^2 \alpha} = 1. \tag{15}$$

La mare distanță de linia de etanșare, liniile de potențial corespund curgerii uniforme, deci sînt drepte paralele cu linia ecranului. În acest caz, expresia analitică a funcției α trebuie să fie independentă de variabila η. Alegînd în particular $\eta = 0$, (12) devine :

$$\operatorname{ch} \frac{\pi x}{H} = \operatorname{ch} \frac{\pi \varphi}{Q} \cdot \cos \frac{\pi A}{H}, \tag{16}$$

iar funcția de potențial are expresia asimptotică

$$\varphi = \frac{Q}{\pi} \operatorname{arch} \frac{\operatorname{ch} \dfrac{\pi x}{H}}{\cos \dfrac{\pi A}{H}}, \tag{17}$$

Q reprezentînd debitul ce trece printr-o fantă cu înălțimea egală cu unitatea. Admițînd că pentru o lungime L de dig există L/H fante, iar q reprezintă debitul infiltrat pe unitatea de lungime a digului, rezultă egalitatea

$$q \cdot L = \frac{Q h_0 L}{H},$$

unde h_0 este adîncimea stratului permeabil.
Formula (17) se rescrie

$$\varphi = \frac{qH}{h_0} \operatorname{arch} \frac{\operatorname{ch} \dfrac{\pi x}{H}}{\cos \dfrac{\pi A}{H}}, \tag{18}$$

iar relația (4) devine :

$$\Delta h_L = \frac{2}{K} \varphi L = \frac{2qH}{\pi K h_0} \operatorname{arch} \frac{\operatorname{ch} \dfrac{\pi L}{H}}{\cos \dfrac{\pi A}{H}}, \tag{19}$$

iar debitul liniar de scăpări este :

$$q = \frac{\pi K h_0 \Delta h_L}{2H} \left(\operatorname{arch} \frac{\operatorname{ch} \dfrac{\pi L}{H}}{\cos \dfrac{\pi A}{H}} \right)^{-1}. \tag{20}$$

Alegînd valorile $H = 1{,}2$ m, $h_0 = 8$ m, $\Delta h_L = 12$ m, $L = 40$ m, $K = 1{,}15 \times \times 10^{-4}$ cm/s (nisip argilos), se obţine :

$$q = 1{,}379 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^3/sm}.$$

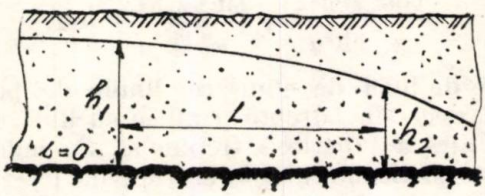


Fig. 6

Valoarea obţinută se poate compara cu debitul Dupuit [3] calculat în absenţa ecranului cu relaţia :

$$q_D = \frac{K}{2L}(h_1^2 - h_2^2), \tag{21}$$

unde h_1 şi h_2 sînt cotele suprafeţei libere faţă de planul impermeabil al rocii de bază (fig. 6). Pentru aceleaşi valori K, L şi $h_1 = 20$ m, $h_2 = 8$ m se obţine :

$$q_D = 2{,}415 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^3/sm}.$$

În relaţia (20), cînd A tinde spre zero (fantele cresc continuu), $\cos \pi A/H \to 1$ şi se poate scrie :

$$q = \frac{K\pi}{2}\frac{h_0}{H}\frac{\Delta h_{tot}}{\operatorname{arch}\left(\operatorname{ch}\dfrac{\pi L}{H}\right)} = \frac{Kh_0}{2L}\Delta h_{tot} \tag{22}$$

ce se poate compara cu debitul Darcy

$$q = vh_0 = K\frac{\Delta h}{\Delta x}h_0 = Kh_0\frac{\Delta h_{tot}}{2L}. \tag{23}$$

Pentru cazul fantelor mici în (20) $A \to H/2$, $\cos\dfrac{\pi A}{H} \to 0$, şi se poate scrie :

$$\operatorname{arch}\left(\frac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi L}{H}}{\cos\dfrac{\pi A}{H}}\right) \simeq -\ln\left(\frac{\cos\dfrac{\pi A}{H}}{2\operatorname{ch}\dfrac{\pi L}{H}}\right),$$

$$\cos\frac{\pi A}{H} = \cos\frac{\pi(H-B)}{2H} = \sin\frac{\pi B}{2H} \simeq \frac{\pi B}{2H}$$

și relația (20) devine :

$$q \simeq \frac{K\pi}{2}\frac{h_0}{H}\frac{\Delta h_{tot}}{\ln\left(\frac{4H}{\pi B}\operatorname{ch}\frac{\pi L}{H}\right)}. \tag{24}$$

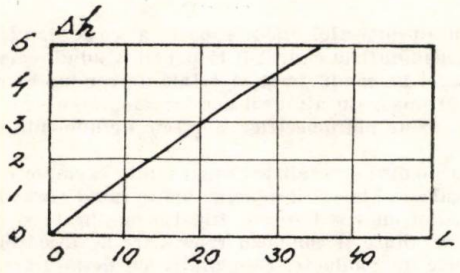


Fig. 7

Linia de depresie $\Delta h = f(x)$ raportată la cota liniei de etanșare corespunde egalității :

$$\Delta h = \frac{qH}{\pi K h_0}\operatorname{arch}\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi x}{H}}{\cos\frac{\pi A}{H}}\right) - C_0, \tag{25}$$

$$\text{unde } C_0 = \frac{qH}{\pi K h_0}\operatorname{arch}\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi A}{H}}\right) = \Delta h_{(x=0)}.$$

În figura 7 se reprezintă lina $h = f(x)$ pentru valorile parametrilor indicate în tabelul de mai jos.

x	0	5	10	15	20	25	30	35	40
h	−0,015	−0,817	−1,557	−2,297	−3,037	−3,778	−4,518	−5,258	−5,998
h	0	0,802	1,542	2,282	3,022	3,763	4,503	5,243	5,983

În cazurile practice este indicat ca lungimea L să fie aleasă corelat cu lățimea la bază a digului (ex. $2L = 80$ m).

Formula obținută reprezintă o relație de calcul utilă pentru estimarea debitului de scăpări printr-un ecran de etanșare cu fante verticale datorate tehnologiei de execuție. Evaluarea analitică a debitului de scăpări comparată cu măsurătorile concrete oferă posibilitatea de apreciere a calității execuției ecranului de etanșare.

Primit la redacție la 16 iunie 1986

BIBLIOGRAFIE

1. T. UDRESCU, M. VASILIU, *Modul de dimensionare a digurilor amenajărilor hidroenergetice de joasă cădere*, Simpozionul Diguri Hidrotehnice, București, 1981.
2. R. PRIȘCU, *Construcții hidrotehnice*, vol. I, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1983.
3. M. D. CERTOUSOV *Hidraulica*, Edit. Tehnică, București, 1966.

CALCULUL REGIMULUI TRANZITORIU AL APEI ÎN CONDUCTE ȘI REȚELE DE CONDUCTE SUB PRESIUNE. I

de I. JELEV

Institutul de Cercetări Hidrotehnice București

În lucrare se prezintă principalele modele matematice ce stau la baza programelor de calcul automat elaborate în cadrul ICH pentru studiul regimului nepermanent rapid variabil al apei în conducte și în rețele de conducte sub presiune de tip ramificat inelar sau mixt. Cu ajutorul acestor programe s-au studiat peste 150 stații de pompare, uzine hidroelectrice și rețele de alimentare cu apă și hidroameliorație.

În partea a doua a lucrării se analizează mai multe exemple de aplicare practică a programului de calcul al mișcării nepermanente rapid variabile a apei în rețele de conducte la studiul unor sisteme de irigație ramificate și inelare.

Se prezintă unele rezultate și concluzii referitoare la desfășurarea fenomenelor tranzitorii în rețelele de conducte, comparativ cu desfășurarea acestora în conductele unifilare.

1. INTRODUCERE

Studiul mișcării nepermanente a apei în conducte și rețele de conducte sub presiune a făcut obiectul unui număr mare de lucrări din literatura de specialitate [1] — [11]. Prima parte a lucrării reprezintă o sinteză a principalelor metode de calcul dezvoltate în ICH — București pentru studiul regimurilor tranzitorii ale apei, metode care stau la baza sistemului de programe de calcul al mișcărilor nepermanente sub presiune elaborate în institut.

Partea a doua a lucrării cuprinde unele dintre rezultatele obținute pentru mai multe rețele de conducte din sistemele de irigație studiate.

2. IPOTEZE ȘI NOTAȚII

Pentru exprimarea analitică și pentru integrarea numerică, în cuprinsul lucrării s-au utilizat următoarele ipoteze :

a) fluidul este considerat compresibil, iar conductele elastice și alcătuite din tronsoane având diametre și grosimi diferite;

b) presiunea în secțiunea de racord a conductei de refulare la rezervorul de refulare este constantă;

c) pierderile de sarcină longitudinale vor fi înlocuite cu pierderi de sarcină locale echivalente, concentrate în secțiunile de calcul de pe conducte, cu excepția nodurilor în care sînt racordate rezervoare de aer, castele de echilibru sau alte instalații sau dispozitive de protecție;

d) în punctele de ramificație a conductelor se folosește ecuația de continuitate și se ține seama de caracteristicile geometrice și elastice ale conductelor racordate în punctul respectiv;

e) convențional, debitul pompat se consideră pozitiv.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 46, NR. 1, 1987, P. 38—65

Pentru mărimile care intervin în lucrare s-au utilizat notațiile :

v_0 — viteza apei în conductă la momentul inițial, m/s ;

v — viteza apei în conductă la un moment oarecare, m/s ;

v_A, v_B, v_P — valoarea vitezei în punctele A, B, P, situate pe dreptele caracteristice (fig. 14) ;

u — viteza de propagare în apă a unei perturbații (undă gravitațională sau undă de presiune), m/s ;

g, γ, ρ — accelerația gravitației, m/s^2, greutatea specifică kgf/m^3, respectiv densitatea apei, kgf s^2/m^4 ;

$\varkappa$ — constanta adiabatică sau politropică ;

α — unghiul făcut de conductă cu planul orizontal ;

$i_0 = \sin\alpha$ — panta conductei ;

x — spațiul măsurat în lungul conductei, m ;

l_i, l — lungimea unui tronson curent i, respectiv a celui mai scurt tronson, m ;

Δx — distanța dintre două noduri consecutive de pe conductă, m ;

t — timpul în secunde ;

t_A, t_B, t_P — coordonata timp a punctelor A, B și P, situate pe dreptele caracteristice, s ;

Δt — timpul de parcurgere de către undă a celui mai scurt tronson, s ;

T — perioada oscilațiilor de presiune sau debit, s ;

p_a, p — presiunea atmosferică, respectiv presiunea în conductă, într-un punct și la un moment oarecare, kgf/m^2 ;

$p_{i,j}$ — presiunea în secțiunea i la momentul j, kgf/m^2 ;

$P_{i,j}$ — presiunea absolută a aerului din rezervorul i la momentul j, kgf/m^2 ;

$P_{i,0}$ — presiunea absolută a aerului din rezervorul i la momentul inițial, kgf/m^2 ;

Z_i, Z — cota conductei în secțiunea i, respectiv într-o secțiune curentă față de nivelul suprafeței libere a apei din bazinul de aspirație al stației de pompare, m ;

$z_{i,j}$ — cota apei în castelul de echilibru sau în rezervorul de aer din nodul i, față de axa conductei, m ;

$H_{i,j} = \frac{p_{i,j}}{\gamma} + Z_i$ — sarcina în nodul i, măsurată față de nivelul suprafeței libere a apei din bazinul de aspirație, m ;

H_A, H_B, H_P — sarcina în punctele A, B, P situate pe dreptele caracteristice (fig. 14), m ;

$h_{i,j} = \frac{p_{i,j}}{\gamma} = H_{i,j} - Z_i$ — înălțimea piezometrică în nodul i, m ;

$H'_{i,j}, H''_{i,j}$ — sarcina în imediata vecinătate la stînga, respectiv la dreapta secțiunii i, la momentul j, m ;

$H = f(Q)$ — caracteristica sarcină în funcție de debit a pompei ;

ω, n — viteza unghiulară, 1/s, respectiv turația pompei, rot/min;

J — momentul de inerție al ansamblului rotor motor electric-rotor pompă, kgf. m.s^2;

$Q_{i,j}$ — debitul în secțiunea i, la momentul j, m^3/s;

$Q'_{i,j}$, $Q''_{i,j}$ — debitul în imediata vecinătate la stînga, respectiv la dreapta secțiunii i, la momentul j, m^3/s;

$Q_{i,j,h}$ — debitul schimbat de rezervorul de aer i, la momentul j, cu conducta de refulare m^3/s;

$Q_{i,j,c}$ — debitul schimbat de castelul de echilibru i, la momentul j, cu conducta de refulare, m^3/s;

M_i — modulul de rezistență hidraulică al conductei de legătură a rezervorului de aer, a castelului de echilibru, sau a supapei de suprapresiune cu secțiunea i, a conductei de refulare, s^2/m^5;

M_c — modulul de rezistență hidraulică a clapetei, s^2/m^5;

J_c — momentul de inerție al clapetei pentru curgere inversă, kgf. m.s^2;

ω_c — viteza unghiulară de închidere a clapetei pentru curgere inversă, 1/s;

M_g, M_h — momentul forțelor de greutate și al forțelor hidrodinamice, în raport cu axa clapetei, kgf.m;

M_D — modulul de rezistență hidraulică al tronsonului i al conductei, s^2/m^5;

ε, E — coeficientul de elasticitate cubică al apei, respectiv al materialului din care este confecționată conducta de refulare, kgf/m^2;

e, D — grosimea peretelui conductei de refulare, respectiv diametrul acesteia, m;

$a = \dfrac{\sqrt{\varepsilon/\rho}}{\sqrt{1 + (\varepsilon D)/(Ee)}}$ — expresia celerității, m/s;

A — aria secțiunii transversale a conductei, constantă în lungul unui tronson, m^2;

A_{ci} — secțiunea transversală a castelului de echilibru din nodul i, m^2;

A_{hi} — secțiunea transversală a rezervorului de aer din nodul i, m^2;

V_i — volumul total al rezervorului de aer din secțiunea i, m^3;

$V_{i,j}$ — volumul pernei de aer din rezervorul i, la momentul j, m^3;

$m = \dfrac{a}{gA}$ — panta dreptei de lovitură de berbec, s/m^2;

I — panta hidraulică;

f — coeficientul Darcy-Weisbach;

$\tau_0 = \rho \dfrac{fv^2}{8}$ — efortul tangențial unitar, kgf/m^2;

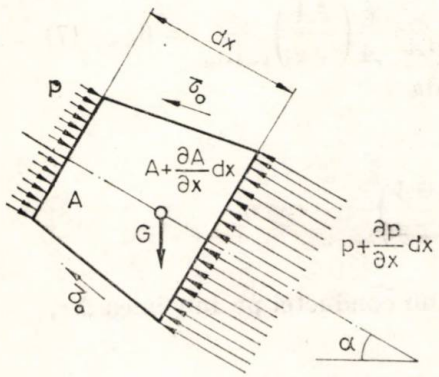
h_r — pierderea de sarcină uniform distribuită, concentrată într-o diafragmă fictivă, m.

3. ECUAȚIILE DE MIȘCARE

Ținînd seama de ipotezele făcute, pentru un tronson de conductă de lungime elementară Δx (fig. 1), din ecuația de echilibru a forțelor ce acționează asupra elementului de fluid din conducta respectivă obținem [1]:

$$pA+\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)\left(A+\frac{\partial A}{\partial x}\mathrm{d}x-A\right)-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\left(A+\frac{\partial A}{\partial x}\mathrm{d}x\right)+$$

$$+\gamma\sin\alpha\left(A+\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)\mathrm{d}x-\tau_0\,\pi D\,\mathrm{d}x=\rho\left(A+\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$



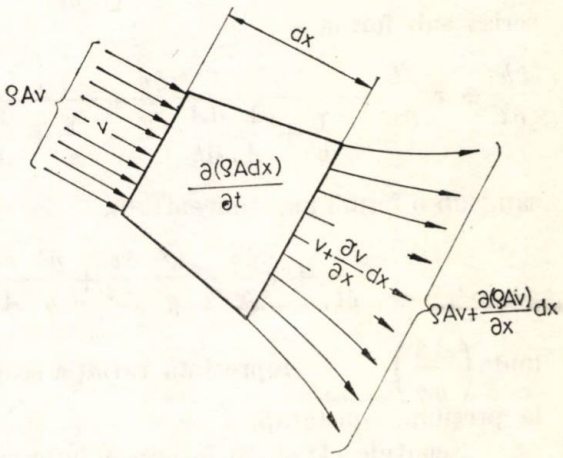


Fig. 1 și 2. — Schemă de calcu .

După efectuarea calculelor și simplificărilor, relația (1) capătă forma :

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{4\tau_0}{\rho D}-gi_0=0. \tag{2}$$

Întrucît $\tau=\rho\dfrac{fv^2}{8}$, ecuația (2) se mai poate scrie :

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+g\frac{\partial h}{\partial x}+g\frac{f}{2gD}v|v|-gi_0=0 \tag{3}$$

sau

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+g\frac{\partial h}{\partial x}+g(I-i_0)=0. \tag{4}$$

Ecuația de continuitate (fig. 2) sub forma ei generală este :

$$\rho Av-\left[\rho Av+\frac{\partial(\rho Av)}{\partial x}\mathrm{d}x\right]=\frac{\partial(\rho A\mathrm{d}x)}{\partial t}. \tag{5}$$

Împărțind toți termenii prin $\rho A dx$, relația (5) poate fi scrisă desfășurat :

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\frac{1}{A}\left[\frac{dA}{dt}-v\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{h=\text{const.}}\right]+\frac{\partial v}{\partial x}+$$

$$+\frac{v}{A}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{h=\text{const.}}+\frac{1}{dx}\frac{\partial(dx)}{\partial t}=0. \tag{6}$$

Ținînd seama de faptul că $\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=\frac{1}{\varepsilon}\frac{dp}{dt}$ și neglijînd deformațiile longitudinale ale conductei $\left[\frac{\partial(dx)}{\partial t}=0\right]$ și termenul $\frac{dt}{dx}$, (6) poate fi scrisă sub forma :

$$\frac{\partial h}{\partial t}+v\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{1}{\frac{\gamma}{\varepsilon}+\frac{1}{A}\frac{dA}{dh}}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\frac{\gamma}{\varepsilon}+\frac{1}{A}\frac{dA}{dh}}\frac{v}{A}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{h=\text{const.}}=0, \tag{7}$$

sau, sub o formă mai concentrată,

$$\frac{\partial h}{\partial t}+v\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{u^2}{g}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{u^2}{g}\frac{v}{A}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{h=\text{const.}}=0, \tag{8}$$

unde $\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{h=\text{const.}}$ reprezintă variația secțiunii conductei pe lungimea Δx, la presiune constantă.

Ecuațiile (4) și (8) formează împreună următorul sistem de ecuații cu derivate parțiale de tip hiperbolic :

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+g\frac{\partial h}{\partial x}+g(I-i_0)=0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+v\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{u^2}{g}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{u^2}{g}\frac{v}{A}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{h=\text{const.}}=0,$$

sistem ce descrie sub o formă generală mișcarea nepermanentă a apei(atît cu nivel liber, cît și sub presiune).

În (9) u reprezintă viteza de propagare a unei perturbații în apă (undă gravitațională la suprafața apei, pentru mișcarea cu nivel liber, sau undă de presiune în cazul mișcării sub presiune) avînd următoarea expresie :

$$u=\sqrt{(gA)/(\partial(\gamma A)/\partial p)}=\frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}}{\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{\gamma A}\frac{dA}{dh}}}. \tag{10}$$

În cazul mișcării sub presiune într-o conductă sau galerie circulară, termenul dA/dh are expresia :

$$\frac{dA}{dh} = \frac{\Delta R \pi D}{\Delta h} = \frac{\gamma \pi D^3}{4eE},$$

unde ΔR reprezintă creșterea razei galeriei la o creștere Δh a presiunii. Relația (10) devine :

$$u = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{E}\frac{D}{e}}} = a. \tag{11}$$

Pentru o galerie cu secțiune transversală de formă oarecare, celeritatea are valoarea :

$$a = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{E}\frac{\chi_0 R_{h0} B_{max}}{eA}}},$$

unde χ_0 este perimetrul udat al galeiri, R_{h0} — raza hidraulică, B_{max} — lățimea maximă a galeriei.

În condițiile mișcării nepermanente în canale sau galerii în care curgerea apei se produce cu nivel liber, există relația :

$$dA = B \cdot dh, \tag{12}$$

astfel încît expresia vitezei de propagare (10) devine :

$$u = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{\gamma}\frac{B}{A}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a_0^2} + \frac{B}{gA}}} \approx \sqrt{g\frac{A}{B}} = c, \tag{13}$$

unde B este lățimea galeriei la nivelul suprafeței libere a apei.

Ținînd seama de relațiile (9) și (11) și de faptul că

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x} + \sin\alpha, \tag{14}$$

ecuațiile ce descriu mișcarea nepermanentă a apei în conducte sau galerii cu secțiune constantă, sînt :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + g\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{f}{2D} v|v| = 0, \\ &\frac{\partial H}{\partial t} + v\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{a^2}{g}\frac{\partial v}{\partial x} + v\sin\alpha = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Sistemul de ecuaţii (15) este echivalent cu o ecuaţie diferenţială cu derivate parţiale de ordinul doi de tip hiperbolic.

4. REZOLVAREA ECUAŢIILOR DE MIŞCARE PRIN METODA CARACTERISTICILOR

Din punct de vedere matematic, o curbă caracteristică a ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul doi, reprezintă locul geometric al punctelor aflate pe suprafaţa integrală a ecuaţiei respective, pe care problema lui Cauchy este nedeterminată sau imposibilă. Cu alte cuvinte, planele tangente la suprafaţa integrală, în fiecare punct al acestor curbe, sînt nedeterminate. Pe suprafaţa integrală reprezentînd soluţia generală a ecuaţiei analizate se află o infinitate de curbe caracteristice, ale căror proiecţii în planul spaţiu-timp (în cazul în care ecuaţia descrie un fenomen fizic desfăşurat în timp şi spaţiu) se numesc caracteristici. O reprezentare geometrică a curbelor caracteristice este sugerată în figura 3. Soluţia generală a ecuaţiei cuprinde o infinitate de suprafeţe ce se intersectează în lungul curbelor caracteristice (în fig. 3 numărul suprafeţelor reprezentate este finit). În lungul fiecăreia dintre aceste curbe există o infinitate de plane tangente la suprafeţele respective. Pentru o anumită problemă cu condiţii iniţiale şi la limită precizate, una dintre suprafeţe (de exemplu cea haşurată) reprezintă soluţia particulară căutată. Se observă că în cazul acestei soluţii particulare, noţiunea de curbă caracteristică nu are o interpretare geometrică evidentă, întrucît planul tangent este unic determinat în lungul

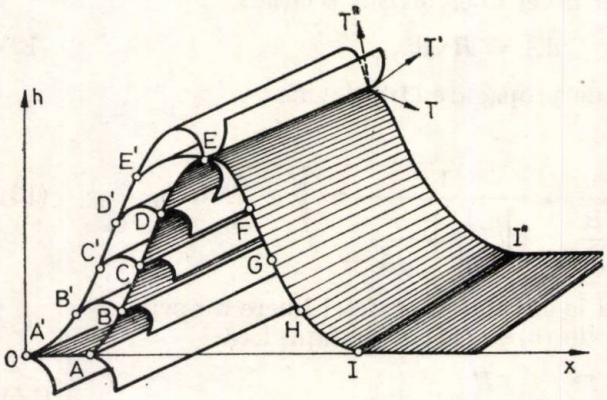


Fig. 3. — Reprezentarea geometrică a unei suprafeţe integrale şi a curbelor caracteristice.

curbelor caracteristice, cu excepţia celor ce trec prin punctele A şi I. Pentru suprafaţa integrală reprezentată în figura 3, cele două curbe caracteristice se identifică cu caracteristicile şi reprezintă din punct de vedere fizic, locul geometric în planul spaţiu-timp al frontului iniţial, respectiv final al unei unde ce se propagă în direcţia Ox.

În cazul ecuaţiilor cu derivate parţiale de tip hiperbolic (ecuaţii ce descriu şi fenomenul de lovitură de berbec), există două familii de curbe caracteristice, corespunzătoare propagării unei perturbaţii în ambele sensuri ale coloanei lichide din interiorul unei conducte sub presiune.

În cazul în care condițiile inițiale și la limită sînt precizate (curbele $OABC$ din fig. 4, respectiv $h(O, t)$ și $h(l, t)$ din figura de detaliu 5) cele două familii de curbe caracteristice determină univoc suprafața integrală particulară căutată (fig. 4). Într-adevăr, prin punctul A trece o curbă caracteristică directă, iar prin punctul B o curbă caracteristică inversă. Cele două

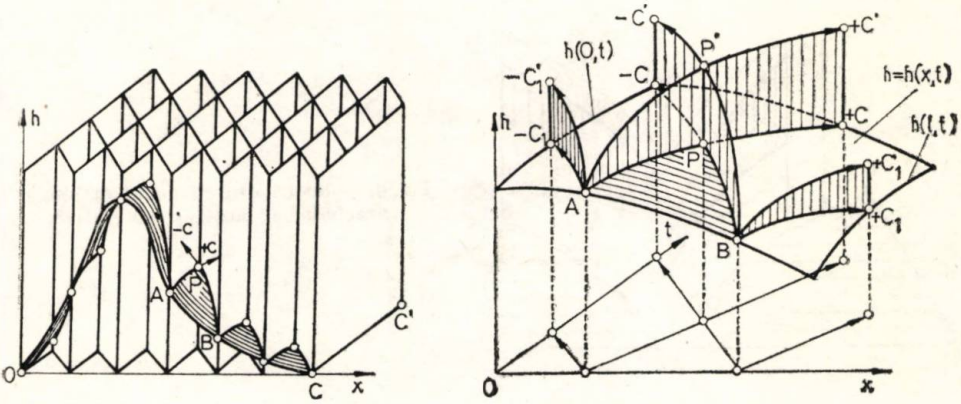


Fig. 4 și 5.— Construcția suprafeței integrale cu ajutorul curbelor caracteristice (ansamblu și detaliu).

curbe se intersectează în punctul P delimitînd elementul de suprafață ABP. Soluția căutată este suprafața determinată de triunghiul curbiliniu ABP deoarece dintre toate curbele caracteristice ce trec prin punctele A și B numai curbele caracteristice $+C$ și $-C$ intersectează și curbele $h(O, t)$ și $h(l, t)$.

Procedînd astfel din aproape în aproape pentru toate punctele situate pe curba $OABC$ (fig. 4), se poate determina suprafața integrală căutată. Integrarea ecuațiilor de mișcare (15) prin metoda caracteristicilor se bazează pe relația de invarianță existentă între parametrii necunoscuți (viteze și presiuni) în lungul fiecărei curbe caracteristice directe și inverse (fig. 6). În punctele de intersecție ale acestora sînt satisfăcute simultan ambele relații de invarianță fapt ce permite determinarea celor două mărimi necunoscute.

Figurile 7—12 cuprind mai multe reprezentări grafice ale unor soluții particulare ale ecuațiilor de tip hiperbolic, ce descriu fenomene fizice diferite. În figurile 7 și 8 se reprezintă suprafețele integrale ale ecuațiilor de propagare a unor suprapresiuni și depresiuni în lungul unei conducte, ca urmare a închiderii instantanee a unei vane (cu neglijarea pierderilor de sarcină) și în cazul practic al închiderii vanei într-un anumit interval de timp, ținînd seama și de pierderile de sarcină. În figura 9 suprafața integrală reprezintă variația cotelor suprafeței libere a apei în timp și spațiu ca urmare a propagării unei viituri pe un iu sau canal, iar în figura 10, cota suprafeței libere a apei în funcție de timp și spațiu, pentru o undă cu front dreptunghiular, ce se propagă într-un canal închis, cu reflectarea undei la cele două capete ale canalului. În figurile 11 și 12 se reprezintă domeniul perturbat de o sursă sonoră ce se deplasează în aer cu o viteză supersonică, respectiv suprafețele palelor unei turbine. Aceste

ultime două exemple, împreună cu cele anterioare, demonstrează varietatea fenomenelor fizice descrise de un același tip de ecuații matematice și pun în evidență semnificația geometrică și fizică a curbelor caracteristice și a caracteristicilor ca fiind frontiere între domeniul perturbat și domeniul neperturbat al unei mișcări sau suprafețe geometrice.

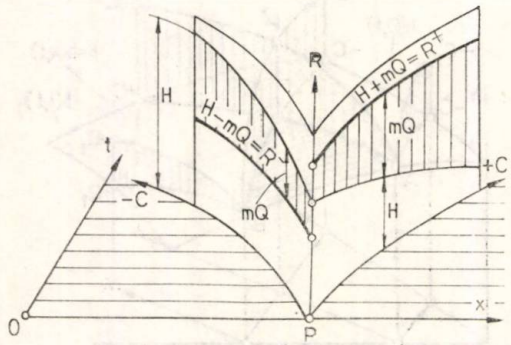


Fig. 6. — Invarianții Riemann în lungul caracteristicii pozitive și negative.

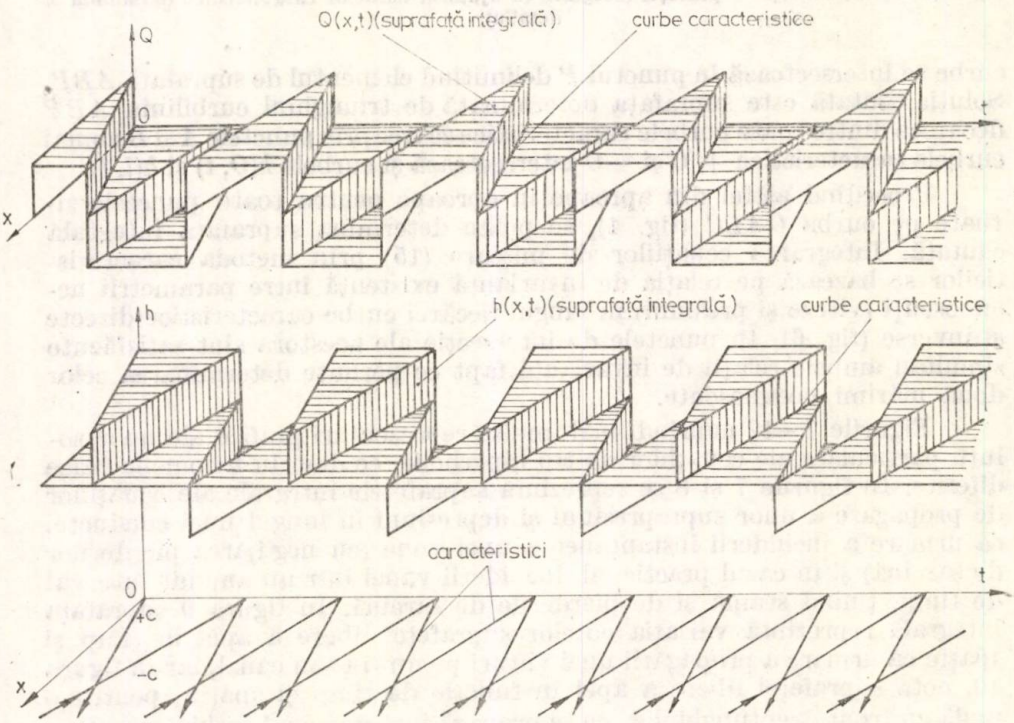


Fig. 7. — Variația debitelor și presiunilor în funcție de spațiu și timp (închiderea instantanee a vanei la capătul unei conducte alimentată de la un rezervor cu nivel constant).

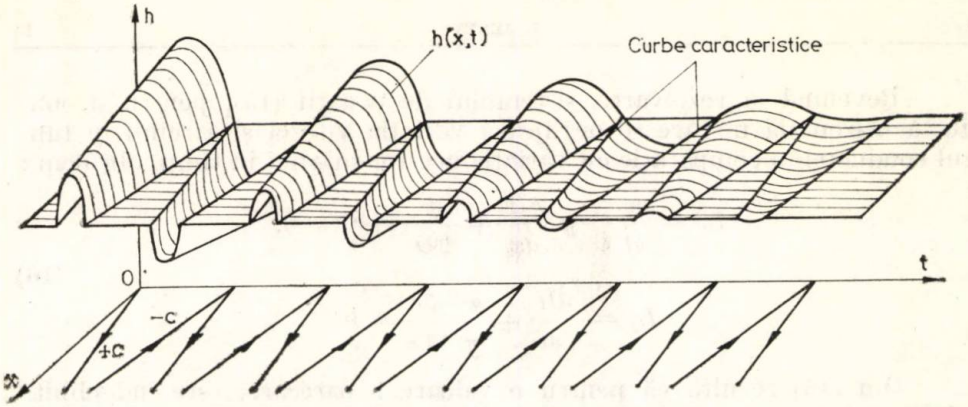


Fig. 8. — **Variaţia presiunilor în funcţie de spaţiu şi timp (închiderea lentă a vanei, cu luarea în consideraţie a pierderilor de sarcină).**

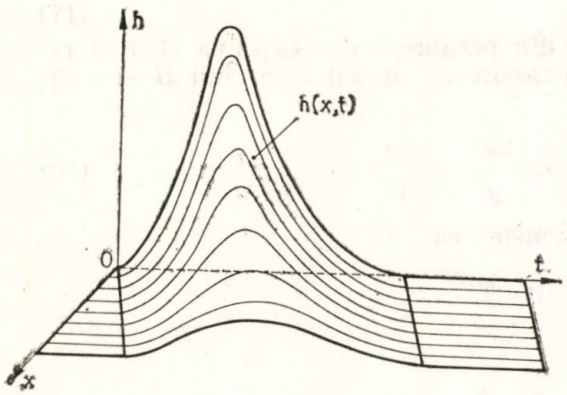


Fig. 9. — **Variaţia adîncimii apei în funcţie de spaţiu şi timp la propagarea unei viituri în lungul unui canal cu nivel liber.**

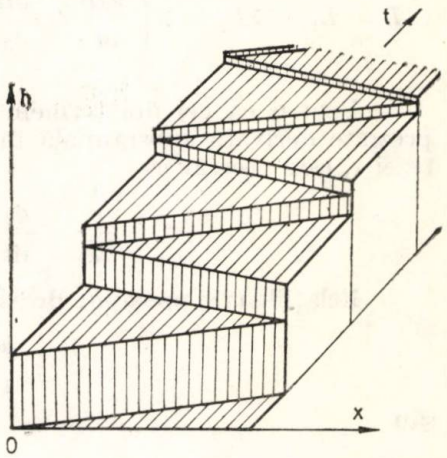
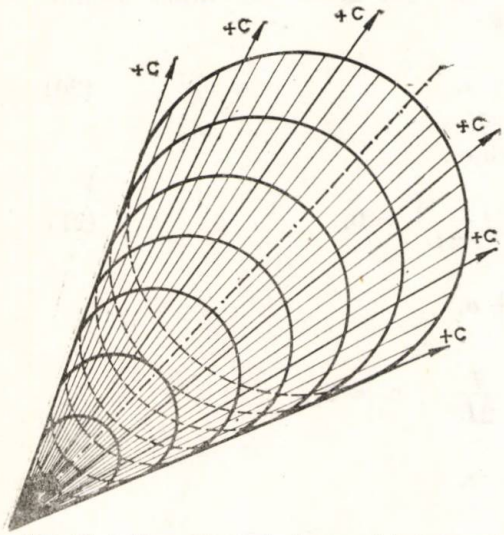


Fig. 10. — **Variaţia adîncimii apei într-un bazin închis, la o creştere instantanee a debitului.**



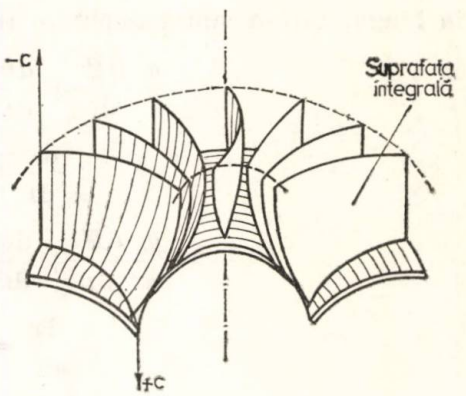


Fig. 11 şi 12. — **Exemple de suprafeţe integrale în cazul unei surse sonore** ce se deplasează **prin** aer cu viteză **supersonică**, respectiv pentru **rotorul unei turbine** hidraulice.

Revenind la rezolvarea sistemului de ecuații (15), pentru o conductă orizontală în care se neglijează variația vitezei și sarcinii în lungul conductei în comparație cu variația acestor mărimi în timp, obținem :

$$L_1 = \frac{\partial v}{\partial t} + g\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{f}{2D} v|v| = 0,$$

$$L_2 = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g}\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{16}$$

Din (16) rezultă că pentru o valoare λ oarecare, este îndeplinită relația [1] :

$$L = L_1 + \lambda L_2 = \lambda\left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x}\frac{g}{\lambda}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\lambda a^2}{g} + \frac{\partial v}{\partial t}\right) + \frac{f}{2D} v|v| = 0. \tag{17}$$

Pentru ca cei doi termeni din paranteză din expresia (17) să reprezinte derivata substanțială în raport cu timpul a sarcinii H și a vitezei v, este necesar ca

$$\frac{g}{\lambda} = \frac{dx}{dt}, \quad \frac{\lambda a^2}{g} = \frac{dx}{dt}. \tag{18}$$

Relațiile (18) presupun de asemenea ca

$$\frac{g}{\lambda} = \frac{\lambda a^2}{g}$$

sau

$$\lambda = \pm\frac{g}{a}. \tag{19}$$

Rezultă că există două caracteristici (în acest caz două familii de drepte caracteristice) avînd ecuațiile

$$\frac{dx}{dt} = \pm a, \tag{20}$$

în lungul cărora sînt îndeplinite relațiile :

$$\frac{g}{a}\frac{dH}{dt} + \frac{dv}{dt} + f\frac{v|v|}{2D} = 0, \tag{21}$$

$$\frac{dx}{dt} = +a,$$

$$-\frac{g}{a}\frac{dH}{dt} + \frac{dv}{dt} + \frac{f}{2D} v|v| = 0,$$

$$\frac{dx}{dt} = -a. \tag{22}$$

Din punct de vedere fizic, în cazul fenomenului de lovitură de berbec, curbele caracteristice reprezintă poziția în planul spațiu-timp a frontului unei unde de perturbație pornită dintr-un punct P al conductei sub presiune și care se propagă în ambele direcții cu viteza $\pm a$ (fig. 13).

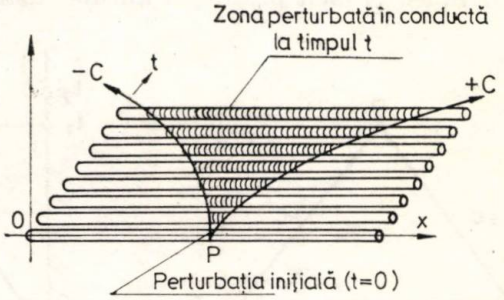


Fig. 13 — Propagarea în lungul unei conducte cu apă, a unei perturbații produse în punctul P. Caracteristicile-frontiere ale zonei perturbate.

Scriind în diferențe finite ecuațiile (21) și (22), obținem (fig. 14):

$$v_B - v_A + \frac{g}{a}(H_P - H_A) + \frac{f}{2D} v_A|v_A|(t_P - t_A) = 0,$$

$$x_P - x_A = a(t_P - t_A), \tag{23}$$

$$v_P - v_B - \frac{g}{a}(H_P - H_B) + \frac{f}{2D} v_B|v_B| (t_P - t_B) = 0,$$

$$x_P - x_B = -a(t_P - t_A). \tag{24}$$

Primele ecuații (23) și (24) mai pot fi scrise :

$$H_P - H_A + \left(\frac{f}{2gD}\Delta x\right) v_A|v_A| = -\frac{a}{gA}(Q_P - Q_A),$$

$$H_P - H_B - \left(\frac{f}{2gD}\Delta x\right) v_B|v_B| = \frac{a}{gA}(Q_P - Q_B). \tag{25}$$

Notînd

$$H'_P = H_P + \left(\frac{f}{2gD}\Delta x\right) v_A|v_A|,$$

$$H''_P = H_P - \left(\frac{f}{2gD}\Delta x\right) v_B|v_B|, \tag{26}$$

sistemul (25) devine :

$$H'_P - H_A = -m(Q_P - Q_A),$$

$$H''_P - H_B = m(Q_P - Q_B), \tag{27}$$

$$H'_P = H''_P + \frac{f}{2gD}\Delta x\, v_A|v_A| + \frac{f}{2gD}\Delta x\, v_B|v_B|.$$

Relațiile (27) sînt valabile numai în lungul curbelor caracteristice pozitive, respectiv negative.

Din punct de vedere fizic pierderea de sarcină uniform distribuită între punctele A și B apare ca o pierdere de sarcină locală concentrată în punctul P, astfel încît presiunea imediat înainte de punctul P (punctul

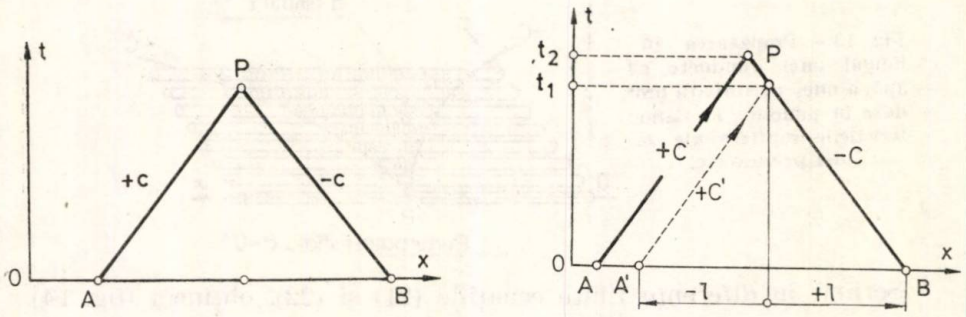


Fig. 14 și 15. — Schema geometrică pentru calculul intersecției a două caracteristici, respectiv pentru interpolarea acestora.

P') diferă de presiunea imediat după punctul P (punctul P'') cu o valoare egală cu pierderea de sarcină longitudinală între punctele A și B (ca și cum în punctul P se află o diafragmă).

Împărțind conductele în N tronsoane, și notînd un punct curent cu indicele i, la un moment j și considerînd un nod fără pierdere de sarcină concentrată, relațiile (27) devin :

$$H_{i,j} - H_{i+1,j-1} = m_i(Q_{i,j} - Q_{i+1,j-1}),$$
$$H_{i,j} - H_{i-1,j-1} = -m_{i-1}(Q_{i,j} - Q_{i-1,j-1}). \tag{28}$$

Ținînd seama de lungimea variabilă a tronsoanelor, calculul valorilor presiunilor și debitelor într-un punct i, la momentul j, se face determinîndu-se prin interpolare valorile debitelor și presiunilor la timpul $j-1$, în două puncte situate la distanța l înainte și după nodul i (fig. 15) :

$$H_{+l,j-1} = H''_{i,j-1} - \frac{l}{l_i}(H''_{i,j-1} - H'_{i+1,j-1}),$$
$$Q_{+l,j-1} = Q''_{i,j-1} - \frac{l}{l_i}(Q''_{i,j-1} - Q'_{i+1,j-1}),$$
$$H_{-l,j-1} = H'_{i,j-1} - \frac{l}{l_{i-1}}(H'_{i,j-1} - H''_{i-1,j-1}), \tag{29}$$
$$Q_{-l,j-1} = Q'_{i,j-1} - \frac{l}{l_{i-1}}(Q_{i,j-1} - Q''_{i-1,j-1}).$$

Introducînd expresiile (29) în ecuațiile (28) rezultă :

$$H''_{i,j} - m_i Q''_{i,j} - H''_{i,j-1} - m_i Q''_{i,j-1} - \frac{l}{l_i}[H''_{i,j-1} - m_i Q''_{i,j-1} - (H'_{i+1,j-1} - m_i Q'_{i+1,j-1})], \quad (30)$$

$$H'_{i,j} + m_{i-1} Q'_{i,j} = H'_{i,j-1} + m_{i-1} Q'_{i,j-1} - \frac{l}{l_i}[H'_{i,j-1} + m_{i-1} Q'_{i,j-1} - (H''_{i-1,j-1} + m_{i-1} Q''_{i-1,j-1})].$$

Întrucît toți termenii din membrul drept al expresiilor (30) se referă la timpul anterior de calcul, valoarea acestora este cunoscută. Relațiile (30) pot fi scrise :

$$H''_{i,j} - m_i Q''_{i,j} = D_{i,j}\,;\; H'_{i,j} + m_{i-1} Q'_{i,j} = S_{i,j}, \quad (31)$$

unde $D_{i,j}$ și $S_{i,j}$ reprezintă constante cunoscute. În lungul a două curbe caracteristice suma $H'_{i,j} + m_{i-1} Q'_{i,j}$, respectiv diferența $H''_{i,j} - m_i Q''_{i,j}$ sînt constante (fig. 6), și reprezintă invarianții Riemann pentru ecuația studiată.

5. CONDIȚII INIȚIALE ȘI LA LIMITĂ

Pentru calculul valorilor presiunilor și debitelor în regim nepermanent, trebuie cunoscute condițiile inițiale și la limită. Cunoașterea condițiilor inițiale presupune calculul parametrilor mișcării în regim permanent, înainte de începerea fenomenului tranzitoriu.

În cadrul programelor „HAMMER" și „SOHIC-JZ", pentru studiul regimului tranzitoriu în conductele unifilare, calculul regimului permanent al apei se face în funcție de condițiile fizice și geometrice ale instalației. Programul „REȚEA" pentru calculul mișcării nepermanente a apei în rețele de conducte sub presiune permite determinarea regimului inițial pe două căi distincte. O primă cale este aceea în care regimul permanent de curgere a apei în rețea este presupus cunoscut. A doua cale este aceea în care programul își calculează singur situația de regim prin „stabilizarea" unui regim inițial dat arbitrar.

Condițiile la limită sînt concretizate fizic de prezența în rețea sau la capetele acesteia a unor instalații, dispozitive și armături, iar matematic prin curbele și ecuațiile caracteristice acestor instalații și dispozitive.

Prin completarea ecuațiilor (31) cu aceste relații caracteristice pot fi determinate în cadrul programului „REȚEA" mărimile necunoscute pentru următoarele tipuri de noduri întîlnite în rețelele de conducte sub presiune :

- nod simplu (nod aflat într-un punct curent al conductei) ;
- nod cu diafragmă (nod în care sînt concentrate pierderile de sarcină) ;
- nod cu pompă situat în imediata apropiere a bazinului de aspirație ;

— nod cu pompă situat pe parcursul conductelor rețelei*);
— nod cu pompă cu lege de pornire sau oprire dată;
— nod cu rezervor de aer;
— nod cu castel de echilibru;
— nod cu ramificație (situat la intersecția a doua sau mai multe conducte)*);
— nod aparent (pentru rețele inelare și mixte)*);
— nod cu vană pe parcursul conductelor*);
— nod cu hidrant de capăt sau pe parcurs*);
— nod cu supapă de suprapresiune*);
— nod cu hidrant cu închidere la lipsă de presiune (tip FLONIC) situat pe parcursul sau la capătul unor tronsoane de conductă*);
— nod cu hidrant și supapă de suprapresiune situat la capătul unor conducte*);
— nod cu supapă de aerisire-dezaerisire;
— nod cu bazin de refulare cu nivel constant;
— nod cu bazin de aspirație cu nivel constant*);
— nod în care s-a produs cavitația.

În continuare se prezintă ecuațiile de mișcare pentru fiecare din tipurile de noduri enumerate mai sus și o interpretare geometrică sugestivă pentru alegerea algoritmului de rezolvare a acestor ecuații.

Nod simplu. Într-un punct oarecare de pe conductele rețelei, ecuațiile de mișcare sînt cele descrise de relațiile (31), la care se adaugă ecuația de continuitate în nod:

$$H''_{i,j} - m_i Q''_{i,j} = D_{i,j}; \quad H'_{i,j} + m_{i-1} Q'_{i,j} = S_{i,j},$$
$$H'_{i,j} = H''_{i,j} = H_{i,j}; \quad Q'_{i,j} = Q''_{i,j} = Q_{i,j}. \tag{32}$$

Din punct de vedere geometric ecuațiile (32) reprezintă două drepte, a căror soluție se află în punctul de intersecție a acestora (fig. 16).

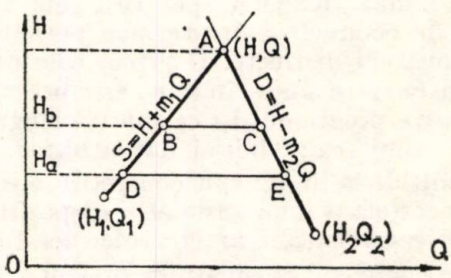


Fig. 16. — Schema de calcul pentru un nod obișnuit.

Soluția sistemului (32) poate fi obținută fie analitic, fie propunînd două valori H_a și H_b, astfel încît din asemănarea triunhiurilor ABC și ADE să se obțină coordonatele H și Q ale punctului A.

Nod cu diafragmă. Nodul cu diafragmă este un nod în care s-a înlocuit o pierdere de sarcină uniform distribuită în lungul unui tronson, cu o pierdere de sarcină locală concentrată într-o diafragmă fictivă. Avînd

*) Noduri caracteristice numai pentru programul „REȚEA".

în vedere ipoteza c, între sarcina $H_{i,j}$ și debitul $Q_{i,j}$, înainte și după secțiunea considerată, există relațiile :

$$H''_{i,j} - m_i Q''_{i,j} = D_{i,j}; \quad H'_{i,j} + m_{i-1} Q'_{i,j} = S_{i,j},$$

$$H'_{i,j} = H''_{i,j} - M_D \cdot Q'_{i,j} | Q'_{i,j} |; \quad Q'_{i,j} = Q''_{i,j} = Q_{i,j}. \tag{33}$$

Din figura 17 se observă că soluția sistemului (33) se deplasează din punctul A în punctul B. Segmentul BC este egal cu pierderea de sarcină $h_r = M_D \cdot Q_{i,j} | Q_{i,j} |$, pentru debitul corespunzător punctului B.

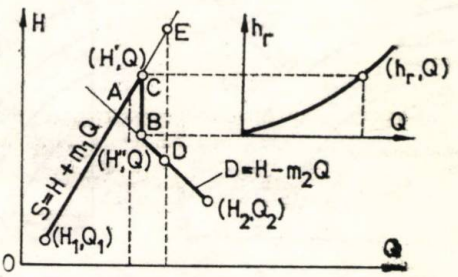


Fig. 17. — Schema de calcul pentru un nod cu diafragmă.

Propunînd două valori arbitrare diferite pentru debitul Q, din asemănarea triunghiurilor ABC și ADE se obține soluția sistemului (33).

În lucrarea [14] se prezintă o formulă care reproduce mult mai exact fenomenul de amortizare a oscilațiilor în cazul unui lichid compresibil și anume :

$$h_r = K \cdot \Delta H_{i,j-\frac{T}{4}} | \Delta H_{i,j-\frac{T}{4}} |,$$

unde K este un coeficient ce depinde de natura lichidului și materialului din care este confecționată conducta, iar $\Delta H_{i,j-\frac{T}{4}}$ reprezintă suprapresiunea măsurată față de presiunea de regim la timpul $t = j - \frac{T}{4}$

Nod cu pompă situat în imediata apropiere a bazinului de aspirație. În cazul în care se neglijează prezența clapetei pentru curgere inversă, ecuațiile de mișcare sînt :

$$H''_{i,j} - m_i Q''_{i,j} = D_{i,j}, \quad H'_{i,j}(\omega) = f[Q'_{i,j}(\omega)],$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = -9{,}81 \frac{Q''_{i,j} H''_{i,j}}{\eta}, \quad H'_{i,j} = H''_{i,j} = H_{i,j}, \quad Q'_{i,j} = Q''_{i,j} = Q_{i,j}, \tag{34}$$

unde η reprezintă randamentul pompei.

În nodul cu pompă, între presiune și debit există o legătură dată de curba caracteristică a pompei. Această curbă este variabilă, în funcție de turația pompei. În cazul în care se ține seama și de prezența clapetei sau a unei vane cu închidere programată, ecuațiile (34) rămîn nemodificate cu excepția ecuației a patra, care devine :

$$H''_{i,j} = H'_{i,j} - M_e(t) \cdot Q'_{i,j} | Q'_{i,j} |. \tag{35}$$

În cazul vanei cu închidere programată, M_c variază în timp după o lege dată, în timp ce pentru nodul cu pompă prevăzut cu clapetă pentru curgere inversă M_c rezultă ca urmare a integrării sistemului (34) completat cu ecuația de echilibru hidrodinamic a clapetei pentru curgere inversă :

$$J_c \frac{d\omega_c}{dt} = M_g - M_h. \tag{35'}$$

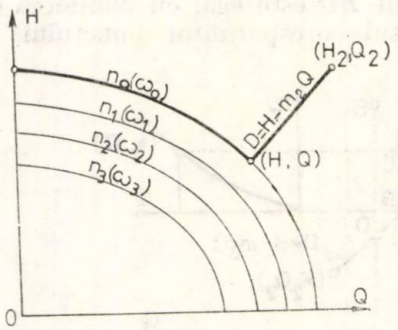


Fig. 18. — Schema de calcul pentru un nod cu pompă.

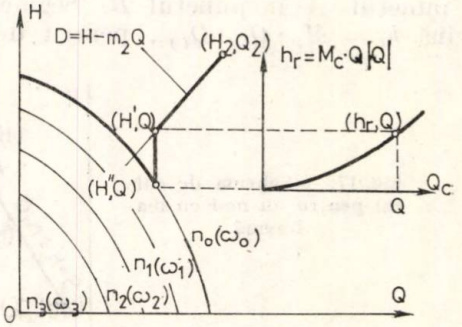


Fig. 19. — Schema de calcul pentru un nod cu pompă și clapetă pentru curgere inversă.

În figurile 18 și 19 se reprezintă grafic ecuațiile pentru nodul cu pompă în absența clapetei pentru curgere inversă, și în prezența clapetei sau a vanei programate.

Nod cu pompă pe parcurs. În cazul unor conducte de aspirație lungi sau a unor rețele de conducte cu stații de pompare pe parcurs, este necesară introducerea unui nod cu pompă pe parcurs. Ecuațiile de mișcare sînt :

$$H'_{i,j} + m_{i-1}Q'_{i,j} = S_{i,j}\,; \quad H''_{i,j} - m_i Q''_{i,j} = D_{i,j},$$

$$H''_{i,j} - H'_{i,j} = f[Q'_{i,j}(\omega)]\,; \quad Q'_{i,j} = Q''_{i,j} = Q_{i,j}, \tag{36}$$

$$J\frac{d\omega}{dt} = M_M - 9{,}81\,\frac{H''_{i,j}Q''_{i,j}}{\eta}.$$

În figura 20 apare interpretarea grafică a sistemului de ecuații (36). În cazul în care pe refularea pompelor sînt montate clapete pentru curgere inversă, la ecuațiile (36) se adaugă ecuația (35) sau (35') (fig. 21).

Nod cu lege dată de pornire sau oprire a pompelor. Programul „RETEA" are posibilitatea folosirii unui nod cu pompă în care variația curbei caracteristice a pompei se face conform unei legi dorite de variație în timp a presiunilor și debitelor nominale. Se pot simula astfel un număr variat de manevre la stația de pompare, inclusiv funcționarea acesteia în regim permanent pe toată perioada efectuării unor manevre la hidranții sau vanele din rețea. Ecuațiile de mișcare sînt :

$$H''_{i,j} - m_i Q''_{i,j} = D_{i,j}\,; \quad H'_{i,j}(t) = f[Q'_{i,j}(t)],$$

$$H'_{i,j}(t) = F_1(t); \quad Q'_{i,j}(t) = F_2(t), \tag{37}$$

$$H'_{i,j}(t) = H''_{i,j}(t) = F_1(t); \quad Q'_{i,j}(t) = Q''_{i,j}(t) = F_2(t),$$

unde $F_1(t)$ și $F_2(t)$ sînt funcții cunoscute de timp.

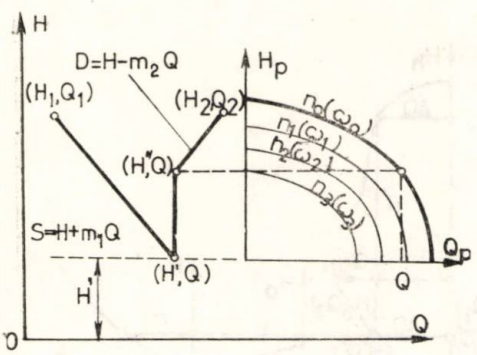


Fig. 20. — Schema de calcul pentru un nod cu pompă situat pe parcursul conductelor.

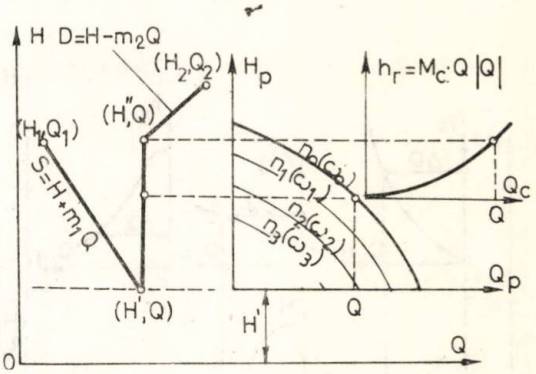


Fig. 21. — Schema de calcul pentru un nod cu pompă și clapetă situat pe parcursul conductelor.

Nod cu rezervor de aer. Considerînd o evoluție adiabatică a pernei de aer din rezervor, ecuațiile de mișcare sînt următoarele:

$$H''_{i,j} - m_i Q''_{i,j} = D_{i,j}; \quad H'_{i,j} + m_{i-1} Q'_{i,j} = S_{i,j},$$

$$P_{i,j} V^{\varkappa}_{i,j} = P_{i,0} V^{\varkappa}_{i,0}; \quad Q_{i,j,h} = \frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\Delta t} = \frac{A_{h,i}(z_{i,j} - z_{j,j-1})}{\Delta t},$$

$$Q''_{i,j} = Q'_{i,j} + Q_{i,j,h}; \quad H'_{i,j} = H''_{i,j} = H_{i,j}, \tag{38}$$

$$\frac{p_{i,j}}{\gamma} = H_{i,j} - z_{i,j} - Z_i + M_{i,h} Q_{i,j,h} | Q_{i,j,h} | + \frac{p_a}{\gamma}.$$

În figura 22*a*, se reprezintă grafic relațiile (38).

Variația sarcinii $H = H_{i,j}$ în funcție de $Q_{i,j,h}$ se obține după ce în prealabil se determină variația în funcție de $Q_{i,j,h}$ a cotei apei $z_{i,j}$, a presiunii absolute a pernei de aer $P_{i,j} = \gamma h_{aer}$ și a pierderii de sarcină în racordul rezervorului de aer cu conducta $h_{rh} = M_{ih} \cdot Q_{i,j,h} \cdot | Q_{i,j,h} |$.

Figura 22 *b* corespunde situației în care rezervorul de aer este amplasat în imediata vecinătate a pompelor, formînd astfel un singur nod de calcul cu pompă și rezervor de aer. Ecuațiile caracteristice acestui tip de nod sînt:

$$H''_{i,j} - m_i Q''_{i,j} = D_{i,j}; \quad H'_{i,j} + m_{i-1} Q'_{i,j} = S_{i,j},$$

$$H''_{i,j} - H'_{i,j} = f[Q'_{i,j}(\omega)] - M_c(t) \cdot Q'_{i,j} | Q'_{i,j} |,$$

$$J \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -9{,}81 \frac{Q'_{i,j} \cdot H'_{i,j}}{\eta}; \quad P_{i,j} \cdot V^{\varkappa}_{i,j} = P_{i,0} \cdot V^{\varkappa}_{i,0}, \tag{38'}$$

$$Q_{i,j,h} = \frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\Delta t} = \frac{A_{hi}(z_{i,j} - z_{i,j-1})}{\Delta t},$$

$$Q''_{i,j} = Q'_{i,j} + Q_{i,j,h}$$

$$\frac{p_{i,j}}{\gamma} = H''_{i,j} - z_{i,j} - Z_i + M_{i,h} \cdot Q_{i,j,h} | Q_{i,j,h} | + \frac{pa}{\gamma}$$

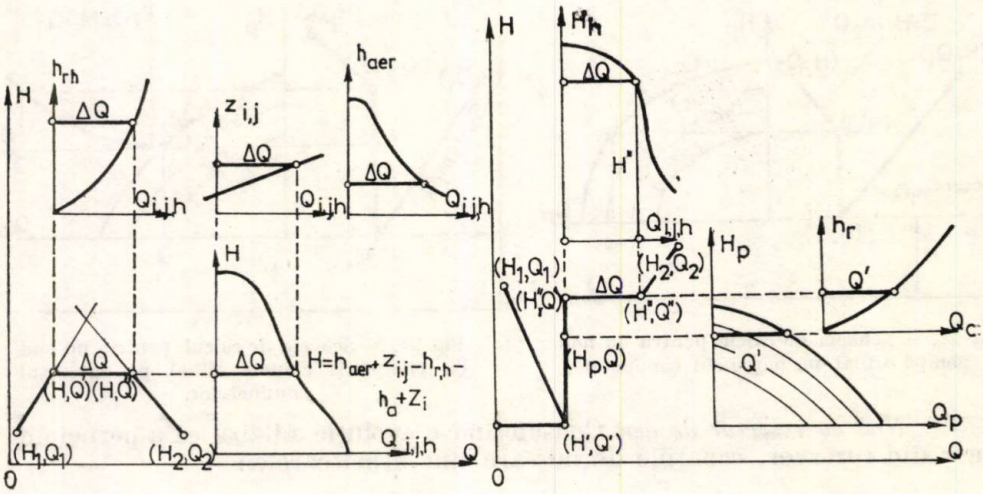


Fig. 22. — Nod cu rezervor de aer, respectiv rezervor de aer şi pompă.

Nod cu castel de echilibru. Castelul de echilibru reprezintă un mijloc eficace de protecţie, ce transformă mişcarea rapid variabilă într-o mişcare lentă, oscilatorie. Debitul şi presiunea se determină prin rezolvarea următorului sistem de ecuaţii :

$$H'_{i,j} + m_{i-1}Q'_{i,j} = S_{i,j}; \quad H''_{i,j} - m_i Q''_{i,j} = D_{i,j},$$

$$Q''_{i,j} = Q'_{i,j} + Q_{i,j,c}; \quad H'_{i,j} = H''_{i,j} = H_{i,j} = \frac{p_{i,j}}{\gamma} + Z_i,$$

$$\frac{p_{i,j}}{\gamma} = z_{i,j} - Z_i - M_{i,c}Q_{i,j,c} | Q_{i,j,c} |, \tag{39}$$

$$Q_{i,j,c} = \frac{A_{ci}(H_{i,j} - H_{i,j-1})}{\Delta t} = \frac{A_{ci}(z_{i,j} - z_{i,j-1})}{\Delta t}$$

În figura 23 se reprezintă grafic relaţiile (39), unde curba $H = p_{i,j}/\gamma + Z_i$ se determină în funcţie de debitul intrat sau ieşit din castel ($Q_{i,j,c} = \Delta Q$), scăzînd pierderea de sarcină în conducta de racord castel de echilibru — conducta de refulare ($h_{rc} = M_{i,c} Q_{i,j,c} | Q_{i,j,c} |$), din cota apei în castelul de echilibru ($z_{i,j}$).

Nod cu ramificaţie. Nodul cu ramificaţie (fig. 24) este specific pentru calculul mişcării nepermanente în reţele de conducte sub presiune. Ecua-

țiile de mișcare sînt :

$$H'_{i,j} + m_{i-1}Q'_{i,j} = S_{i,j}; \quad H^{(k)}_{i,j} - m^{(k)}_{i}Q^{(k)}_{i,j} = D^{(k)}_{i,j} \quad (k = 1, \ldots, N), \tag{40}$$

$$H'_{i,j} = H^{(1)}_{i,j} = H^{(2)}_{i,j} = \ldots = H^{(N)}_{i,j} = H_{i,j}; \quad Q'_{i,j} = \sum_{k=1}^{N} Q^{(k)}_{i,j}.$$

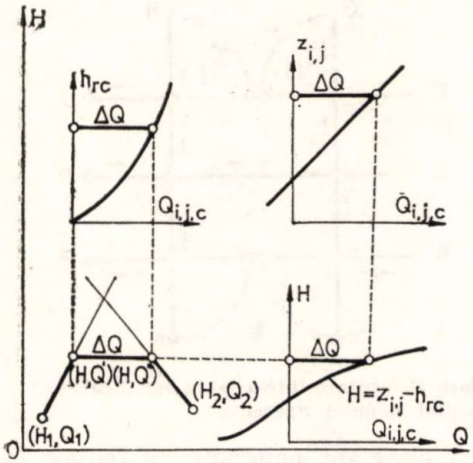


Fig. 23. — Nod cu castel de echilibru.

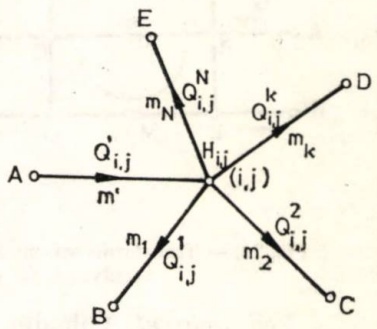


Fig. 24. — Schema unui nod cu ramificație de conducte.

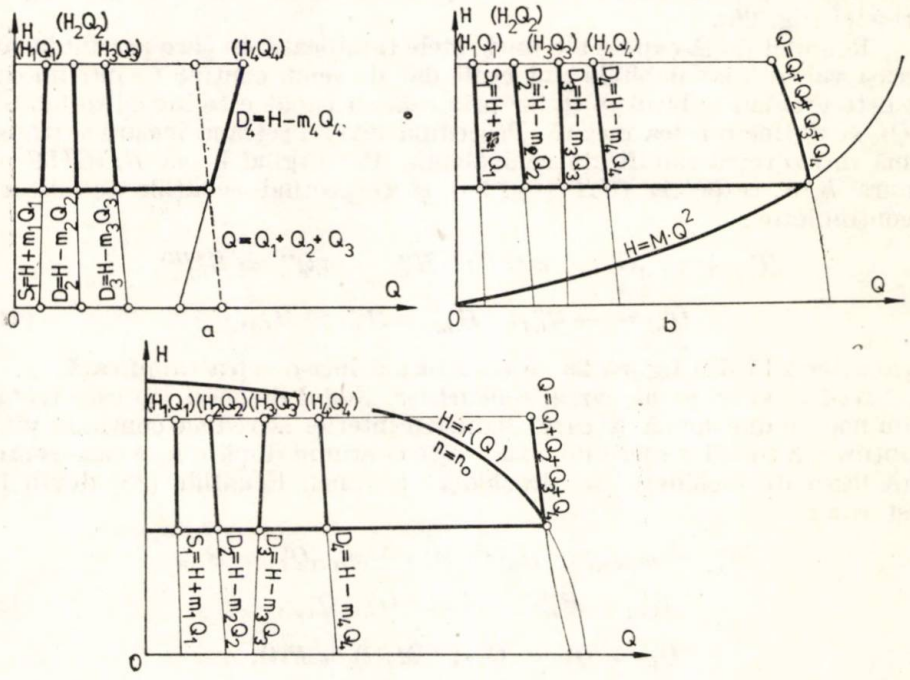


Fig. 25. — Schema de calcul pentru un nod cu ramificație, nod cu ramificație și hidrant, respectiv nod cu ramificație și pompă.

Prin rezolvarea sistemului de ecuații (40) se determină valoarea presiunii și debitelor în punctul i, la timpul j. În figura 25*a* se reprezintă grafic ecuațiile (40) pentru $k = 3$. În figura 25*b* se reprezintă grafic situația unui nod cu ramificații și hidrant, iar în figura 25*c*, cea a unui nod cu ramificații și pompă.

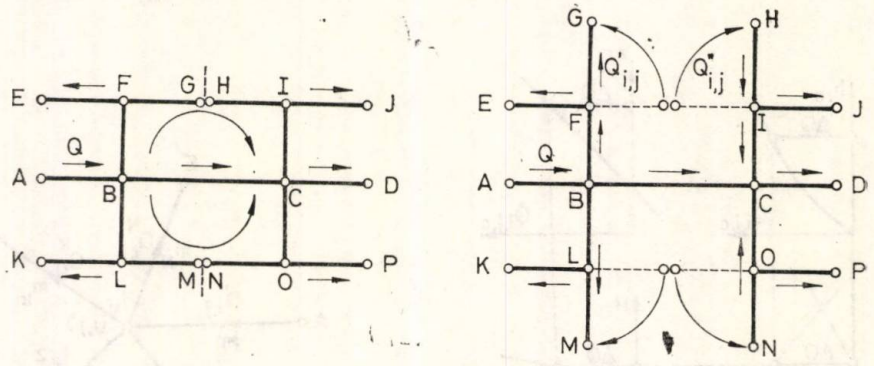


Fig. 26. — Transformarea unei rețele inelare elementare într-o rețea ramificată echivalentă, prin intermediul nodului aparent.

Nod aparent. Calculul rețelelor inelare de conducte se reduce la calculul unei rețele ramificate, prin introducerea artificială a unui nod aparent care ține seama de sensul curgerii apei și de sensul de parcurgere al rețelei (fig. 26).

Reunind două capete ale unei rețele ramificate, în care presiunile au aceeași valoare, iar debitele sînt egale dar de semn contrar (printr-un capăt este evacuat debitul $+ Q$, iar prin celălalt capăt este introdus debitul $- Q$), se obține o rețea inelară. Procedînd invers, rețeaua inelară se transformă într-o rețea ramificată echivalentă. Parcurgînd bucla *BFGHIC* pe ramura *BFG*, respectiv *CIH* (fig. 26) și respectînd ecuațiile de mișcare și continuitate :

$$H'_{i,j} + m_{i-1}Q'_{i,j} = S_{i,j}^{(BFG)}; \quad H''_{i,j} - m_iQ''_{i,j} = S_{i,j}^{(CIH)},$$

$$Q'_{i,j} = -Q''_{i,j}; \quad H'_{i,j} = H''_{i,j} = H_{i,j}, \tag{41}$$

rețeaua buclată din figura 26 se transformă într-o rețea ramificată.

Nod cu vană pe parcursul conductelor. Nodul de acest tip este tratat ca un nod cu diafragmă a cărei diametru interior se reduce continuu pînă la obturarea totală a secțiunii, sau crește continuu după o lege care reprezintă legea de închidere sau deschidere a vanei. Ecuațiile (33) devin în acest caz :

$$H''_{i,j} - m_iQ''_{i,j} = D_{i,j}; \quad H'_{i,j} + m_{i-1}Q'_{i,j} = S_{i,j},$$

$$H'_{i,j} = H''_{i,j} - M_D(t) \cdot Q'_{i,j}|\,Q'_{i,j}|, \tag{42}$$

$$Q'_{i,j} = Q''_{i,j} = Q_{i,j}; \quad M_D(t) = F(t),$$

unde $F(t)$ reprezintă legea de variație în timp a modulului de debit pentru diferite grade de închidere ale vanei.

Nod cu hidrant. Acest nod se caracterizează printr-o rezistență hidraulică proporțională cu pătratul debitului evacuat prin hidrant. Rezistența variază în timp în funcție de legea de închidere sau deschidere a hidrantului.

În regim permanent fiecare hidrant se caracterizează printr-un modul de debit M_H. Ecuațiile caracteristice nodului cu hidrant pe conductă sînt :

$$H'_{i,j} + m_{i-1}Q'_{i,j} = S_{i,j}; \quad H''_{i,j} - m_iQ''_{i,j} = D_{i,j},$$
$$Q''_{i,j} = Q'_{i,j} - \Delta Q; \quad H'_{i,j} = M_H(t)\ \Delta Q|\Delta Q| + Z_i, \tag{43}$$
$$H'_{i,j} = H''_{i,j} = H_{i,j}; \quad M_H(t) = F(t),$$

unde $F(t)$ reprezintă legea de variație în timp a modulului de debit al hidrantului. În cazul în care hidrantul se află la capătul unei conducte, ecuațiile (43) se reduc la :

$$H'_{i,j} + m_{i-1}Q'_{i,j} = S_{i,j}, \quad H'_{i,j} = M_H(t)\cdot(Q'_{i,j})^2 + Z_i,$$
$$Q'_{i,j} = \Delta Q; \quad (Q''_{i,j} = 0), \quad M_H(t) = F(t). \tag{44}$$

În figurile 27 *a* și *b* se reprezintă grafic ecuațiile (43) și (44).

În cazul închiderii hidrantului, curba $h_r + Z_i = M_H(t)\cdot\Delta Q|\Delta Q| + Z_i$, tinde să se suprapună cu axa ordonatelor, pînă cînd, pentru hidrantul complet închis, se confundă cu aceasta.

Nod cu supapă de suprapresiune. Supapa de suprapresiune are rolul de a limita presiunea în zona în care este montată. Limitarea este cu atît mai eficientă cu cît prin supapă se descarcă un debit mai mare pentru aceeași valoare a suprapresiunii. Supapa se caracterizează printr-o lege presiune-debit, reprezentată schematic în figura 28. După depășirea presiunii la care supapa este complet deschisă, eficiența acesteia scade brusc, supapa comportîndu-se ca un hidrant deschis la maximum. Ecuațiile caracteristice acestui tip de nod sînt :

$$H'_{i,j} + m_{i-1}Q'_{i,j} = S_{i,j}, \quad H''_{i,j} - m_iQ''_{i,j} = D_{i,j},$$
$$H'_{i,j} = f(\Delta Q), \quad \Delta Q = Q''_{i,j} - Q'_{i,j}, \quad H'_{i,j} = H''_{i,j} = H_{i,j}. \tag{45}$$

Reprezentarea geometrică în planul $H - Q$ a ecuațiilor (45) este cea din figura 28.

Nod cu hidrant cu închidere la lipsă de presiune amonte. Bornele de irigație moderne sînt echipate cu dispozitive sau vane care se închid automat, la scăderea presiunii sub o anumită valoare. Ecuațiile de mișcare pentru acest tip de hidrant sînt identice cu ecuațiile (45), cu diferența că relația presiune-debit $H'_{i,j} = f(\Delta Q)$ este mai puțin aplatizată decît în cazul supapei de suprapresiune (fig. 29). În cazul în care hidrantul cu închidere automată, respectiv supapa de suprapresiune se află la capătul unei conducte închise, ecuațiile (45) capătă următoarea formă simplificată :

$$H'_{i,j} + m_{i-1}Q'_{i,j} = S_{i,j},$$
$$H'_{i,j} = f(Q'_{i,j}), \quad Q'_{i,j} = Q''_{i,j} \qquad (\Delta Q = 0). \tag{46}$$

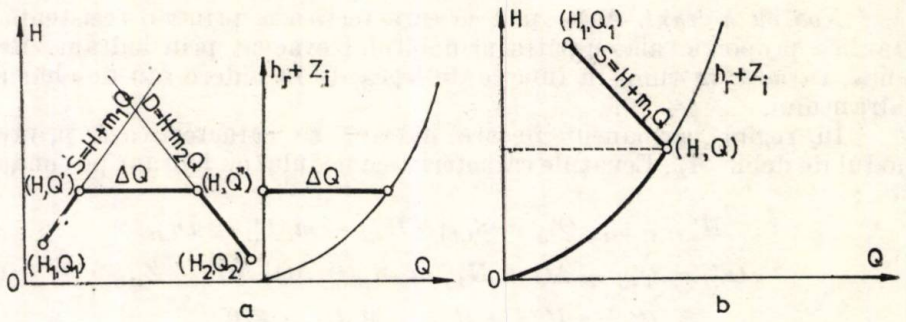


Fig. 27. — Nod cu hidrant pe parcursul și la capătul unei conducte.

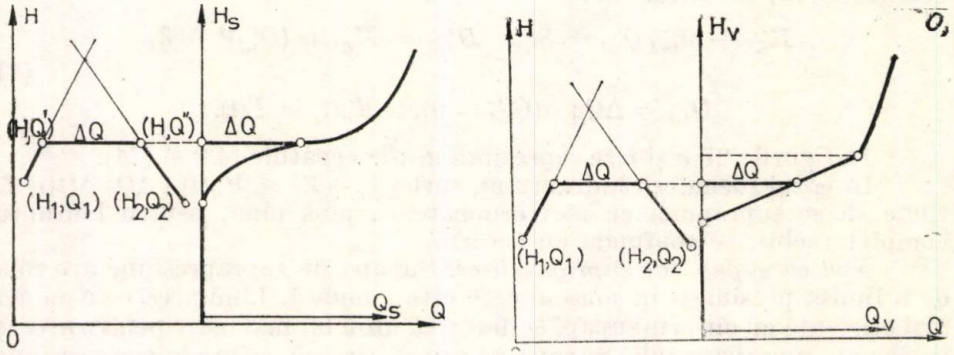


Fig. 28 și 29. — Nod cu supapă de suprapresiune, respectiv hidrant cu închidere la lipsa de presiune.

Nod comun cu hidrant și supapă de suprapresiune. Adeseori la capătul conductelor din rețelele de irigație se află la distanță foarte mică unul de celălalt (formînd practic un singur nod de calcul) un hidrant și o supapă de suprapresiune (fig. 30*a*). Ecuațiile caracteristice acestui tip de nod sînt :

$$H'_{i,j} + m_{i-1}Q'_{i,j} = S_{i,j}\,; \quad Q'_{i,j} = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 \quad (Q''_{i,j} = 0),$$

$$H'_{i,j} = M_H(t)\ \Delta Q_2^2\,; \quad H'_{i,j} = f(\Delta Q_1), \tag{47}$$

$$H'_{i,j} = H''_{i,j} = H_{i,j}\,; \quad M_H(t) = F(t),$$

unde $F(t)$ este legea de variație în timp a modulului de debit al hidrantului. Interpretarea geometrică a ecuațiilor ce descriu acest tip de nod este cea din figura 30*b*. În cazul absenței supapei, punctul de intersecție al dreptei de lovitură de berbec cu caracteristica hidrantului se deplasează în punctul A.

Nod cu supapă de aerisire-dezaerisire. La apariția unor depresiuni în conducte, supapa de aerisire-dezaerisire permite introducerea unei can-

tităţi de aer în conducte, proporţional cu depresiunea existentă. Nodul respectiv se caracterizează prin următoarele relaţii reprezentate grafic în figura 31 :

$$H'_{i,j} + m_{i-1}Q'_{i,j} = S_{i,j}, \quad H''_{i,j} - m_iQ''_{i,j} = D_{i,j},$$
$$Q''_{i,j} = Q'_{i,j} + \Delta Q; \quad \Delta Q = f(H'_{i,j}); \quad H'_{i,j} = H''_{i,j} = H_{i,j}. \tag{48}$$

Nod cu bazin de aspiraţie sau refulare cu nivel constant. Nodul cu bazin de aspiraţie cu nivel constant este caracteristic unor conducte sau reţele de conducte în care staţiile de pompare se află la distanţă mare faţă de bazinul de aspiraţie.

În cazul bazinului de aspiraţie cu nivel constant, ecuaţiile de mişcare sînt :

$$H''_{i,j} - m_iQ''_{i,j} = D_{i,j}; \quad H'_{i,j} = H''_{i,j} = 0, \tag{49}$$

iar în cazul bazinului de refulare cu nivel constant (fig. 32) ecuaţiile devin :

$$H'_{i,j} + m_{i-1}Q'_{i,j} = S_{i,j}; \quad H'_{i,j} = H''_{i,j} = \text{const.} \tag{50}$$

Nod în care s-a produs cavitaţie. În punctele în care presiunea apei scade sub presiunea de vaporizare, apar fenomene de cavitaţie ca urmare a degajării gazelor dizolvate în apă. Cînd tensiunile ce apar în interiorul lichidului depăşesc o anumită limită, iar cavitatea formată ca urmare a vaporizării apei şi a degajării gazelor dizolvate în apă este situată într-un punct înalt al conductei, are loc ruperea coloanei de apă. În interiorul cavităţii se formează vacuum. În prima fază (fig. 33*a*) cavitatea îşi măreşte volumul. În faza a doua, se micşorează pînă cînd cele două coloane lichide se refac (fig. 33*b*). Ca urmare în interiorul conductei apare o suprapresiune mare (însoţită adesea şi de un zgomot puternic asemănător unei lovituri metalice).

Ecuaţiile de mişcare într-un nod în care a apărut cavitaţie sînt :

$$H'_{i,j} + m_{i-1}Q'_{i,j} = S_{i,j}; \quad H''_{i,j} - m_i\,Q''_{i,j} = D_{i,j},$$
$$H'_{i,j} = H''_{i,j} = H_{cav}; \quad Q'_{j,j} \neq Q''_{i,j}. \tag{51}$$

Cunoscînd vitezele de deplasare ale celor două fronturi ce delimitează cavitatea ($v'_{i,j} = Q'_{i,j}/A$ şi $v''_{i,j} = Q''_{i,j}/A$) se controlează evoluţia în timp a volumului cavităţii pînă ce aceasta atinge dimensiunea maximă cînd vitezele $v'_{i,j}$ şi $v''_{i,j}$, devin nule. Refacerea continuităţii coloanei de apă are loc într-un timp aproximativ egal cu cel de formare a cavităţii maxime, timp ce depinde de valoarea vitezelor de apropiere a fronturilor celor două coloane lichide. În realitate fenomenul este mult mai complex [3], ruperea coloanei cu apariţia unei cavităţi, avînd loc în general în imediata apropiere a vanelor, a clapetelor pentru curgere inversă, sau în punctele

înalte ale conductei. Cavitatea formată poate ocupa parțial sau total secțiunea conductei, în timp ce forma reală a frontului cavității diferă de forma ideală adoptată pentru modelul de calcul.

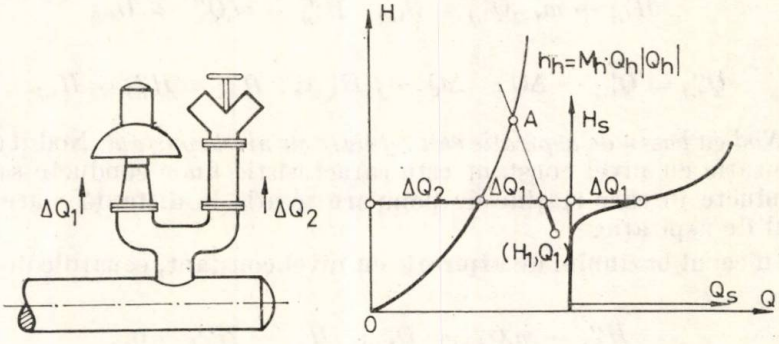


Fig. 30 — Schema unui nod cu supapă de suprapresiune și hidrant, respectiv schema de calcul pentru acest nod.

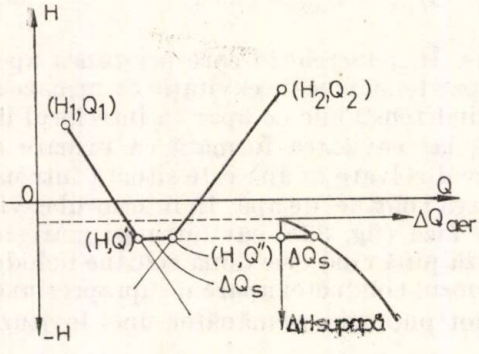


Fig. 31. — Nod cu supapă de aerisire dezaerisire.

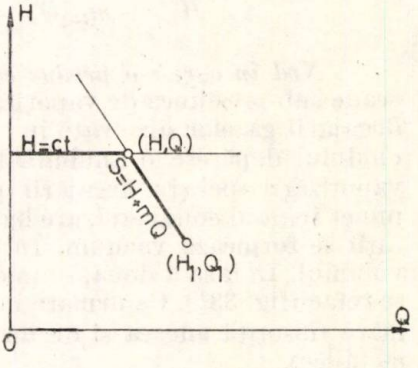


Fig. 32. — Nod cu bazin de refulare cu nivel constant.

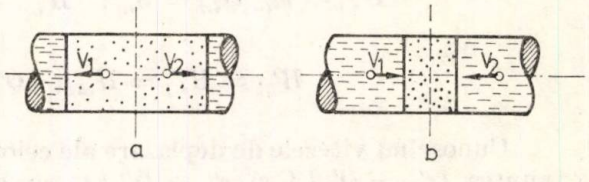


Fig. 33. — Evoluția în timp a cavității formate în conductă la ruperea coloanei de apă.

6. PROGRAME ȘI ALGORITMUL DE CALCUL

Pentru studiul regimului tranzitoriu în conducte unifilare, a fost pus la punct programul „HAMMER" și SOHIC-JZ", iar pentru calculul mișcării nepermanente în rețele de conducte ramificate, inelare sau mixte, programul „REȚEA". Programele sînt suficient de flexibile pentru a permite modelarea virtuală a oricărei configurații de conducte sau rețele de

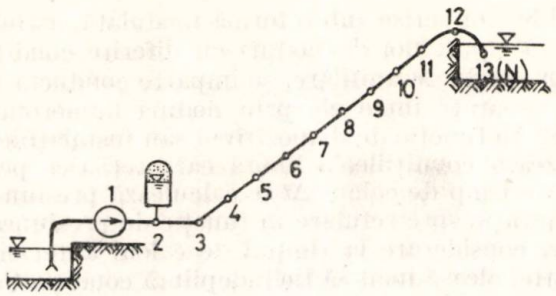


Fig. 34

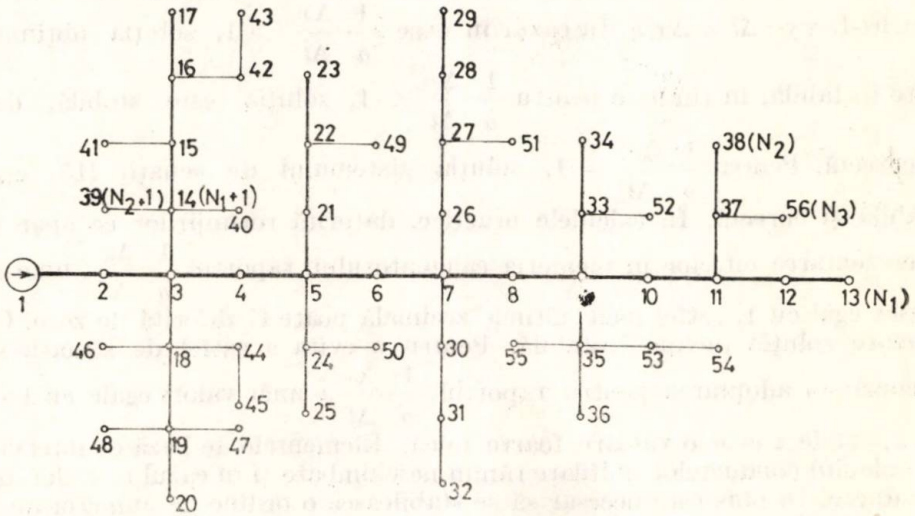


Fig. 35

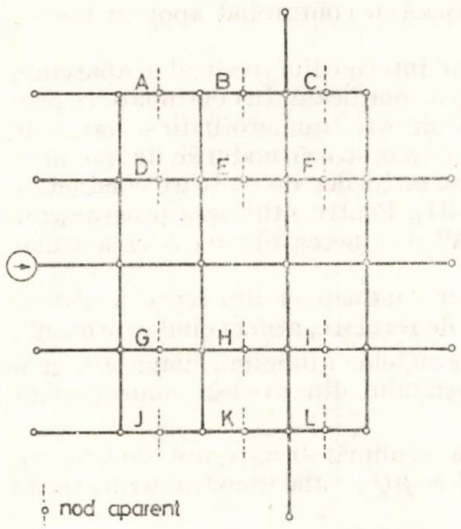


Fig. 36

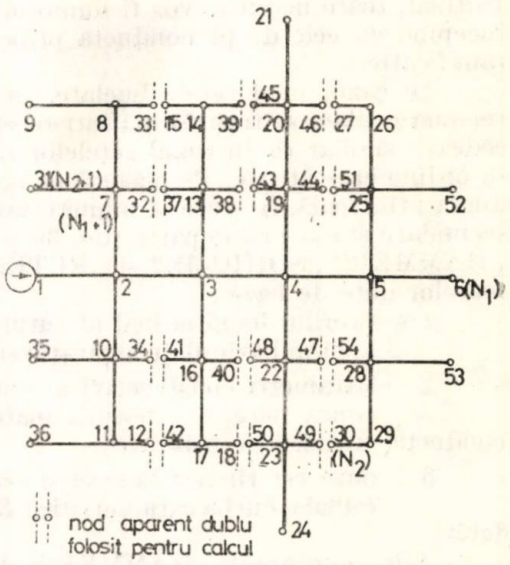


Fig. 37

Fig. 34 — 37. — Schema unei conducte unifilare, a unei rețele ramificate și a unei rețele inelare, cu exemplificarea modului de numerotare a nodurilor.

distribuție a apei. Ele sînt scrise sub o formă modulată, astfel încît pot fi adăugate cu ușurință tipuri noi de noduri cu diferite condiții la limită. Pentru calculul unor conducte unifilare, se împarte conducta în tronsoane aproximativ egale, separate între ele prin noduri numerotate crescător de la 1 la N (fig. 34). În funcție de dispozitivul sau instalațiile montate pe conductă se precizează condițiile la limită caracteristice pentru fiecare tip de nod. La fiecare timp de calcul Δt se calculează presiunea și debitul începînd dinspre aspirație spre refulare în funcție de presiunea și debitele din nodurile vecine, considerate la timpul de calcul anterior. Lungimea tronsoanelor este astfel aleasă încît să fie îndeplintă condiția Courant-Friedrichs-Lewy : $\Delta t \leqslant \Delta x/a$. În cazul în care $\frac{1}{a}\frac{\Delta x}{\Delta t} > 1$, soluția obținută este instabilă, în timp ce pentru $\frac{1}{a}\frac{\Delta x}{\Delta t} < 1$, soluția este stabilă, dar incorectă. Pentru $\frac{1}{a}\frac{\Delta x}{\Delta t} = 1$, soluția sistemului de ecuații (15) este stabilă și corectă. În calculele practice, datorită rotunjirilor ce apar la reprezentarea cifrelor în memoria calculatorului, raportul $\frac{1}{a}\frac{\Delta x}{\Delta t}$, nu este strict egal cu 1, astfel încît ultima zecimală poate fi diferită de zero. Ca urmare soluția devine instabilă. Pentru a evita o astfel de situație se recomandă adoptarea pentru raportul $\frac{1}{a}\frac{\Delta x}{\Delta t}$ a unei valori egale cu $1 - \varepsilon$, unde ε este o valoare foarte mică. Elementele de bază ce intervin în calculul conductelor unifilare rămîn neschimbate și în cazul rețelelor de conducte. În plus este necesar să se stabilească o ordine de numerotare a tuturor nodurilor în funcție de ordinea de parcurgere a conductelor rețelei. În final, toate nodurile vor fi numerotate crescător de la 1 la N_3 (fig. 35) începînd cu cele de pe conducta principală și continuînd apoi cu fiecare ramificație.

În cazul unei rețele buclate, prin intermediul nodurilor aparente, rețeaua buclată se transformă într-o rețea ramificată. În continuare se procedează similar ca în cazul rețelelor ramificate, numerotîndu-se nodurile în ordine crescătoare. Pe măsură ce se numerotează nodurile de pe conducta principală, se trece la numerotarea nodurilor de pe toate conductele secundare și așa mai departe (fig. 36 și 37). Pentru utilizarea programelor „HAMMER" „SOHIC-JZ" și „RETEA" este necesară cunoașterea următoarelor date de bază :

1 — profilul longitudinal al tuturor conductelor din rețea și nivelul apei în bazinul de aspirație și de refulare, atunci cînd este cazul ;

2 — parametri constructivi ai conductelor : lungimi, diametre, grosimea pereților, natura materialului din care este confecționată conducta, armăturile utilizate ;

3 — date referitoare la electropompe, număr de agregate, turația nominală, curba caracteristică $H = f(Q)$, randamentul în funcție de debit.

Atît programul „HAMMER" și „SOHIC-JZ" cît și programul „RETEA" permit determinarea presiunilor și debitelor în fiecare nod al

conductei sau rețelei, volumele de aer și presiunile din rezervoarele de aer, cota apei în castelele de echilibru, debitele schimbate între aceste instalații și rețea, turația pompelor, debitul de aer introdus prin supapele de aerisire etc. La sfîrșitul calculelor se tipăresc valorile maxime și minime ale presiunilor și debitelor în nodurile respective (înfășurătoarele debitelor și presiunilor maxime și minime).

7. CONCLUZII

Prima parte a lucrării cuprinde principalele relații și metode de calcul pentru integrarea ecuațiilor de mișcare ce stau la baza programelor elaborate în ICH București pentru studiul regimului tranzitoriu rapid variabil al apei în conducte și rețele de conducte sub presiune. Se evidențiază condițiile inițiale și la limită în diferite secțiuni caracteristice ale conductelor, principalele tipuri de noduri de calcul utilizate, modul de segmentare pe tronsoane a conductelor și rețelelor de conducte, precum și particularitățile specifice programului pentru calculul rețelelor de conducte ramificate și buclate.

În partea a doua a articolului (în curs de apariție) se prezintă unele din principalele rezultate și concluzii obținute în ICH prin aplicarea programului „RETEA" la studiul comportării în regim tranzitoriu a unui număr mare de conducte și rețele de conducte sub presiune din diverse sisteme de distribuție și alimentare cu apă.

Primit la redacție la 7 august 1986

BIBLIOGRAFIE

1. V. L. STREETER, E. B. WYLIE, *Hydraulic transients*, Mc. Graw-Hill Book Company, 1964.
2. D. CIOC, *Contribuții la calculul mișcărilor nepermanente în conducte și la teoria sonicității cu aplicare la pompajul sonic*, Teză de doctorat, București, 1968.
3. I. ANTON, *Cavitația*, Vol. II, Edit. Academiei R.S.R., București, 1985.
4. D. CIOC, G. TATU, *Asupra unui program general de calcul numeric al loviturii de berbec în rețele de conducte*, Buletinul științific al ICB, nr. 4, 1971.
5. G. EVANGELISTI, *Teoria generale del colpo d'ariete col metoda delle caratteristiche*, L'Energia Ellettrica 2, 3, 65÷90; 145÷162 (1965).
6. I. JELEV, ST. ZAREA, *Studiul șocului hidraulic într-o conductă sub presiune protejată cu rezervoare de aer și castele de echilibru, folosind un calculator numeric*, Partea I și II, St. cerc. mec. apl., 2 (1975), 1 (1976).
7. S. HÂNCU, M. POPESCU, I. JELEV, G. CONSTANTINESCU, *Unele aspecte privind calculul loviturii de berbec din instalațiile de pompare*, Hidrotehnica, 2 (1978).
8. I. JELEV, *Calculul loviturii de berbec în rețelele de conducte ramificate cu aplicație la sistemul de irigație Viișoara*, Studii hidraulice, ICH (1979).
9. G. TATU, *Contribuții la studiul fenomenelor de rezonanță în sistemele hidraulice sub presiune*, Teză de doctorat, București, 1980.
10. D. CIOC, *Modele de calcul în mișcarea nepermanentă*, St. cerc. mec. apl., 5÷6 (1984).
11. J. E. BALL, *An algorithm for routing unsteady flows in urban drainage networks*, Journal of hydraulic research *23*, 4 (1985).
12. B. E. BOSSERMAN, *Computer Analysis of Hydraulic Transients in a Complex Piping System*, American Water Works Association Journal, July, 1978.
13. M. de HES, *Waterhammer in a closed circuit, Analysis with a Hybrid Computer*, Sixth International Analogue Computation Meetings, München 1970, p. 488÷495.
14. I. JELEV, *Computer analysis of hydraulic transients in pipe networks. Considerations concerning the head losses in the water hammer phenomena*, XX Congress of the International Association for Hydraulic research, Moscow, sept. 1983.

ECHIVALENT CU CONSTRÎNGERI PENTRU COLOANA ACTIVĂ CA ELEMENT AL STRUCTURILOR CU FUNDAȚII FLEXIBILE

de G. ONU

Institutul de Proiectări Transporturi Auto, Navale și Aeriene

În vederea simplificării calculului structurilor la care transferul încărcării la terenul de fundație se realizează în cadrul unui proces de interacțiune structură-fundație-teren, se prezintă un echivalent al coloanei active. Sub forma unei console cu deformații de lunecare mari, echivalentul este definit prin lungime, parametrul deformației din forfecare și rigiditatea secțională la încovoiere. De asemenea, se prezintă trei tipuri de relații de constrîngere pentru soluționarea prinderilor excentrice ale echivalentului

1. INTRODUCERE

Determinarea deplasărilor și a eforturilor unei structuri care conlucrează cu terenul de fundație, presupune un efort de proiectare important, chiar dacă se recurge la asistența calculatorului. Mai mult, în cazul structurilor fundate pe coloane, numărul parametrilor nedeterminați poate crește într-o asemenea măsură încît se pot ivi situații în care necesarul de memorie și timp de prelucrare depășește disponibilitățile. În cadrul metodei elementelor finite [1], utilizarea tehnicei substructurizării [2], [3], [1] asociată cu relații de constrîngere [3] [4] constituie cea mai eficientă cale de reducere a efortului de calcul în situațiile de acest fel. Ilustrativ, din acest punct de vedere, este procedeul prezentat în [5], [6] pentru calculul podurilor pe cadre fundate pe coloane, procedeu care exploatează două din particularitățile constitutive ale acestor structuri. În primul rînd, se ține seama de alcătuirea arborescentă a structurii, ceea ce facilitează o substructurizare ierarhică (coloană, radier, cadru transversal, platelaj), iar în al doilea rînd, se uzează de rigiditatea sporită a platelajului în plan orizontal pentru a reduce, cu ajutorul constrîngerilor, numărul gradelor de libertate. Pe de altă parte, pentru unele tipuri de structuri fundate pe coloane, cum sînt radierele rigide și ramforții, pilele și culeele de pod, radierele elastice, platformele și unele tipuri de cheuri etc, tehnica substructurizării ierarhice, care presupune o anumită specializare a programului, se dovedește nenecesară, putînd fi înlocuită cu o procedură de sumare directă. Principial, există două alternative. În prima, rigiditățile coloanei aferente capitelului, se introduc în matricea de rigiditate a structurii cu ajutorul unei instrucțiuni de intrare în care se precizează numărul ecuației din matricea globală și, în cadrul acesteia, locația la care se va însuma rigiditatea. Pentru aceasta, trebuie ca în prealabil să se determine matricele de rigiditate ale coloanelor în sistemul global de axe. De asemenea, este necesar ca secțiunea de capitel a fiecărei coloane să coincidă cu un nod de structură. În situațiile în care cel de al doilea deziderat nu este satisfăcut intervine necesitatea utilizării relațiilor de constrîngere.

Cea de a doua alternativă care conduce la o sumare directă a rigidităților, se bazează pe utilizarea echivalenților. Înlocuirea fiecărei coloane cu un echivalent cu trei sau șase grade de libertate, după cum problema

este plană sau spațială asigură, ca și în prima alternativă de altfel, obținerea modelului de calcul cu numărul minim de parametri nedeterminați. Pe lîngă acesta, posibilitatea utilizării procedurilor standard de transformare a matricelor de rigiditate ținînd seama de constrîngeri oferă anumite avantaje, din punctul de vedere al programării.

Elementul cheie al acestei alternative de calcul îl constituie determinarea echivalentului coloanei. Există mai multe propuneri de soluționare a acestei probleme. Astfel în [7] se pledează pentru stabilirea unei secțiuni de încastrare a coloanei la o anumită adîncime. În cazul coloanelor relativ lungi, poziția acestei secțiuni se determină cu ajutorul modelului coloanei semiinfinite*) într-un mediu cu modul de fundație constant sau variind liniar cu adîncimea. În [8] se recomandă ca adîncimea de încastrare, în cazul coloanelor lungi, să se aprecieze direct în funcție de caracteristicile terenului. După [9], lungimea echivalentului se poate lua aproximativ egală cu 5/9 din lungimea critică a coloanei dacă lungimea reală depășește această limită. Unii autori propun ca stabilirea lungimii echivalentului să se facă în funcție de tipul încărcării și de natura legăturilor de la capitel. În [10], [11] acești echivalenți sînt determinați pe baza metodei coeficienților de fundație, iar în [12] pe baza metodei factorilor de interacțiune. În [13] se prezintă ca echivalent al coloanei în problema plană, un sistem de două bare ortogonale. Cea verticală, care înlocuiește coloana, are o încastrare cu translație în secțiunea de la capătul inferior. Deplasarea pe orizontală a acestei secțiuni este împiedicată elastic de a doua bară, orizontală. Cele două necunoscute ale echivalentului, lungimea barei verticale și aria secțiunii barei orizontale, se determină neglijînd rigiditatea de cuplare a coloanei reale. De asemenea, se desconsideră efectul rigidității la translație al barei verticale asupra rotirii secțiunii de capitel. Comparativ cu alte propuneri, acest echivalent are inconvenientul de a introduce cel puțin un nod suplimentar pentru fiecare coloană. În [14] se propune înlocuirea coloanelor cu bare și resoarte de compensare a rigidităților. Astfel, în problema plană fiecare coloană se înlocuiește cu o bară și trei resoarte atașate la capitel. Autorii referatului [15] propun ca matricea de rigiditate a echivalentului să se calculeze pe baza a trei lungimi diferite funcție de deformațiile de referință. Pornind de la rigiditățile „exacte" ale coloanei în diferite condiții de fundare, autorii au determinat expresii algebrice pentru rigiditățile echivalentului în funcție de parametrul care indică rata de creștere cu adîncimea a modulului de fundație.

În cele ce urmează se va prezenta un echivalent de tip consolă, ale cărui caracteristici se determină luînd în considerație și deformațiile din lunecare. Caracterizat printr-o matrice de rigiditate unică, echivalentul conduce la rezultate corecte indiferent de condițiile de fundare ale coloanei. Se vor da și relațiile de constrîngere ale echivalentului aplicabile în cazul prinderilor excentrice.

2. RIGIDITĂȚILE COLOANEI

Răspunsul elastic al unei coloane active, încărcate numai prin intermediul secțiunii de la capitel, este caracterizat de rigiditățile coloanei raportate la deplasările capitelului. Utilizarea coloanelor de probă constituie

*) O coloană activă se consideră semiinfinită dacă lungimea ei nu influențează deplasările capitelului.

cea mai bună cale de determinare a acestor rigidităţi. Dacă se cunosc deplasările capitelului produse de sarcini unitare, rigidităţile coloanei se calculează cu relaţiile :

$$K_H = \varphi_M/\delta\,;\; K_M = y_H/\delta\,;\; K_r = y_M/\delta, \qquad (1)$$

$$K_P = 1/y_P\,;\; K_T = 1/\varphi_T,$$

în care $\delta = \varphi_M y_H - y_M^2$, iar semnificaţia celorlalte notaţii rezultă din figura 1. Deplasările φ_M, y_H, $y_M = \varphi_H$, y_P şi φ_T, cu ajutorul cărora sînt definite rigidităţile depind de caracteristicile coloanei şi de natura terenului de fundaţie.

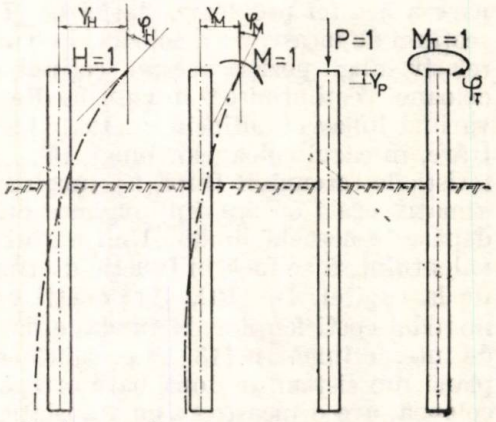


Fig. 1. — Deplasările caracteristice ale coloanei active.

Primele trei relaţii din (1) furnizează rigidităţile care caracterizează comportarea coloanei la încovoiere, iar celelalte două dau rigiditatea axială şi rigiditatea la torsiune.

Rigidităţile determinate cu relaţiile (1) conduc la rezultate corecte în cazul fundaţiilor la care efectul de grup al coloanelor este nesemnificativ. Dacă distanţa dintre coloane este mică, acest efect capătă importanţă fiind necesară o ajustare a rigidităţilor în funcţie de numărul şi poziţia coloanelor în cadrul fundaţiei [9], [12], [16].

Determinarea numai prin calcul a rigidităţilor este recomandabilă în situaţiile în care se cunosc bine caracteristicile terenului. Cel mai eficient procedeu de calcul a rigidităţilor coloanei pe această cale îl constituie condensarea statică. Detalii privind aplicarea acestui procedeu, pentru determinarea rigidităţilor K_H, K_M şi K_r în cadrul metodei coeficienţilor de fundaţie, sînt date în [17]. Relaţii de calcul pentru determinarea, în cadrul aceleiaşi metode, a rigidităţii axiale K_P şi a rigidităţii torsionale K_T, sînt date, după Silin, în [18]. Pe de altă parte, avînd în vedere că rigidităţile K_P şi K_T sînt decuplate de celelalte rigidităţi, este permis ca determinarea lor să se facă pornind de la premise diferite de cele care au stat la baza calculului rigidităţilor K_H, K_M şi K_r. Poate fi utilizat modelul coloanei într-un mediu continuu liniar elastic, pentru care Randoplh [19], [20] a dat soluţii închise, luînd în consideraţie concomitent rezemarea pe vîrf şi adeziunea laterală.

3. ECHIVALENTUL COLOANEI

În figura 2*a* este reprezentată o coloană izolată din structura reală, iar alături, în figura 2*b*, echivalentul ei. După cum se constată, echivalentul a fost ales sub forma unui element liniar (bară de cadru) încastrat perfect la capătul inferior. Pentru a fi considerate echivalente, cele două elemente trebuie să aibă o comportare identică din punctul de vedere al răspunsului

elastic la capitel. Acesta înseamnă că prin înlocuirea coloanei prin echivalentul ei deplasările suprastructurii nu se vor modifica, iar eforturile de la capitelul echivalentului vor fi identice cu cele de la capitelul coloanei reale.

Teoria echivalenţilor [1] oferă instrumentul de calcul necesar stabilirii condiţiilor pe care trebuie să le îndeplinească elementul din figura 2*b* pentru a putea înlocui în calcul coloana reală.

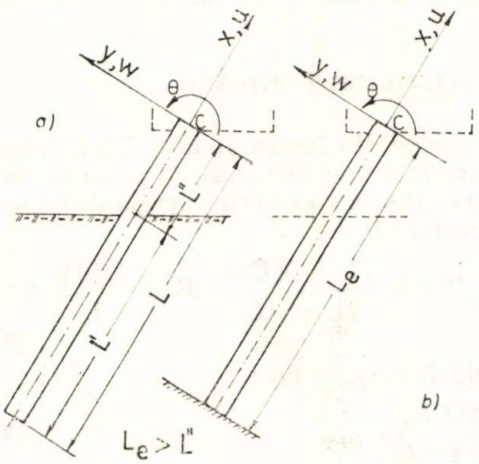


Fig. 2. — Coloana reală şi echivalentul ei.

În general, pe baza identităţii cîmpurilor deformaţiilor specifice a două structuri diferite, una reală, cealaltă fictivă dar echivalentă cu prima, teoria echivalenţilor furnizează relaţiile cu ajutorul cărora se pot determina caracteristicile structurii înlocuitoare. Acestea se obţin prin identificarea coeficienţilor din expresiile energiilor de deformaţie scrise în cele două situaţii. Dacă cele două structuri ocupă acelaşi volum, iar energiile de deformaţie sînt raportate la toate coordonatele generalizate ale cîmpului deplasărilor, avem de a face cu o echivalenţă totală. Dacă însă, cele două structuri nu ocupă în mod necesar acelaşi volum, iar energia de deformaţie a structurii reale nu se raportează la toate coordonatele cîmpului deplasărilor, ci numai la acelea care caracterizează un anumit aspect al comportării structurii reale, vom avea de a face cu o echivalenţă parţială. De exemplu, în problema plană, energia de deformaţie a coloanei din figura 2*a*, raportată la deplasările de interfaţă (punctul *C*), se scrie sub forma

$$\Pi = \frac{1}{2}\Delta^T \overline{K}\Delta = \frac{1}{2}(K_H W^2 + 2K_r \theta W + K_M \theta^2 + K_P U^2), \tag{2}$$

iar energia de deformaţie a barei din figura 2*b*, sub forma

$$\Pi_e = \frac{1}{2}\Delta^T \overline{K}_e \Delta = \frac{1}{2}\left[\frac{12(EI)_e}{L_e^3}W^2 + \frac{12(EI)_e}{L_e^2}\theta W + \frac{4(EI)_e}{L_e}\theta^2 + \frac{(EA)_e}{L_e}U^2\right]. \tag{3}$$

Egalitatea

$$\Pi = \Pi_e \tag{4}$$

reprezintă o condiţie de echivalenţă parţială.

În relaţiile de mai sus,

$$\Delta = [W, \theta, U]^T \tag{5}$$

este vectorul deplasărilor capitelului, iar $\overline{K}$ şi $\overline{K}_e$ sînt matricele de rigiditate ale coloanei reale şi ale echivalentului ei raportate la aceste deplasări.

Elementele matricei $\bar{K}_e$, așa cum apar în expresia energiei de deformație a echivalentului (3), corespund unei bare la care deformațiile de lunecare nu sînt luate în considerație. Utilizare matricei $\bar{K}_e$ sub această formă conduce la o nedeterminare în relația (4), nedeterminare generată de excedentul relațiilor implicate, în raport cu numărul parametrilor nedeterminați.

3.1. ANALOGIA CU EFECTUL FORȚEI TĂIETOARE

Admițînd că ansamblul coloană-teren din figura 2*a* are, din punctul de vedere al răspunsului la capitel, o comportare analoagă cu aceea a unei console cu deformații de lunecare mari [21], se va rescrie energia de deformație a echivalentului coloanei sub forma

$$\Pi_e = \frac{1}{2}\left[\frac{12(EI)_e}{(1+t)L_e^3} W^2 + 2\frac{6(EI)_e}{(1+t)L_e^2} W\theta + \frac{(4+t)(EI)_e}{(1+t)L_e}\theta^2 + \frac{(EA)_e}{L_e} U^2\right] \tag{6}$$

în care t, parametrul deformației din forfecare, este

$$t = \frac{12(EI)_e}{(GA')_e L_e^2}. \tag{7}$$

Cu $(EI)_e$ s-a notat rigiditatea secțională la încovoiere, iar cu $(GA')_e$, rigiditatea secțională la forfecare a echivalentului.

Reconsiderînd relația (4), ținînd seama de (6) și apoi identificînd coeficienții deplasărilor provocate de încovoiere, se obține

$$\frac{12(EI)_e}{(1+t)L_e^3} = K_H;\ \frac{6(EI)_e}{(1+t)L_e^2} = K_r,\ \frac{(4+t)(EI)_e}{(1+t)L_e} = K_M, \tag{8}$$

de unde, luînd în considerație și (7), rezultă lungimea, parametrul deformației din forfecare, rigiditatea secțională la încovoiere și rigiditatea secțională la forfecare a echivalentului:

$$L_e = \frac{2K_r}{K_H};\ t = \frac{3K_M K_H - 4K_r^2}{K_r^2},$$
$$(EI)_e = \frac{2K_r(K_M K_H - K_r^2)}{K_H^2},\ (GA')_e = \frac{6K_r(K_M K_H - K_r^2)}{3K_M K_H - 4K_r^2}. \tag{9}$$

Cunoscînd L_e, rigiditatea secțională la efort axial, se obține, identificînd în (4), coeficienții deplasării axiale:

$$(EA)_e = \frac{2K_r K_P}{K_H}. \tag{9'}$$

Dacă în condiția (4), la energia de deformație a celor două elemente, se va adăuga și aportul torsiunii, va rezulta rigiditatea secțională la torsiune a echivalentului sub forma

$$(GI_p)_e = \frac{2K_r K_T}{K_H}. \tag{9''}$$

La aceleași rezultate se poate ajunge punînd condiția ca cele două elemente, cel real și echivalentul său, să înmagazineze energii interne complementare egale. Introducînd și termenii corespunzători torsiunii, această condiție conduce la ecuația :

$$\begin{bmatrix} y_H & -y_M & 0 & 0 \\ -y_M & \varphi_M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(4+t)L_e^3}{12(EI)_e} & \dfrac{-L_e^2}{2(EI)_e} & 0 & 0 \\ \dfrac{-L_e^2}{2(EI)_e} & \dfrac{L_e}{(EI)_e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{L_e}{(EA)_e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{L_e}{(GI_p)_e} \end{bmatrix} . \tag{10}$$

Egalînd termen cu termen, ținînd seama și de (7), se obține următoarea soluție pentru echivalent :

$$\begin{gathered} L_e = \frac{2y_M}{\varphi_M} \; ; \; (EI)_e = \frac{2y_M}{\varphi_M^2} , \\ t = \frac{3y_H\varphi_M - 4y_M^2}{\varphi_H^2} \; ; \; (EA)_e = \frac{2y_M}{\varphi_M y_P} , \\ (GA')_e = \frac{6y_M}{3y_H\varphi_M - 4\varphi_H^2} , \; (GI_p)_e = \frac{2y_M}{\varphi_M\varphi_T} . \end{gathered} \tag{11}$$

În relațiile (10) și (11) y_H, y_M, φ_M, y_P și φ_T sînt deplasările capitelului coloanei încărcate cu sarcini unitare așa cum se arată în figura 1.

Cu ajutorul relațiilor (1) se poate verifica cu ușurință că egalitățile (9), (9′) și (9″) pe deoparte și egalitățile (11) pe de altă parte, conduc la aceeași soluție.

Relațiile (9 — 9″) sau (11) furnizează caracteristicile echivalentului în funcție de rigiditățile sau de deplasările capitelului. Aceste relații se vor folosi ca atare dacă coloanele sînt fundate în terenuri stratificate, neomogene. În cazul terenurilor monostrat, prin intermediul acestor relații se pot obține caracteristicile echivalentului exprimate direct în funcție de geometria coloanei și de parametrul care definește răspunsul terenului la presiune laterală.

În continuare se vor da relațiile de calcul ale caracteristicilor echivalentului coloanei semiinfinite introduse în întregime într-un teren cu modul de fundație constant sau variind liniar cu adîncimea.

3.2. COLOANĂ ÎN TEREN CU MODUL DE FUNDAȚIE CONSTANT

Se ia în considerație numai cazul coloanei flexibile, a cărei lungime depășește lungimea critică dată de relația

$$L_c = 4\left(\frac{EI}{k}\right)^{1/4} . \tag{12}$$

În această relaţie, EI reprezintă rigiditatea secţională la încoviere a coloanei, iar $k = k_0 b$, k_0 fiind modulul de fundaţie în ipoteza lui Winkler, iar b lăţimea de conlucrare cu terenul.

După [22], deplasările capitelului coloanei, sub acţiunea sarcinilor unitare (fig. 1), se pot scrie sub forma :

$$y_H = \left(\frac{4}{k^3(EI)}\right)^{1/4}, \quad y_M = \left(\frac{1}{k^2(EI)^2}\right)^{1/4}, \quad \varphi_M = \left(\frac{4}{k(EI)^3}\right)^{1/4}. \tag{13}$$

Rigidităţile care caracterizează comportarea coloanei la încovoiere se obţin înlocuind (13) în (1) :

$$K_H = (4k^3(EI))^{1/4}, K_r = (k^2(EI)^2)^{1/4}, \quad K_M = (4k(EI)^3)^{1/4}. \tag{14}$$

Substituind (13) în (11) sau (14) în (9), rezultă caracteristicile echivalentului coloanei semiinfinite corespunzătoare ipotezei lui Winkler :

$$L_e = \left(\frac{4EI}{k}\right)^{1/4}, \quad t = 2, \quad (EI)_e = EI. \tag{15}$$

Prima din relaţiile (15) arată că în cazul mediului Winklerian lungimea echivalentului este aproximativ egală cu o treime din lungimea critică a coloanei.

3.3. COLOANĂ ÎN TEREN CU MODUL DE FUNDAŢIE VARIIND LINIAR CU ADÎNCIMEA

Ca şi la punctul 3.2, se ia în consideraţie numai cazul coloanei flexibile, a cărei lungime depăşeşte lungimea critică [12] :

$$L_c = 4\left(\frac{EI}{n}\right)^{1/5}, \quad n = mb = k_0 b/z, \tag{16}$$

m este parametrul care indică rata de creştere cu adîncimea a modulului de fundaţie, iar z reprezintă cota curentă. EI, b şi k_0 au fost definite anterior în legătură cu (12).

După [12], deplasările capitelului coloanei, sub acţiunea sarcinilor, unitare (fig. 1), se pot scrie sub forma :

$$y_H \simeq \left(\frac{85{,}5}{n^3(EI)^2}\right)^{1/5}, \quad y_M \simeq \left(\frac{11{,}2}{n^2(EI)^3}\right)^{1/5}, \quad \varphi_M \simeq \left(\frac{16{,}3}{n(EI)^4}\right)^{1/5}. \tag{17}$$

Rigidităţile care caracterizează comportarea coloanei la încovoiere se obţin înlocuind (17) în (1) :

$$K_H \simeq 1{,}075\,(n^3(EI)^2)^{1/5}, \quad K_r \simeq 0{,}998\,(n^2(EI)^3)^{1/5}, \quad K_M \simeq 1{,}498\,(n(EI)^4)^{1/5}. \tag{18}$$

Introducînd (18) în (9) sau (17) în (11) rezultă caracteristicile echivalentului coloanei semiinfinite în ipoteza modulului de fundaţie variind liniar cu adîncimea :

$$L_e \simeq 1{,}856\left(\frac{EI}{n}\right)^{1/5}, \quad t \simeq 0{,}854, \quad (EI)_e \simeq 1{,}062\ EI. \tag{19}$$

4. MATRICEA DE RIGIDITATE A ECHIVALENTULUI

Pentru cazul general de solicitare (problema spațială), matricea de rigiditate a echivalentului coloanei, convenabil partiționată, se scrie sub forma

$$\hat{K}_e = \begin{bmatrix} \bar{K}_e & 0 \\ 0 & \tilde{K}_e \end{bmatrix}, \tag{20}$$

în care

$$\bar{K}_e = \begin{bmatrix} \dfrac{12\,(EI)_e}{(1+t)L_e^3} & \dfrac{6(EI)_e}{(1+t)L_e^2} & 0 \\ \dfrac{6(EI)_e}{(1+t)L_e^2} & \dfrac{(4+t)(EI)_e}{(1+t)L_e} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{(EA)_e}{L_e} \end{bmatrix}, \tag{21}$$

$$\tilde{K}_e = \begin{bmatrix} \dfrac{12(\widetilde{EI})_e}{(1+\tilde{t})\tilde{L}_e^3} & \dfrac{-6(\widetilde{EI})_e}{(1+\tilde{t})\tilde{L}_e^2} & 0 \\ \dfrac{-6(\widetilde{EI})_e}{(1+\tilde{t})\tilde{L}_e^2} & \dfrac{(4+\tilde{t})(\widetilde{EI})_e}{(1+\tilde{t})\tilde{L}_e} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{(GI_p)_e}{L_e} \end{bmatrix}, \tag{22}$$

$\bar{K}_e$ reprezintă de fapt matricea de rigiditate a echivalentului coloanei în problema plană. Cu ajutorul acestei matrice a fost scrisă energia de deformație a echivalentului în relația (6).

$\tilde{K}_e$ conține rigiditățile care caracterizează comportarea echivalentului la încovoiere după a doua direcție, precum și rigiditatea la torsiune.

Caracteristicile echivalentului după a doua direcție, $(\widetilde{EI})_e$, $\tilde{L}_e$ și $\tilde{t}$, se calculează cu relațiile (9) în care K_H, K_r și K_M se înlocuiesc cu rigiditățile care definesc comportarea coloanei la încovoiere după direcția secundară. Dacă efectul de grup este același pe cele două direcții și fața terenului natural este orizontală, se va lua

$$(\widetilde{EI})_e = (EI)_e,\ \tilde{L}_e = L_e,\ \tilde{t} = t. \tag{23}$$

Matricea de rigiditate $\hat{K}_e$, corespunzătoare unei console, este scrisă în sistemul local de axe (X_e, Y_e, Z_e; fig. 3). În vederea introducerii lui $\hat{K}_e$ în matricea de rigiditate globală trebuie să se facă trecerea de la sistemul local la sistemul global de coordonate (X, Y, Z). Această trecere se realizează prin transformarea

$$\check{K}_e = A^T \hat{K}_e A, \tag{24}$$

în care A este matricea de rotire a axelor [1], [2].

5. RELAȚIILE DE CONSTRÎNGERE ALE ECHIVALENTULUI

În situațiile în care secțiunea de capitel a echivalentului coincide cu un nod al structurii, matricea $\check{K}_e$ se adună direct la matricea globală. În caz contrar, înainte de însumare, $\check{K}_e$ se raportează printr-o transformare matriceală, la deplasările unor noduri aflate în vecinătatea secțiunii de capitel. În fapt prin această operație se elimină din sistem deplasările capitelului. Transformarea matricei $\check{K}_e$ se realizează cu relația

$$K_e = T^T \check{K}_e T, \tag{25}$$

în care T este o matrice care conectează două seturi de deplasări date în sistemul global; pe de o parte Δc, vectorul deplasărilor capitelului, scris sub forma

$$\Delta c = [V_x, V_y, V_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z], \tag{26}$$

iar pe de altă parte, Δp, vectorul ale cărui componente sînt acele deplasări ale structurii față de care se raportează matricea de rigiditate a echivalentului. Relația de conexiune

$$\Delta c = T \Delta p \tag{27}$$

este de fapt o relație de constrîngere prin aceea că deplasărilor capitelului, Δc, li se impun, prin intermediul matricei T, valori care depind de amplitudinea deplasărilor Δp.

Matricea T poate impune conexiuni „elastice" ca în [6], sau conexiuni „rigide". În continuare se vor prezenta trei tipuri de relații de constrîngere rigidă, adecvate unor situații concrete de conectare a echivalentului la suprastructură.

5.1. CONSTRÎNGERI TIP 1

În situațiile în care capitelul coloanei C se consideră legat, prin intermediul unui braț rigid, de un nod P al suprastructurii, matricea T are următoarea alcătuire:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -(Z_p - Z_c) & (Y_p - Y_c) \\ 0 & 1 & 0 & (Z_p - Z_c) & 0 & -(X_p - X_c) \\ 0 & 0 & 1 & -(Y_p - Y_c) & (X_p - X_c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{28}$$

În (28), X_c, Y_c și Z_c reprezintă coordonatele capitelului față de sistemul global, iar X_p, Y_p, și Z_p, coordonatele nodului P, față de aceleași axe (fig. 3). Evident, vectorul Δp din (27) are drept componente deplasările nodului P.

Matricea (28) se utilizează mai ales atunci cînd fundarea pe coloane se face prin intermediul unui radier rigid.

5.2. CONSTRÎNGERI TIP 2

Există situații în care nu toate gradele de libertate ale structurii sînt independente, unele dintre ele fiind tributare unui număr redus de parametri. Cazul platelajelor infinit rigide la forfecare în planul lor [5] este edificator în această privință. În situații de acest fel, capitelul echivalentului trebuie considerat ca fiind legat rigid de două noduri. Primul, nodul de structură P cel mai apropiat, controlează translația normală pe platelaj și cele două rotiri ortogonale din planul platelajului. Al doilea nod, O, comun pentru toți echivalenții structurii, controlează deplasările de corp rigid ale platelajului. Considerînd că platelajul este amplasat într-un plan paralel cu planul XOZ al sistemului global, vectorul Δp din (27) este

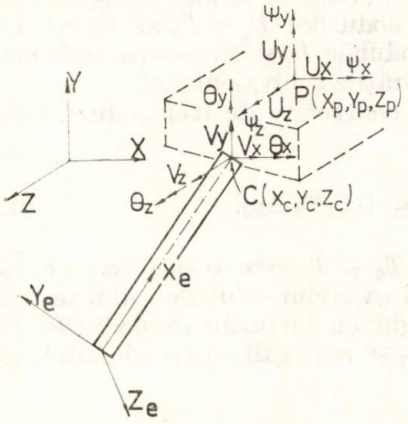


Fig. 3. — Nodurile în relație la constringeri tip 1.

$$\Delta p = [U_x,\ U_y,\ U_z,\ \psi_x,\ \psi_y,\ \psi_z] \qquad (29)$$

iar matricea T din aceiași relație se scrie astfel :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -(Z_0-Z_c) & (Y_p-Y_c) \\ 0 & 1 & 0 & (Z_p-Z_c) & 0 & -(X_p-X_c) \\ 0 & 0 & 1 & -(Y_p-Y_c) & (X_0-X_c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \qquad (30)$$

Semnificația notațiilor folosite în (29) și (30) rezultă din figura 4.

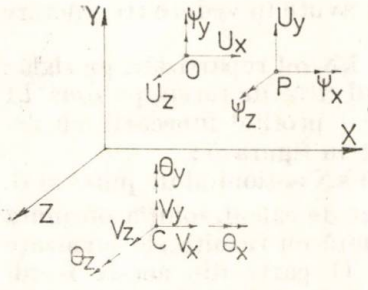


Fig. 4 — Nodurile în relație la constringeri tip 2.

5.3. CONSTRÎNGERI TIP 3

Se rescrie relația (27) sub forma

$$\Delta s = T\Delta p = [\xi_1 T_1,\ \xi_2 T_2]\begin{bmatrix}\Delta p_1 \\ \Delta p_2\end{bmatrix} = \\ = \xi_1 T_1 \Delta p_1 + \xi_2 T_2 \Delta p_2 \qquad (31)$$

în care Δp_1 și Δp_2 sînt vectorii deplasărilor a două noduri, P_1 și P_2, care încadrează capitelul echivalentului, iar T_1 și T_2 reprezintă matricele de constrîngere aferente. ξ_1 și ξ

sînt coeficienţi de pondere, cu valori între zero şi unu, care satisfac condiţia

$$\xi_1 + \xi_2 = 1.$$

T_1 şi T_2 se obţin din matricea T (28), înlocuind indicele p cu p_1, respectiv, p_2.

Relaţia (31) se utilizează în situaţiile în care se admite că rigidităţile echivalentului se raportează la deplasările nodurilor P_1 şi P_2 ale structurii, sau, mai potrivit spus, cînd fiecare din nodurile P_1 şi P_2 controlează, proporţional cu ξ_1 şi ξ_2, cîte o parte din rigidităţile echivalentului.

Dacă rigidităţile echivalentului sînt controlate de trei noduri, relaţia (31) se înlocuieşte cu

$$\Delta s = \xi_1 T_1 \Delta p_1 + \xi_2 T_2 \Delta p_2 + \xi_3 T_3 \Delta p_3. \tag{32}$$

Semnificaţia notaţiilor Δp_1, Δp_2, Δp_3, T_1, T_2 şi T_3 este aceiaşi ca în cazul precedent, cu precizarea că de această dată capitelul echivalentului se consideră amplasat în interiorul unui triunghi cu vîrfurile în nodurile P_1, P_2 şi P_3. Coeficienţii de pondere ξ_1, ξ_2 şi ξ_3 se iau egali cu coordonatele de arie [1] ale capitelului.

6. EXEMPLU DE CALCUL

Pentru a evalua posibilităţile echivalentului descris aici, comparativ cu trei propuneri anterioare, s-a calculat un tronson dintr-o structură portuară. Tronsonul sub formă de cadru plan, este reprezentat schematic în figura 5. Stîlpul de la apă al cadrului este realizat dintr-o coloană cu diametrul de 2,0 m. La uscat sînt trei coloane cu diametrul de 1,18 m, solidarizate la capitel printr-un radier rigid. Au fost luate în consideraţie trei ipoteze de fundare :

— Ipoteza a : $L1 = 8{,}0$ m, $L2 = 6{,}0$ m, $L3 = 10{,}25$ m, $m1 = m2 = 2000$ kN/m^4, $m3 = 3000$ kN/m^4 ;
— Ipoteza b : $L1 = 8{,}0$ m, $L2 = 6{,}0$ m, $L3 = 10{,}25$ m, $m1 = 2000$ kN/m^4, $m2 = m3 = 6000$ kN/m^4 ;
— Ipoteza c : $L1 = 8{,}0$ m, $L2 = 16{,}0$ m, $L3 = 20{,}0$ m, $m1 = 2000$ kN/m^4, $m2 = 6000$ kN/m^4, $m3 = 6000$ kN/m^4.

Pentru fiecare ipoteză de fundare au fost avute în vedere trei ipoteze de încărcare :

— Ipoteza I : sarcină verticală de 100 kN/ml repartizată pe riglă ;
— Ipoteza II : lunecarea spre apă a unui strat de teren, pe zona $L1$ a coloanelor de la uscat — profilul lunecării, cu deplasare maximă de 2,825 cm, este reprezentat în figura 5 ;
— Ipoteza III : forţă orizontală $Q = 1000$ kN acţionînd în punctul G.

Structura a fost analizată în patru ipoteze de calcul, soluţia obţinută cu echivalentul descris anterior fiind confruntată cu rezultatele furnizate de procedeele de calcul din [23], [10] şi [13]. O parte din aceste rezultate, desemnate prin numărul ipotezei de calcul şi prin referinţa bibliografică, sînt reproduse în tabelul 1.

Procedeul de calcul descris în [23] preconizează aplicarea metodei deplasărilor asupra întregii structuri. Coloanele, ca și suprastructura, se împart în elemente, pe lungimea fiecărui element de coloană parametrul m al terenului considerîndu-se constant. Soluția obținută pe această cale servește drept etalon de comparație.

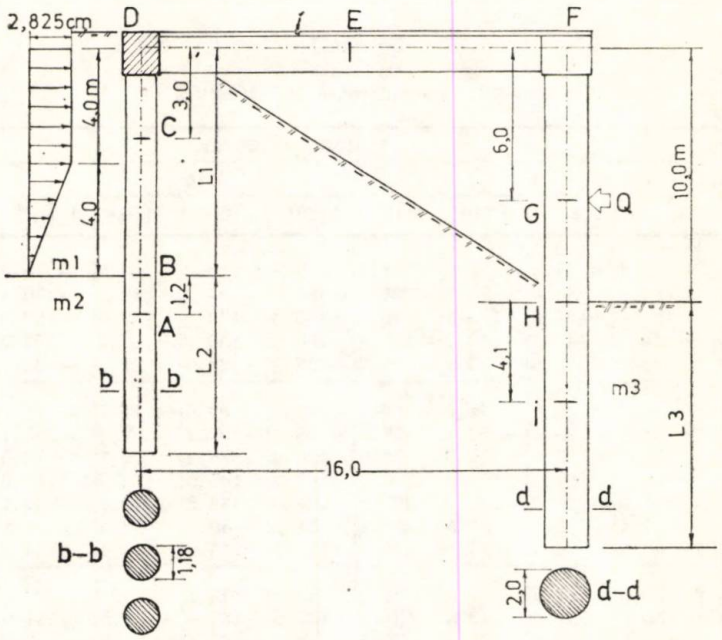


Fig. 5. — Cadru pe coloane.

Echivalenții sînt utilizați în ipotezele de calcul 2 (echivalentul prezentat în acest articol), 3 [10] și 4 [13]. Ei înlocuiesc coloanele reale numai pe zonele $L2$ și $L3$. Pe zona $L1$, pe care coloanele de la uscat sînt solicitate de stratul de pămînt în mișcare, se admite o variație în trepte a lui $m1$. La fel ca în ipoteza 1 de calcul, zona $L1$ este împărțită în 8 părți egale. S-a optat pentru această schematizare în vederea confruntării celor patru procedee de calcul și în cazul unei solicitări caracteristice coloanelor pasive [24].

Toate calculele au fost efectuate cu ajutorul versiunii pentru minicalculator a programului PASAJ prezentat anterior în [5], [6]. Lățimea de conlucrare cu terenul s-a luat de 1,98 m pentru coloanele de la uscat și de 2,7 m pentru cea de la apă. Cu intenția de a analiza posibilitățile echivalenților numai din punctul de vedere al rigidităților de încovoiere, s-a admis că deplasările pe verticală ale secțiunilor de la capitelul celor patru coloane sînt blocate.

După cum era de așteptat, rezultatele obținute indică o variație redusă a momentelor încovoietoare din suprastructură în raport cu schimbarea ipotezelor de fundare. În aceste condiții este firesc ca nici caracte-

risticile echivalenților, determinate prin procedee diferite, să nu influențeze în mod semnificativ aceste eforturi. Pe de altă parte, eforturile din coloane variază atît în funcție de modificarea condițiilor de fundare, cît și în funcție de echivalent.

În cazul coloanelor lungi (ipoteza c), rezultatele furnizate de cele patru procedee de calcul sînt apropiate. Din acest motiv în tabelul 1 au

Tabelul 1

Momente încovoietoare în structură

încărcare	secțiune	ipoteza de fundare								
		a				b				c
		1 [23]	2	3 [10]	4 [13]	1 [23]	2	3 [10]	4 [13]	2
I	*B*	— 2,4	— 2,4	— 1,9	—1,4	— 0,5	— 0,6	— 0,3	— 0,2	— 0,1
	D	— 84,6	— 84,6	— 86,5	— 87,4	— 88,9	— 88,9	— 90,2	— 90,4	— 91,3
	E	197,7	197,8	195,7	195,6	193,4	193,5	192,0	192,3	191,3
	F	—146,7	—146,7	—148,7	—147,8	—150,9	—150,9	—152,7	—151,5	—152,8
	H	— 39,2	— 39,3	— 35,5	— 29,3	— 28,7	— 28,9	— 27,2	— 23,7	— 21,2
II	*A*	— 36,1	— 36,2	— 45,8	— 52,2	— 69,6	— 69,6	— 71,7	— 71,0	— 63,5
	B	— 25,4	— 25,4	— 32,1	— 38,5	— 52,4	— 52,2	— 52,5	— 53,1	— 56,2
	C	73,0	73,0	75,0	72,0	76,4	76,4	79,3	76,5	76,8
	D	164,1	164,3	163,9	150,6	165,2	165,5	170,2	159,0	156,9
	F	—226,9	—226,7	—231,0	—227,8	—234,6	—234,5	—241,7	—237,9	—240,3
	H	7,4	6,9	31,5	57,1	51,8	50,6	58,9	74,8	85,9
	I	66,1	66,8	94,3	120,9	113,2	113,9	124,4	140,3	173,3
III	*B*	21,5	21,5	22,3	22,3	23,1	23,1	22,2	22,3	22,1
	D	—150,6	—150,8	—143,8	—139,6	—137,5	—137,8	—134,5	—131,9	—128,6
	F	— 42,8	— 43,0	— 35,9	— 39,9	— 28,3	— 28,4	— 21,0	— 25,9	— 21,6
	G	308,0	308,2	301,4	284,7	288,8	289,3	288,1	277,5	273,4
	H	141,9	142,4	126,3	101,2	100,1	101,1	94,1	79,7	70,0
	I	7,0	6,5	— 12,9	— 38,6	— 40,2	— 40,9	— 50,2	— 64,0	— 92,0

fost reproduse numai momentele obținute în ipoteza 2. Și în celelalte două ipoteze de fundare, echivalentul descris aici conduce la rezultate aproape identice cu soluția etalon [23]. În contrast cu acestea, rezultatele din ipotezele 3 și 4 se deteriorează pe măsură ce scade gradul de încastrare al coloanelor în teren. Dacă se compară eforturile maxime de la capitel, aceste eforturi reflectînd cel mai bine capacitatea echivalentului de a se substitui coloanei reale, se constată diferențe importante. Astfel, în raport cu primele două ipoteze de calcul, în cazul procedeului din [10] se ajunge la abateri de circa 25%, iar în cazul procedeului din [13], la circa 50%. Sub cota de capitel a echivalenților aceste abateri sînt chiar mai mari.

Se menționează, că în cazul ipotezelor de calcul 3 și 4, eforturile din lungul fiecărei coloane s-au determinat printr-un calcul de coloană independentă solicitată de eforturile T și M de la capitelul echivalentului. Pentru ipoteza 2 de calcul, programul determină eforturile în lungul coloanelor în aceiași secvență de rulare în care se determină și restul eforturilor din structură.

7. COMENTARII ȘI CONCLUZII

Echivalentul prezentat aici conduce la rezultate corecte indiferent de condițiile de fundare. Micile diferențe față de [23] pot fi puse pe seama faptului că cele trei caracteristici ale echivalentului, L_e, t și $(EI)_e$ au fost determinate pe baza unei variații continue a parametrului m [5, 6, 24], în timp ce în [23] se admite numai o variație în trepte. Se menționează că și în situația în care coloanele sînt înlocuite cu echivalenți pe întreaga lor lungime se obțin aceleași eforturi.

Rezultatele obținute prin aplicarea procedeelor de calcul descrise în [10] și [13] arată că determinarea caracteristicilor echivalentului pe baza unor ipoteze simplificatoare influențează negativ soluția în cazul coloanelor cu un grad redus de încastrare. După cum s-a arătat anterior pornind de la teoria echivalenților, forma corectă a echivalentului se obține prin satisfacerea simultană a celor trei condiții puse rigidităților de încovoiere. Or, din acest punct de vedere, procedeele [10] și [13] sînt deficitare întrucît în amîndouă se neglijează condiția referitoare la rigiditățile de cuplare.

Pe de altă parte, echivalentul reprezentat prin relațiile (9 — 9″) sau (11) nu este unica formă corectă care se poate imagina. Alternative pot oferi barele cu moment de inerție variabil sau barele cu legături imperfecte la extremități, dacă condițiile de echivalență sînt corect scrise. De exemplu, matricea de flexibilitate a sistemului de două bare prezentat în [13] poate fi adusă la forma din membrul drept al egalității (10), dacă se introduce notația

$$t = \frac{12(EI)_e}{R_e L_e^3} \tag{33}$$

în care R_e reprezintă rigiditatea axială a barei orizontale.

Comparativ cu eventualele soluții alternative, echivalentul prezentat aici are avantajul de a fi caracterizat printr-o matrice de rigiditate standard, inclusă în marea majoritate a programelor existente în uz.

Cîteva notații :

$\bar{K}_e, \tilde{K}_e, \check{K}_e, \hat{K}_e, K_e$ — matricea de rigiditate ale echivalentului;
K_H, K_M, K_r, K_P, K_T — rigiditățile coloanei reale;
$(EI)_e, L_e, t$ — caracteristicile echivalentului;
$y_H, y_M, y_P, \varphi_H, \varphi_M, \varphi_T$ — deplasările capitelului coloanei;
T — matricea de constrîngere.

Primit la redacție la 19 februarie 1986

BIBLIOGRAFIE

1. C. AVRAM și colab., *Structuri din beton armat — Metoda elementelor finite — Teoria echivalenților*, Editura Academiei R.S.R., București, 1984.
2. J. S. PRZEMIENIESKI, *Theory of matrix structural analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1968.
3. R. H. GALLAGHER, *Finite element analysis — Fundamentals*, Prentice-Hall, New Jersey, 1975.

4. D. G. ROW G. H. POWELL, *A substructure technique for nonlinear static and dynamic analysis*, Report No. UCB/EERC—78/15, University of California, 1978.
5. G. ONU, *Răspunsul elastic al podurilor din beton armat fundate pe coloane*, simpozionul „*Interacțiunea construcțiilor cu mediul înconjurător*", Vol. 2, Iași, 13—14 octombrie 1978.
6. G. ONU, *The elastic response of the pile foundation bridges*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Mec. Appl., **25**, No. 6, 893—912 (1980).
7. M. T. DAVISSON, K.E. ROBINSON, *Bending and buckling of partially embedded piles*, în *Proc. 6th Int. Conf. S.M. & F.E.*, Vol. 2, p. 246—253, 1965.
8. H. LEHR, *Fundații — Exemple de calcul*, Editura Tehnică, București, 1967.
9. K. S. SILIN, H. M. GOLOTOV, U. V. KARPINSKI, *Fundamenti opormostov*, Moskva, 1958.
10. A. J. FRANCIS, *Analysis of pile groups with flexural resistance*, J.S.M.F.D., ASCE, **90**, SM3, p. 1—23 (1964).
11. K. NAIR, H. GRAY, N. DONOVAN, *Analysis of pile group behaviour*, ASTM, STP 444 p. 118—159, 1969.
12. H. G. POULOS, E. H. DAVIS, *Pile foundation Analysis and design*, Wiley, New York, 1980.
13. G. OBLEMENCO, Calculul structurilor spațiale cu echivalenți elastici pentru substructuri, *Bul. științ. ICB*, Nr. 1, p. 89 (1985).
14. N. UNGUREANU și colab., Asupra interacțiunii cu terenul a structurilor fundate pe piloți, simpozionul „*Interacțiunea construcțiilor cu mediul înconjurător*", Vol. 2, Iași, 1978.
15. A. STANCIU și colab., Metodă aproximativă de calculul structurilor plane fundate pe coloane, simpozionul „*Interacțiunea construcțiilor cu mediul înconjurător*", Vol. 2, Iași, 1978.
16. M. F. RANDOLPH, The response of flexible piles to lateral loading. Géotechnique, *31*, No. 2, p. 247—259 (1981).
17. G. ONU, Calculul fundatiilor pe coloane în domeniul neliniar elastic. St. Cerc. Mec. Apl., **40**, 5, p. 697—714 (1980).
18. G. ONU Calculul radierelor rigide pe coloane, St. Cerc. Mec. Apl., **33**, 4, p. 721—752 (1974).
19. M. F. Randolph, *Analysis of the behaviour of piles subjected to torsion*, CUED/D — Soils TR 89, Cambridge University, 1980.
20. M. F. RANDOLPH, *A computer program for the analysis and design of pile groups under general loading conditions*, CUED/D—Soils TR 91, Cambridge University, 1980.
21. G. ONU, Includerea efectului forței tăietoare în matricele elementului de grindă dreaptă, St. Cerc. Mec. Apl., *41*, 4, p. 459—468 (1982).
22. A. CARACOSTEA, Rezistența materialelor și teoria elasticității, în *Manual pentru calculul construcțiilor*, Editura Tehnică, București, 1977.
23. F. MIYAHARA, J. G. Ergatondis, Matrix analysis of structure-foundation interaction, *J.S.D., ASCE*. No. ST1, p. 251—265, 1976.
24. G. ONU, O soluție consistentă pentru calculul coloanelor pasive, St. Cerc. Mec. Apl., **45**, p. 36—45, (1986).

CONTRIBUȚII LA UTILIZAREA CARBURILOR METALICE SINTERIZATE ÎN FORAJ. II*)

de DORIN CONSTANTINESCU
Institutul de Cercetare Științifică și Inginerie Tehnologică pentru Mecanică Fină și Scule, ICSITMFS — București

Lucrarea prezintă studiul indicatorilor de uzare și ai rezistențelor la uzură, în scopul optimizării duratelor de funcționare ale carburilor metalice sinterizate, utilizate la armarea sculelor de foraj.
Partea a doua a lucrării conține studiul rezistențelor la uzură a carburilor metalice sinterizate, cu interpretarea rezultatelor și concluzii privind recomandările de folosire la aplicarea diferitelor metode de foraj.

4. REZISTENȚA LA UZURĂ A CARBURILOR METALICE SINTERIZATE

Indicatorii de uzare, descriși, sub diferite forme, prin relațiile analitice (3.1) ... (3.14) și exprimînd capacitatea rocilor de a uza partea activă a sculei dislocante, au valorile raportate la o anumită carbură metalică sinterizată, considerată ca etalon. Pentru categoria de roci constituind bază de comparație cu rocile din celelalte categorii [10] se definesc *indicatorii absoluți ai rezistențelor la uzură* ai CMS etalon prin

$$(R_O)_e = 1/(u_O)_b = K_O \cdot (K)_e \tag{4.1}$$

pentru rezistența (parțială) la uzura prin oboseală cu șoc,

$$(R_A)_e = 1/(u_A)_b = K_A \cdot (R_u)_e \tag{4.2}$$

pentru rezistența (parțială) la uzura abrazivă și, aplicînd și relația (3.5),

$$(R)_e = 1/(u)_b = 1/[1/(R_O)_e + 1/(R_A)_e] \tag{4.3}$$

pentru rezistența globală la uzură,
în care $(K)_e$ și $(R_u)_e$ reprezintă rezilienta și respectiv rezistența la uzura abrazivă pentru etalon, iar

$$K_O = 1/u_O \cdot (K)_e, \tag{4.4}$$

$$K_A = 1/u_A \cdot (R_u)_e \tag{4.5}$$

sînt constantele corespunzătoare de transformare dimensională, specifice fiecărui tip de dinamică de uzură, deci fiecărei metode de foraj.

Utilizînd și (3.12) ... (3.14), acești indicatori de rezistență la uzură pot fi puși sub forma

$$u_O = i_O \cdot (u_O)_b = i_O/(R_O)_e, \tag{4.6}$$

$$u_A = i_A \cdot (u_A)_b = i_A/(R_A)_e \tag{4.7}$$

și, conform (3.5),

$$u = i_O/(R_O)_e + i_A/(R_A)_e = i/(R)_e, \tag{4.8}$$

---

*) Partea întîi a apărut în Studii și cercetări de mecanică aplicată tomul 45, nr. 6.

de unde

$$\frac{(R)_e}{i} = \frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{(R_O)_e}{i_O}} + \dfrac{1}{\dfrac{(R_A)_e}{i_A}}}, \tag{4.9}$$

relații care corespund uzării CMS etalon, de către diferitele roci, avînd indicatorii relativi de uzare i_O, i_A, și i.

Rezultă *indicatorii absoluți ai rezistențelor la uzură*, general valabili,

$$R_O = K_O \cdot K \tag{4.10}$$

pentru rezistența la oboseală cu șoc,

$$R_A = K_A \cdot R_u \tag{4.11}$$

pentru rezistența la abraziune și

$$R = 1/(1/R_O + 1/R_A) \tag{4.12}$$

pentru rezistența globală la uzură,
în care K și R_u sînt rezilienta și respectiv rezistența la uzura abrazivă, pentru diferitele CMS.

Avîndu-se în vedere (4.1) ... (4.3), se notează *indicatorii relativi ai rezistențelor la uzură* cu

$$r_O[\%/100] = R_O/(R_O)_e = R_O \cdot (u_O)_b = K/(K)_e \tag{4.13}$$

pentru rezistența la uzura de oboseală,

$$r_A[\%/100] = R_A/(R_A)_e = R_A \cdot (u_A)_b = R_u/(R_u)_e \tag{4.14}$$

pentru rezistența la uzura abrazivă și

$$r[\%/100] = R/(R)_e = R \cdot (u)_b \tag{4.15}$$

pentru rezistența globală.

La uzarea în roca bază de comparație, se evidențiază, conform (4.13) ... (4.15), indicatorii relativi pentru CMS etalon,

$$(u)_b = (u_O)_b + (u_A)_b = \frac{1}{\dfrac{R_O}{r_O}} + \frac{1}{\dfrac{R_A}{r_A}} = \frac{1}{\dfrac{R}{r}} = 1/(R)_e \tag{4.16}$$

și, pentru fiecare tip de CMS,

$$u'_O = (u_O)_b/r_O = 1/R_O \tag{4.17}$$

$$u'_A = (u_A)_b/r_A = 1/R_A, \tag{4.18}$$

de unde

$$u' = 1/R_O + 1/R_A = (u)_b/r = 1/R = 1/(R)_e\, r \tag{4.19}$$

verificîndu-se în felul acesta și relația (4.12).

În sfîrșit, plecîndu-se de la (4.6) ... (4.8), adică

$$u_O = i_O \cdot r_O / R_O, \tag{4.20}$$

$$u_A = i_A \cdot r_A / R_A, \tag{4.21}$$

$$u = \frac{1}{\frac{R_O}{i_O \cdot r_O} + \frac{R_A}{i_A \cdot r_A}} = i \cdot r / R = i/(R)_e, \tag{4.22}$$

rezultă indicatorii absoluți de uzare ai fiecărui tip de CMS, în diferitele roci de forat,

$$u_O'' = u_O / r_O = i_O \cdot (u_O)_b / r_O = i_O / R_O \tag{4.23}$$

pentru uzura prin oboseală la șoc,

$$u_A'' = u_A / r_A = i_A \cdot (u_A)_b / r_A = i_A / R_A \tag{4.24}$$

pentru uzura abrazivă și

$$u'' = u/r = i \cdot (u)_b / r = \frac{1}{\frac{R_O}{i_O} + \frac{R_A}{i_A}} = i/R = i/r \cdot (R)_e, \tag{4.25}$$

ai căror indicatori relativi de uzare sînt, în mod corespunzător,

$$i_O'' = u_O'' / (u_O)_b = i_O / r_O, \tag{4.26}$$

$$i_A'' = u_A'' / (u_A)_b = i_A / r_A, \tag{4.27}$$

$$i'' = u'' / (u)_b = i/r. \tag{4.28}$$

Pentru compararea reciprocă a rezistențelor la uzură ale diferitelor tipuri de CMS, se definesc și :

— *indicatorii rapoartelor ponderilor rezistențelor la uzură*

$$\rho_{OA}[\%/100] = R_O / R_A = K / R_u, \tag{4.29}$$

$$\rho_{AO}[\%/100] = R_A / R_O = R_u / K, \tag{4.30}$$

$$(\rho_{OA} = 1/\rho_{AO}),$$

exprimînd fiecare raportul dintre indicatorii absoluți (parțiali) ai rezistențelor la uzură, prin oboseală și abrazivă și respectiv invers, și — *indicatorii relativi ai ponderilor rezistențelor la uzură* corespunzători

$$r_{OA} = \rho_{OA} / (\rho_{OA})_e = K \cdot (R_u)_e / R_u \cdot (K)_e \tag{4.31}$$

și, respectiv,

$$r_{AO} = \rho_{AO} / (\rho_{AO})_e = R_u \cdot (K)_e / K \cdot (R_u)_e, \tag{4.32}$$

$$(r_{OA} = 1/r_{AO}),$$

iar pentru compararea comportării la uzură a diferitelor CMS, folosite în diferite roci, se utilizează *indicatorii relativi ai duratelor de uzare*, în raport cu durata de uzare a CMS etalon în roca de bază, specifici fiecărei metode

de foraj,

$$\theta = t/(t)_e = 1/i''. \tag{4.33}$$

Într-adevăr, dacă, conform (3.2), uzura CMS etalon în roca de bază corespunde $(u)_b = (Y)_{be} \cdot (t)_e$, uzura unei CMS oarecare, într-o altă rocă (deci aplicînd un regim de lucru diferit) și dinamica de uzare respectivă vor fi diferite, la o durată de uzare identică, adică $u'' = Y'' \cdot (t)_e$. Aceeași uzură, ca a CMS etalon, va rezulta pentru o durată t diferită, deci $(u)_b = Y'' \cdot t$, de unde $(u)_b/u'' = t/(t)_e = \theta$, ca la (4.28) și (4.33).

În scopul satisfacerii necesităților de foraj, avîndu-se în vedere sortimentele uzuale cunoscute [8], se propune utilizarea a cinci tipuri de carburi metalice sinterizate, pe bază de carbură de wolfram și cobalt, notate cu F10 ... F50 și definite prin conținutul mediu de cobalt, variind între 16 și respectiv 6%, precum și prin valorile rezilienței și rezistenței la uzura abrazivă, tabelul 4.1. Pentru fiecare tip, se pot realiza diferite sortimente, care să confere în mod corespunzător și celelalte caracteristici principale,

TABELUL 4.1. Tipurile de CMS recomandate

Nr. crt.	Simbol Tip	Sort	% Co, medie	CARACTERISTICI REZISTENTE la uzură: Reziliență Charpy K_c J.		Rezistență la uzură abrazivă K_u (coef.)		generale, daN/mm²: Încovoiere, σ_i	Compresiune, σ_c
1.	F10	F11	16	2,95	3,05	3		340	410
		F16			2,85			290	390
2.	F20	F21	13	2,60	2,70	6		325	435
		F26*			2,50			280	420
3.	F30	F31	11	2,20	2,40	6,5		310	460
		F36			2,00			275	435
4.	F40	F41	9	1,70		10	7	240	435
		F46					13	310	520
5.	F50	F51	6	1,35		25	15	220	520
		F56					35	200	545

* completare de gomă

în tabel indicîndu-se informativ, spre exemplificare, cîte două sortimente. Caracteristicile sortimentelor de CMS se asigură prin alegerea corespunzătoare a granulațiilor și a proporțiilor granulațiilor din amestecul de pulberi utilizat, distribuirea corectă a fazelor și porozitatea foarte redusă (de exemplu de maxim AO2...AO4, conform ISO) avînd de asemenea o importanță deosebită în obținerea de proprietăți fizico-mecanice superioare [11].

Compararea caracteristicilor tipurilor de CMS se face prin indicatorii de pondere și prin indicatorii relativi, tabelul 4.2 (variațiile medii sînt schematizate în fig. 4.1 și 4.2), amplasarea simbolizării din abscisă corespunzînd conținutului mediu de cobalt, din tabelul 4.1), considerînd ca etalon carburile sinterizate de tip F10 (pentru indicatorul r_o, calculat cu valorile exacte ale rezilienței K, conform [8], s-a avut în vedere și tipul F50). Se constată că, de la tipurile F10 către F50, rezistențele la uzură abrazivă

cresc în raport cu rezistențele la uzura prin oboseală cu șoc de peste 18 ori, rezistențele la uzura abrazivă crescînd de 5 ... 11,7 ori, iar cele de rezistență la oboseală scăzînd numai cu ceva mai mult de două ori.

Valorile medii ale indicatorilor rezistențelor absolute la uzură, precum și ale indicatorilor relativi ai rezistențelor globale, sînt date în tabelul

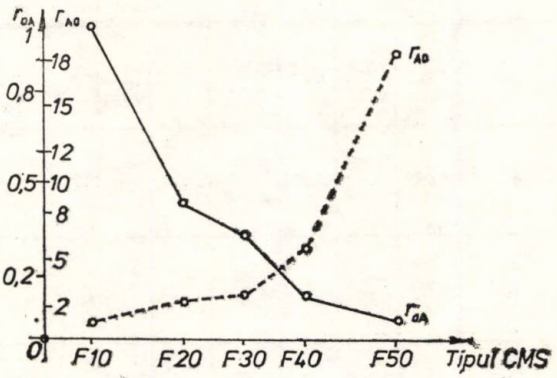


Fig. 4.1

4.3, constatîndu-se că rezistențele globale sînt maxime pentru CMS de tip :

— F50, la forajul rotativ,
— F10 (sau F20), la forajul pe cutant și
— F20, la forajul rotopercutant axial.

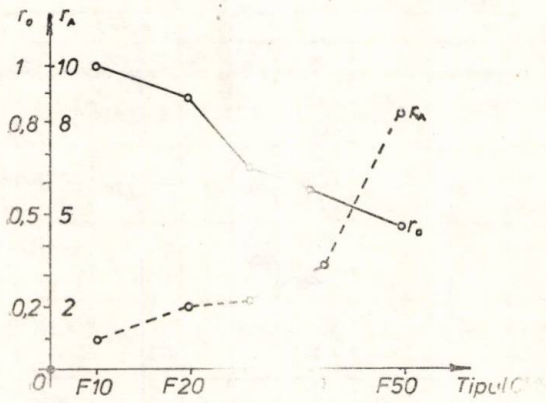


Fig. 4.2

Recomandările de utilizare rațională, în activitatea de **foraj**, a diferitelor tipuri de carburi metalice sinterizate, rezultă din analiza comparativă a valorilor indicatorilor de uzare, avîndu-se în vedere și faptul că, față de celelalte tipuri, CMS cu conținutul ridicat de cobalt au **prețurile** și dificultățile de procurare mai mari și cu tendință de creștere, **în viitor.**

Tabelul 4.2 Compararea caracteristicilor tipurilor de CMS

Nr. crt	Simbol Tip	Simbol Sort	Rezistentele la uzura K	Rezistentele la uzura R_u	Indicatorii rezistentelor la uzura (partiale) Rapoarte pondere ρ_{oA}	ρ_{Ao}	Relativi pondere r_{oA}	r_{Ao}	Relativi r_o	r_A
1	F10	F11 / F16	2,95 / 3,05 / 2,85	3	0,983 / 1,017 / 0,950	1,017 / 0,983 / 1,053	1 / 1 / 0,934	1 / 1 / 1,071	1 (2,167) / 1 (2,25) 0,926 (2,083)	1
2	F20	F21 / F26	2,60 / 2,70 / 2,50	6	0,433 / 0,450 / 0,417	2,308 / 2,222 / 2,398	0,441 / 0,443 / 0,410	2,268 / 2,257 / 2,439	0,885 (1,917) / 0,889 (2,0) 0,815 (1,833)	2,0
3	F30	F31 / F36	2,20 / 2,40 / 2,00	6,5	0,338 / 0,369 / 0,308	2,542 / 2,710 / 3,247	0,344 / 0,363 / 0,303	2,907 / 2,755 / 3,3	0,750 (1,625) / 0,778 (1,75) 0,667 (1,5)	2,167
4	F40	F41 / F46	1,70	10 / 7 / 13	0,170 / 0,243 / 0,131	5,882 / 4,115 / 7,634	0,173 / 0,239 / 0,129	5,780 / 4,184 / 7,752	0,577 (1,250) / 0,556 (1,25)	3,333 / 2,333 / 4,333
5	F50	F51 / F56	1,35	25 / 15 / 35	0,054 / 0,090 / 0,039	18,519 / 11,111 / 25,641	0,055 / 0,089 / 0,038	18,21 / 11,236 / 26,316	0,462 (1) / 0,444 (1)	8,333 / 50 / 11,667

Tabelul 4.3 Indicatorii rezistentelor la uzura (medii) ai CMS

Nr. crt.	Simbol tip CMS	Varianta a / Varianta b — Metoda de foraj: Rotativ r_o	r_A	r	R_o	R_A	R	Percutant r_o	r_A	r	R_o	R_A	R	Rotopercutant (axial) r_o	r_A	r	R_o	R_A	R
1	F 10	2,167	0,12	0,13 / 0,12	10,835	0,067 / 0,017	0,066 / 0,017	1	1	1	0,333	4,0 / 1,0	0,308 / 0,25	1,130	0,5	0,80 / 0,61	0,565	0,5 / 0,125	0,269 / 0,102
2	F 20	1,917	0,24	0,26 / 0,25	9,585	0,133 / 0,033	0,132 / 0,033	0,885	2,0	0,92 / 1,03	0,295	8,0 / 2,0	0,284 / 0,257	1	1	1	0,5	1,0 / 0,25	0,333 / 0,167
3	F 30	1,625	0,26	0,28 / 0,27	8,125	0,144 / 0,036	0,142 / 0,036	0,75	2,167	0,79 / 0,90	0,25	8,696 / 2,164	0,243 / 0,224	0,848	1,083	0,91 / 0,99	0,424	1,083 / 0,271	0,305 / 0,185
4	F 40	1,25	0,4	0,43 / 0,41	6,25	0,222 / 0,056	0,215 / 0,055	0,577	3,333	0,62 / 0,73	0,192	13,333 / 3,333	0,190 / 0,182	0,625	1,667	0,76 / 1,11	0,326	1,167 / 0,417	0,259 / 0,183
5	F 50	1	1	1	5,0	0,556 / 0,139	0,5 / 0,135	0,462	8,333	0,50 / 0,60	0,154	33,333 / 8,333	0,153 / 0,151	0,522	4,167	0,74 / 1,25	0,261	4,167 / 1,042	0,246 / 0,209
Tip CMS etalon		F 50						F 10						F 20					
ROCA baza		MA						E						Ea					
$(u_o)_b$		0,2						3,0						2,0					
$(u_A)_b$		1,8 / 7,2						0,5 / 2,0						1,0 / 4,0					
k_o		3,704						0,113						0,169					
k_A		0,022 / 0,006						0,667 / 0,167						3,0 / 0,083					

Tabelul 4.4 Compararea uzurilor CMS la forajul ROTATIV

Nr crt.	Simbol ROCA	Simbol CMS	Varianta a / Varianta b u_o''	u_A''	u''	i_o''	i_A''	i''	θ
1.	S	F10	0,046	1,875 / 7,5	1,92 / 7,546	0,231	1,042	0,96 / 1,02	1,04 / 0,98
		F20	0,052	0,9371 / 3,75	0,989 / 3,802	0,261	0,521	0,495 / 0,514	2,02 / 1,95
		F30	0,062	0,8651 / 3,462	0,927 / 3,524	0,307	0,481	0,463 / 0,476	2,16 / 2,1
		F40	0,08	0,5621 / 2,25	0,642 / 2,33	0,4	0,312	0,321 / 0,315	3,11 / 3,18
		F50	0,1	0,225 / 0,9	0,325 / 1,0	0,5	0,125	0,162 / 0,135	6,15 / 7,4
2.	Sa	F10	0,046	3,75 / 15,0	3,796 / 15,046	0,231	2,083	1,898 / 2,033	0,53 / 0,49
		F20	0,052	1,875 / 7,5	1,927 / 7,552	0,261	1,042	0,963 / 1,021	1,04 / 0,98
		F30	0,062	1,731 / 6,923	1,793 / 6,985	0,307	0,962	0,896 / 0,970	1,12 / 1,03
		F40	0,08	1,125 / 4,5	1,205 / 4,58	0,4	0,625	0,602 / 0,619	1,66 / 1,62
		F50	0,1	0,45 / 1,8	0,55 / 1,9	0,5	0,25	0,275 / 0,257	3,64 / 3,89
3.	SA	F10	0,046	7,5 / 30,0	7,546 / 30,046	0,231	4,167	3,773 / 4,08	0,27 / 0,25
		F20	0,052	3,75 / 15,0	3,802 / 15,052	0,261	2,083	1,901 / 2,034	0,53 / 0,49
		F30	0,062	3,462 / 13,846	3,524 / 13,908	0,307	1,923	1,762 / 1,879	0,57 / 0,53
		F40	0,08	2,25 / 9,0	2,33 / 9,08	0,4	1,25	1,165 / 1,227	0,861 / 0,81
		F50	0,1	0,9 / 3,6	1,0 / 3,7	0,5	0,5	0,5 / 0,5	2,0 / 2,0
4.	M	F10	0,092	3,75 / 15,0	3,842 / 15,092	0,461	2,083	1,921 / 2,039	0,52 / 0,49
		F20	0,104	1,875 / 7,5	1,979 / 7,604	0,522	1,042	0,989 / 1,028	1,01 / 0,97
		F30	0,123	1,731 / 6,923	1,854 / 7,046	0,615	0,962	0,927 / 0,952	1,08 / 1,05
		F40	0,16	1,125 / 4,5	1,285 / 4,66	0,8	0,625	0,642 / 0,63	1,56 / 1,59
		F50	0,2	0,45 / 1,8	0,65 / 2,0	1,0	0,25	0,325 / 0,27	3,08 / 3,7
5.	Ma	F10	0,092	7,5 / 30,0	7,592 / 30,092	0,461	4,167	3,796 / 4,066	0,26 / 0,25
		F20	0,104	3,75 / 15,0	3,854 / 15,104	0,522	2,083	1,927 / 2,041	0,52 / 0,49
		F30	0,123	3,462 / 13,846	3,585 / 13,969	0,615	1,923	1,792 / 1,888	0,56 / 0,53
		F40	0,16	2,25 / 9,0	2,41 / 9,16	0,8	1,25	1,205 / 1,238	0,83 / 0,81
		F50	0,2	0,9 / 3,6	1,1 / 3,8	1,0	0,5	0,55 / 0,513	1,82 / 1,95

Tabelul 4.4. (continuare)

Nr. crt.	Simbol ROCA	Simbol CMS	Varianta a / Varianta b u_o''	u_A''	u''	i_o''	i_A''	i''	θ
6	MA	F10	0,092	15,0 / 60,0	15,092 / 60,092	0,461	8,333	7,546 / 8,121	0,13 / 0,12
		F20	0,104	7,5 / 30,0	7,604 / 30,404	0,522	4,167	3,802 / 4,068	0,26 / 0,25
		F30	0,123	6,923 / 27,692	7,046 / 27,815	0,615	3,846	3,523 / 3,759	0,28 / 0,27
		F40	0,16	4,5 / 18,0	4,66 / 18,16	0,8	2,5	2,33 / 2,454	0,43 / 0,41
		F50	0,2	1,8 / 7,2	2,0 / 7,4	1	1	1	1
7	T	F10	0,138	5,625 / 22,5	5,763 / 22,638	0,692	3,125	2,881 / 3,059	0,35 / 0,33
		F20	0,166	2,812 / 11,25	2,968 / 11,406	0,782	1,562	1,484 / 1,541	0,67 / 0,65
		F30	0,185	2,596 / 10,385	2,781 / 10,57	0,923	1,442	1,391 / 1,428	0,72 / 0,7
		F40	0,24	1,687 / 6,75	1,927 / 6,99	1,2	0,937	0,964 / 0,945	1,04 / 1,06
		F50	0,3	0,675 / 2,7	0,975 / 3,0	1,5	0,375	0,487 / 0,405	2,05 / 2,47
8	Ta	F10	0,138	11,25 / 45,0	11,388 / 45,138	0,692	6,25	5,694 / 6,1	0,18 / 0,16
		F20	0,156	5,625 / 20,769	5,781 / 20,925	0,782	3,125	2,89 / 2,878	0,35 / 0,35
		F30	0,185	5,192 / 20,769	5,377 / 20,954	0,923	2,885	2,689 / 2,832	0,37 / 0,35
		F40	0,24	3,375 / 13,5	3,615 / 13,74	1,2	1,875	1,807 / 1,857	0,55 / 0,54
		F50	0,3	1,35 / 5,4	1,65 / 5,7	1,5	0,75	0,825 / 0,77	1,21 / 1,3
9	E	F10	0,185	7,5 / 30,0	7,685 / 30,185	0,923	4,167	3,842 / 4,079	0,26 / 0,25
		F20	0,209	3,75 / 15,0	3,959 / 15,209	1,043	2,083	1,979 / 2,055	0,51 / 0,49
		F30	0,246	3,462 / 13,846	3,708 / 14,092	1,231	1,923	1,854 / 1,904	0,54 / 0,53
		F40	0,32	2,25 / 9,0	2,57 / 9,32	1,6	1,25	1,285 / 1,259	0,78 / 0,79
		F50	0,4	0,9 / 3,6	1,3 / 4,0	2,0	0,5	0,65 / 0,54	1,54 / 1,85

Tabelul 4.5. Compararea uzurilor CMS, la forajul PERCUTANT

Nr. crt.	Simbol ROCA	Simbol CMS	Varianta a u_0''	Varianta a u_A''	Varianta a u''	Varianta b i_0''	Varianta b i_A''	Varianta b i''	Θ
1	M	F10	1,5	0,125 / 0,5	1,625 / 2,0	0,5	0,5	0,5 / 0,5	2,0 / 2,0
		F20	1,695	0,062 / 0,25	1,757 / 1,945	0,565	0,25	0,541 / 0,486	1,85 / 2,06
		F30	2,0	0,167 / 0,667	2,167 / 2,667	0,667	0,231	0,667 / 0,667	1,50 / 1,5
		F40	2,6	0,037 / 0,15	2,637 / 2,75	0,867	0,15	0,812 / 0,687	1,23 / 1,45
		F50	3,247	0,015 / 0,06	3,26 / 3,307	1,082	0,06	1,903 / 0,827	0,99 / 1,21
2.	Mo	F10	1,5	0,25 / 1,0	1,75 / 2,5	0,5	1,0	0,538 / 0,625	1,86 / 1,60
		F20	1,695	0,125 / 0,5	1,82 / 2,195	0,565	0,5	0,56 / 0,549	1,79 / 1,82
		F30	2,0	0,115 / 0,462	2,115 / 2,462	0,667	0,462	0,650 / 0,815	1,54 / 1,62
		F40	2,6	0,075 / 0,3	2,675 / 2,9	0,867	0,3	0,823 / 0,725	1,21 / 1,38
		F50	3,247	0,03 / 0,12	3,277 / 3,367	1,082	0,12	1,008 / 0,842	0,99 / 1,19
3.	MA	F10	1,5	0,5 / 2,0	2,0 / 3,5	0,5	2,0	0,615 / 0,875	1,62 / 1,14
		F20	1,695	0,25 / 1,0	1,945 / 2,695	0,565	1,0	0,598 / 0,674	1,57 / 1,48
		F30	2,0	0,231 / 0,923	2,231 / 2,923	0,667	0,923	0,686 / 0,731	1,46 / 1,37
		F40	2,6	0,15 / 0,6	2,75 / 3,2	0,867	0,6	0,846 / 0,8	1,18 / 1,25
		F50	3,247	0,06 / 0,24	3,307 / 3,487	1,082	0,24	1,018 / 0,872	0,98 / 1,15
4.	T	F10	2,25	0,1875 / 0,75	2,4375 / 3,0	0,75	0,75	0,75 / 0,75	1,33 / 1,33
		F20	2,542	0,094 / 0,375	2,636 / 2,917	0,847	0,375	0,811 / 0,729	1,23 / 1,37
		F30	3,0	0,087 / 0,346	3,087 / 3,346	1,0	0,346	0,95 / 0,837	1,05 / 1,20
		F40	3,899	0,056 / 0,225	3,955 / 4,124	1,3	0,225	1,217 / 1,031	0,82 / 0,97
		F50	4,87	0,022 / 0,09	4,892 / 4,96	1,623	0,09	1,505 / 1,24	0,66 / 0,81
5.	Ta	F10	2,25	0,375 / 1,5	2,625 / 3,75	0,75	1,5	0,806 / 0,937	1,24 / 1,07
		F20	2,542	0,187 / 0,75	2,729 / 3,293	0,847	0,75	0,84 / 0,823	1,19 / 1,22
		F30	3,0	0,173 / 0,692	3,173 / 3,692	1,0	0,692	0,976 / 0,923	1,02 / 1,08
		F40	3,899	0,112 / 0,45	4,011 / 4,349	1,3	0,45	1,234 / 1,087	0,81 / 0,92
		F50	4,87	0,045 / 0,18	4,915 / 5,05	1,623	0,18	1,512 / 1,262	0,66 / 0,79

Tabelul 4.5 (continuare)

Nr. crt.	Simbol ROCA	Simbol CMS	Varianta a u_0''	Varianta a u_A''	Varianta a u''	Varianta b i_0''	Varianta b i_A''	Varianta b i''	Θ
6.	TA	F10	2,25	0,75 / 3,0	3,0 / 5,25	0,75	3,0	0,923 / 1,312	1,083 / 0,76
		F20	2,542	0,375 / 1,5	2,917 / 4,042	0,847	1,5	0,898 / 1,01	1,11 / 0,99
		F30	3,0	0,316 / 1,384	3,346 / 4,384	1,0	1,384	1,03 / 1,096	0,97 / 0,91
		F40	3,899	0,225 / 0,9	4,124 / 4,799	1,3	0,9	1,269 / 1,20	0,79 / 0,83
		F50	4,87	0,09 / 0,36	4,96 / 5,23	1,623	0,36	1,526 / 1,307	0,66 / 0,76
7.	E	F10	3,0	0,25 / 1,0	3,25 / 4,0	1	1	1,082 / 0,972	0,92 / 1,03
		F20	3,39	0,125 / 0,5	3,515 / 3,89	1,13	0,5	1,266 / 1,115	0,79 / 0,90
		F30	4,0	0,115 / 0,462	4,115 / 4,462	1,333	0,462	1,623 / 1,375	0,62 / 0,73
		F40	5,2	0,075 / 0,3	5,275 / 5,5	1,733	0,3	2,007 / 1,653	0,50 / 0,60
		F50	6,494	0,03 / 0,12	6,524 / 6,614	2,164	0,12		
8.	Eo	F10	3,0	0,5 / 2,0	3,5 / 5,0	1,0	2,0	1,076 / 1,25	0,93 / 0,80
		F20	3,39	0,25 / 1,0	3,64 / 4,39	1,13	1,0	1,12 / 1,097	0,89 / 0,91
		F30	4,0	0,231 / 0,923	4,231 / 4,923	1,333	0,923	1,302 / 1,231	0,77 / 0,81
		F40	5,2	0,15 / 0,6	5,35 / 5,8	1,733	0,6	1,646 / 1,45	0,61 / 0,69
		F50	6,494	0,06 / 0,24	6,554 / 6,734	2,164	0,24	2,017 / 1,683	0,50 / 0,59
9.	EA	F10	3,0	1,0 / 4,0	4,0 / 7,0	1,0	4,0	1,231 / 1,75	0,81 / 0,57
		F20	3,39	0,5 / 2,0	3,89 / 5,39	1,13	2,0	1,197 / 1,347	0,84 / 0,74
		F30	4,0	0,461 / 1,846	4,461 / 5,846	1,333	1,846	1,373 / 1,461	0,73 / 0,68
		F40	5,2	0,3 / 1,2	5,5 / 6,4	1,732	1,2	1,692 / 1,6	0,59 / 0,62
		F50	6,494	0,12 / 0,48	6,614 / 6,974	2,164	0,48	2,035 / 1,743	0,49 / 0,57

Tabelul 4.6. Comportarea uzurilor CMS, la forajul ROTOPERCUTANT (axial).

Nr. crt.	Simbol		Varianta a			/ Varianta b			
	ROCA	CMS	U_0''	U_A''	U''	i_0''	i_A''	i''	θ
1.	M	F10	0,885	0,5 / 2,0	1,385 / 2,885	0,442	0,5	0,462 / 0,481	2,17 / 2,08
		F20	1,0	0,25 / 1,0	1,25 / 2,0	0,5	0,25	0,417 / 0,333	2,40 / 3,00
		F30	1,179	0,231 / 0,923	1,41 / 2,102	0,59	0,231	0,47 / 0,35	2,13 / 2,85
		F40	1,534	0,15 / 0,6	1,684 / 2,134	0,787	0,15	0,561 / 0,356	1,78 / 2,81
		F50	1,916	0,06 / 0,24	1,976 / 2,156	0,958	0,06	0,859 / 0,359	1,52 / 2,78
2.	Mo	F10	0,885	1,0 / 4,0	1,885 / 4,885	0,442	1,0	0,628 / 0,814	1,59 / 1,23
		F20	1,0	0,5 / 2,0	1,5 / 3,0	0,5	0,5	0,5 / 0,5	2,00 / 2,00
		F30	1,179	0,461 / 1,847	1,64 / 3,026	0,59	0,461	0,546 / 0,504	1,83 / 1,98
		F40	1,534	0,3 / 1,2	1,834 / 2,734	0,767	0,3	0,611 / 0,456	1,64 / 2,19
		F50	1,916	0,12 / 0,48	2,036 / 2,396	0,958	0,12	0,879 / 0,399	1,47 / 2,50
3.	MA	F10	0,885	2,0 / 8,0	2,885 / 8,885	0,442	2,0	0,962 / 1,481	1,04 / 0,68
		F20	1,0	1,0 / 4,0	2,0 / 5,0	0,5	1,0	0,667 / 0,833	1,50 / 1,20
		F30	1,179	0,923 / 3,693	2,102 / 4,872	0,59	0,923	0,701 / 0,812	1,43 / 1,23
		F40	1,534	0,6 / 2,4	2,134 / 3,934	0,767	0,6	0,711 / 0,656	1,41 / 1,53
		F50	1,916	0,24 / 0,96	2,156 / 2,876	0,958	0,24	0,719 / 0,479	1,39 / 2,09
4.	T	F10	1,327	0,75 / 3,0	2,077 / 4,327	0,664	0,75	0,892 / 0,721	1,44 / 1,39
		F20	1,5	0,375 / 1,5	1,875 / 3,0	0,75	0,375	0,625 / 0,5	1,60 / 2,00
		F30	1,769	0,346 / 1,385	2,115 / 3,154	0,884	0,346	0,705 / 0,526	1,42 / 1,90
		F40	2,301	0,225 / 0,9	2,526 / 3,201	1,15	0,225	0,842 / 0,533	1,19 / 1,87
		F50	2,874	0,09 / 0,36	2,964 / 3,234	1,437	0,09	0,988 / 0,539	1,01 / 1,86
5.	To	F10	1,327	1,5 / 6,0	2,827 / 7,327	0,664	1,5	0,942 / 1,221	1,06 / 0,82
		F20	1,5	0,75 / 3,0	2,25 / 4,5	0,75	0,75	0,75 / 0,75	1,33 / 1,33
		F30	1,769	0,693 / 2,77	2,462 / 4,539	0,884	0,893	0,821 / 0,756	1,22 / 1,32
		F40	2,301	0,45 / 1,8	2,751 / 4,101	1,15	0,45	0,917 / 0,683	1,09 / 1,46
		F50	2,874	0,18 / 0,72	3,054 / 3,594	1,437	0,18	1,018 / 0,599	0,98 / 1,67

Tabelul 4.6 (continuare)

Nr. crt.	Simbol		Varianta a			/ Varianta b			
	ROCA	CMS	U_0''	U_A''	U''	i_0''	i_A''	i''	θ
6.	TA	F10	1,327	3,0 / 12,0	4,327 / 13,327	0,664	3,0	1,442 / 2,221	0,69 / 0,45
		F20	1,5	1,5 / 6,0	3,0 / 7,5	0,75	1,5	1,0 / 1,25	1,00 / 0,80
		F30	1,769	1,385 / 5,54	3,154 / 7,309	0,884	1,385	1,051 / 1,218	0,95 / 0,82
		F40	2,301	0,9 / 3,6	3,201 / 5,901	1,15	0,9	1,067 / 0,983	0,94 / 1,02
		F50	2,874	0,36 / 1,44	3,234 / 4,314	1,437	0,36	1,078 / 0,719	0,93 / 1,39
7.	E	F10	1,77	1,0 / 4,0	2,77 / 5,77	0,885	1,0	0,923 / 0,962	1,08 / 1,04
		F20	2,0	0,5 / 2,0	2,5 / 4,0	1,0	0,5	0,833 / 0,667	1,20 / 1,50
		F30	2,358	0,461 / 1,847	2,819 / 4,205	1,179	0,461	0,94 / 0,701	1,06 / 1,43
		F40	3,067	0,3 / 1,2	3,367 / 4,267	1,534	0,3	1,122 / 0,711	0,89 / 1,41
		F50	3,831	0,12 / 0,48	3,951 / 4,311	1,916	0,12	1,317 / 0,718	0,76 / 1,39
8.	Eo	F10	1,77	2,0 / 8,0	3,77 / 9,77	0,885	2,0	1,257 / 1,628	0,80 / 0,65
		F20	2,0	1,0 / 4,0	3,0 / 6,0	1	1	1	1
		F30	2,358	0,923 / 3,693	3,281 / 6,051	1,179	0,923	1,094 / 1,008	0,91 / 0,99
		F40	3,067	0,6 / 2,4	3,667 / 5,467	1,534	0,6	1,222 / 0,911	0,82 / 1,10
		F50	3,831	0,24 / 0,96	4,071 / 4,791	1,916	0,24	1,357 / 0,798	0,74 / 1,25
9.	EA	F10	1,77	4,0 / 16,0	5,77 / 17,77	0,885	4,0	1,923 / 2,962	0,52 / 0,34
		F20	2,0	2,0 / 8,0	4,0 / 10,0	1,0	2,0	1,333 / 1,667	0,75 / 0,60
		F30	2,358	1,847 / 7,387	4,205 / 9,745	1,179	1,847	1,402 / 1,624	0,71 / 0,62
		F40	3,067	1,2 / 4,799	4,267 / 7,866	1,534	1,2	1,422 / 1,311	0,70 / 0,76
		F50	3,831	0,48 / 1,92	4,311 / 5,751	1,916	0,48	1,437 / 0,958	0,70 / 1,04

Tabelul 4.7 Comparareo uzurilor CMS, la forajul ROTOPERCUTANT (tangential)

Nr. crt.	Simbol ROCA	Simbol CMS	Varianta a U_0''	Varianta a U_A''	Varianta a U''	Varianta b i_0''	Varianta b i_A''	Varianta b i''	θ
1.	S	F10	0,25	0,1875 / 0,75	0,4375 / 1,0	0,089	0,825	0,141 / 0,25	7,09 / 4,0
		F20	0,283	0,094 / 0,375	0,377 / 0,658	0,101	0,3125	0,122 / 0,1645	8,22 / 6,08
		F30	0,333	0,086 / 0,346	0,419 / 0,679	0,119	0,288	0,135 / 0,17	7,40 / 5,89
		F40	0,431	0,056 / 0,225	0,487 / 0,656	0,154	0,1875	0,157 / 0,164	6,37 / 6,10
		F50	0,54	0,022 / 0,09	0,563 / 0,63	0,193	0,075	0,182 / 0,157	5,51 / 6,35
2.	So	F10	0,30	0,35 / 1,4	0,65 / 1,7	0,107	1,167	0,21 / 0,425	4,77 / 2,35
		F20	0,339	0,175 / 0,7	0,514 / 1,039	0,121	0,5835	0,166 / 0,26	6,03 / 3,85
		F30	0,4	0,162 / 0,648	0,582 / 1,042	0,143	0,5385	0,181 / 0,262	5,52 / 3,82
		F40	0,518	0,105 / 0,42	0,623 / 0,938	0,185	0,35	0,201 / 0,235	4,98 / 4,26
		F50	0,65	0,042 / 0,168	0,692 / 0,818	0,232	0,14	0,223 / 0,204	4,48 / 4,89
3.	SA	F10	0,3	0,7 / 2,8	1,0 / 3,1	0,107	2,333	0,323 / 0,775	3,10 / 1,29
		F20	0,339	0,35 / 1,4	0,689 / 1,739	0,121	1,167	0,222 / 0,435	4,50 / 2,30
		F30	0,4	0,323 / 1,292	0,723 / 1,692	0,143	1,077	0,233 / 0,423	4,29 / 2,36
		F40	0,518	0,21 / 0,84	0,728 / 1,358	0,185	0,7	0,235 / 0,339	4,26 / 2,95
		F50	0,65	0,084 / 0,336	0,734 / 0,986	0,232	0,28	0,237 / 0,246	4,22 / 4,06
4.	M	F10	0,8	0,3 / 1,2	1,1 / 2,0	0,286	1,0	0,355 / 0,5	2,82 / 2,0
		F20	0,904	0,15 / 0,6	1,054 / 1,504	0,323	0,5	0,34 / 0,376	2,94 / 2,66
		F30	1,067	0,138 / 0,553	1,205 / 1,62	0,381	0,461	0,389 / 0,405	2,57 / 2,47
		F40	1,339	0,09 / 0,36	1,429 / 1,699	0,496	0,3	0,461 / 0,425	2,17 / 2,35
		F50	1,733	0,036 / 0,144	1,769 / 1,877	0,619	0,12	0,511 / 0,469	1,75 / 2,13
5.	Ma	F10	1,0	0,5 / 2,0	1,5 / 3,0	0,357	1,667	0,484 / 0,75	2,07 / 1,33
		F20	1,128	0,25 / 1,0	1,378 / 2,128	0,403	0,8335	0,444 / 0,532	2,25 / 1,88
		F30	1,333	0,231 / 0,923	1,564 / 2,256	0,476	0,769	0,505 / 0,564	1,98 / 1,77
		F40	1,733	0,15 / 0,6	1,883 / 2,333	0,619	0,5	0,607 / 0,583	1,65 / 1,71
		F50	2,164	0,06 / 0,24	2,224 / 2,404	0,773	0,2	0,717 / 0,601	1,39 / 1,66

Tabelul 4.7. (continuare)

Nr. crt.	Simbol ROCA	Simbol CMS	Varianta a U_0''	Varianta a U_A''	Varianta a U''	Varianta b i_0''	Varianta b i_A''	Varianta b i''	θ
6.	MA	F10	1,1	0,9 / 3,6	2,0 / 4,7	0,393	3,0	0,645 / 1,175	1,55 / 0,85
		F20	1,243	0,45 / 1,8	1,693 / 3,043	0,444	1,5	0,546 / 0,761	1,83 / 1,31
		F30	1,467	0,415 / 1,618	1,882 / 3,085	0,524	1,384	0,607 / 0,771	1,65 / 1,30
		F40	1,907	0,27 / 1,08	2,117 / 2,985	0,681	0,9	0,702 / 0,747	1,42 / 1,34
		F50	2,383	0,108 / 0,432	2,491 / 2,815	0,851	0,36	0,804 / 0,704	1,24 / 1,42
7.	T	F10	1,8	0,3 / 1,2	2,1 / 3,0	0,643	1,0	0,677 / 0,75	1,48 / 1,33
		F20	2,036	0,15 / 0,6	2,186 / 2,636	0,727	0,5	0,705 / 0,659	1,42 / 1,52
		F30	2,4	0,138 / 0,553	2,538 / 2,953	0,857	0,461	0,819 / 0,738	1,22 / 1,35
		F40	3,119	0,09 / 0,36	3,209 / 3,479	1,114	0,3	1,035 / 0,87	0,97 / 1,15
		F50	3,898	0,036 / 0,144	3,934 / 4,042	1,392	0,12	1,269 / 1,01	0,79 / 0,99
8.	Ta	F10	1,95	0,525 / 2,1	2,475 / 4,05	0,696	1,75	0,798 / 1,012	1,25 / 0,99
		F20	2,201	0,282 / 1,05	2,463 / 3,251	0,786	0,875	0,795 / 0,813	1,26 / 1,23
		F30	2,598	0,242 / 0,969	2,84 / 3,568	0,928	0,808	0,918 / 0,892	1,09 / 1,12
		F40	3,377	0,157 / 0,63	3,534 / 4,007	1,206	0,525	1,14 / 1,002	0,88 / 1,0
		F50	4,217	0,063 / 0,252	4,28 / 4,469	1,506	0,21	1,381 / 1,117	0,721 0,90
9.	TA	F10	1,95	1,05 / 4,2	3,0 / 6,15	0,696	3,5	0,968 / 1,537	1,03 / 0,65
		F20	2,201	0,525 / 2,1	2,726 / 4,301	0,786	1,75	0,879 / 1,075	1,14 / 0,93
		F30	2,598	0,484 / 1,938	3,082 / 4,536	0,928	1,615	0,994 / 1,134	1,01 / 0,88
		F40	3,377	0,315 / 1,26	3,692 / 4,637	1,206	1,05	1,191 / 1,159	0,841 0,86
		F50	4,217	0,126 / 0,504	4,343 / 4,721	1,506	0,42	1,401 / 1,18	0,71 / 0,85
10.	E	F10	2,8	0,3 / 1,2	3,1 / 4,0	1	1	1	1
		F20	3,164	0,15 / 0,6	3,314 / 3,764	1,13	0,5	1,089 / 0,941	0,94 / 1,06
		F30	3,733	0,138 / 0,553	3,871 / 4,286	1,333	0,461	1,249 / 1,071	0,80 / 0,93
		F40	4,852	0,09 / 0,36	4,942 / 5,212	1,733	0,3	1,594 / 1,303	0,63 / 0,77
		F50	6,059	0,036 / 0,144	6,0951 6,203	2,164	0,12	1,9661 1,551	0,51 / 0,64

Tabelul 4.7 (continuare)

Nr. crt.	Simbol		Varianta a			/ Varianta b			
	ROCA	CMS	U_0''	U_A''	U''	i_0''	i_A''	i''	θ
11	Ea	F10	2,8	0,6 / 2,4	3,4 / 5,2	1,0	2,0	1,097 / 1,3	0,91 / 0,77
		F20	3,164	0,3 / 1,2	3,464 / 4,364	1,13	1,0	1,117 / 1,091	0,89 / 0,92
		F30	3,733	0,277 / 1,108	4,101 / 4,841	1,333	0,923	1,294 / 1,21	0,77 / 0,83
		F40	4,852	0,18 / 0,72	5,032 / 5,572	1,733	0,6	1,623 / 1,393	0,62 / 0,72
		F50	6,059	0,072 / 0,288	6,131 / 6,347	2,164	0,24	1,9781 / 1,587	0,51 / 0,63
12	EA	F10	3,0	1,0 / 4,0	4,0 / 7,0	1,071	3,333	1,29 / 1,75	0,77 / 0,57
		F20	3,388	0,5 / 2,0	3,888 / 5,388	1,21	1,667	1,254 / 1,347	0,80 / 0,74
		F30	3,998	0,461 / 1,846	4,459 / 5,844	1,428	1,538	1,439 / 1,461	0,70 / 0,68
		F40	5,197	0,3 / 1,2	5,497 / 6,397	1,856	1,0	1,773 / 1,599	0,56 / 0,63
		F50	6,49	0,12 / 0,48	6,61 / 6,97	2,318	0,4	2,132 / 1,742	0,47 / 0,57

În tabelele 4.4 ... 4.7, sînt date valorile indicatorilor absoluți și relativi de uzare, precum și indicatorii relativi ai duratelor de uzare, pe metode de foraj, categorii de roci și tipuri de CMS.

La forajul rotativ, prevăzut a fi limitat de uzurile rocilor medii cu abrazivitatea foarte mare, categorie considerată bază de comparație, rezultă că se impune utilizarea CMS cu rezistențele cele mai mari la uzura abrazivă, de tip F50. La forajul rocilor cu abrazivitate foarte mică, *S*, *M* sau *T*, este posibilă utilizarea și a unor sortimente de tip F40, care prezintă avantajul unor rezistențe sporite la încovoiere (necesară în rocile cu forabilitate ridicată, cu scule cu partea activă „înaltă", solicitată la încovoiere mai mult) și la uzura prin oboseală la șoc. Deși uzurile globale rezultate sînt mai mici, în comparație cu ale rocilor *MA*, se recomandă evitarea aplicării forajului rotativ în rocile extratari, simbol *E*, avîndu-se în vedere ponderea mare a uzurii prin oboseală.

În cazul forajului percutant, aplicat în special în rocile tari și extratari, CMS cu rezistențele la șoc cele mai mari, de tip F10 și F20, conduc la rezultatele cele mai bune. Aceste tipuri se aleg în funcție de caracterul de abrazivitate al fiecărei roci, putînd fi utilizat și tipul F30, în rocile medii și tari, cu abrazivitate ridicată, Ma, MA și TA.

Forajul rotopercutant reprezintă cazurile intermediare față de celelalte două metode. Se recomandă alegerea ca tipuri de bază F20 și F30, F20 în special pentru rocile slab abrazive; în rocile cu forabilitate și cu abrazivitate ridicată, se poate impune și tipul F40, cu rezistență mare la uzura abrazivă. La forajul cu sape cu role (sau similare), din punct de vedere al uzurii, principalul tip de CMS recomandabil este F20, în rocile cu forabilitate mică și medie, foarte abrazive, SA și MA, se poate utiliza în alternativă și tipul F30, iar în rocile extratari, slab și mediu abrazive, E și Ea — tipul F10. Pe de altă parte, dinamica foarte redusă la uzură, datorită unui volum mare al părții active și a contactului funcțional cu roca cu discontinuități relativ mari, se preferă tipul F10 de CMS, care asigură și rezistențele mecanice generale, la încovoiere și de rezilință propriu-zisă, necesare solicitărilor din exploatare.

5. CONCLUZII

Varietatea foarte mare a caracteristicilor rocilor de dislocat prin foraj mecanic impune aplicarea de metode și regimuri de lucru diversificate și are ca efecte performanțe diferite. Optimizarea acestor performanțe necesită și asigurarea unor viteze de uzare a sculelor în limite convenabile, corelate corespunzător cu celelalte condiții de exploatare.

La alegerea corectă a metodei și a regimurilor de foraj, viteza de uzare a carburilor metalice sinterizate utilizate la armarea sculelor depinde de caracteristicile relative ale rocilor și carburilor, precum și de ponderea cu care intervin tipurile de uzură, în uzura globală, specifică fiecărui caz concret de lucru.

Celor două tipuri principale de uzură, le corespund caracteristici specifice pentru roci și pentru CMS. Uzurii prin oboseală la șoc îi corespunde forabilitatea rocilor (proporțională cu proprietățile lor mecanice, de exemplu cu rezistența la compresiune) și rezistența la șocuri repetate a CMS, iar uzurii prin abraziune — abrazivitatea rocilor și respectiv rezistența la uzura abrazivă a CMS. Aceste caracteristici permit clasificarea rocilor în 12 categorii de forabilitate și abrazivitate, precum și tipizarea CMS în cinci tipuri distincte, pe bază de carbură de wolfram și cobalt, simbolizate cu F10 ... F50 (pentru care conținutul mediu de cobalt variază între 16 și 6%), fiecare tip putînd cuprinde unul sau mai multe sortimente, cu valori diferite pentru proprietățile mecanice și de rezistență la uzură.

Studiul uzării CMS la foraj s-a făcut, în baza ipotezelor propuse (privind : necunoașterea legilor concrete de uzare; alegerea corectă a sculei, metodei și regimurilor de foraj; ponderea tipurilor de uzură; corelarea caracteristicilor rocilor și a CMS), prin intermediul indicatorilor de uzare și de rezistență la uzură, și care au fost comparați cu valorile de reper, ale rocilor bază de comparație și respectiv ale CMS etalon.

Dacă se raportează caracteristicile rocilor extratari la cele ale rocilor slabe, capacitățile de uzare parțială cresc de 4 ori, pentru uzura prin oboseală la șoc și de 16 ori, pentru uzura abrazivă. Aplicîndu-se metodele de foraj considerate, rezultă că variațiile (aproximative) ale uzurii globale sînt de : 12...14 ori, la forajul rotativ, de 5 ... 7 ori, la forajul percutant și de 6 ... 10 ori, la forajul rotopercutant (axial).

Aceste mari diferențe de uzură au contribuit la limitarea fizică a utilizării CMS, cum este cazul forajului rotativ, considerat a fi limitat de uzurile rezultate în rocile medii de abrazivitate ridicată, creșterile uzurii globale fiind astfel de numai 6 ... 7,4 ori. Dacă se au în vedere domeniile de utilizare în practică a forajului percutant și rotopercutant, neaplicat în rocile slabe, aceste creșteri sînt numai de 2,5 ... 3,5 ori și respectiv de 3,2 ... 5 ori.

Spre deosebire de rezistențele la uzura abrazivă, care variază în medie de peste opt ori, corespunzînd în felul acesta variațiilor capacităților abrazive ale rocilor, rezistențele la oboseală cu șoc ale CMS, pentru tipurile extreme, variază numai de aproximativ două ori, nesatisfăcător pentru corelarea precisă cu caracteristicile similare ale rocilor.

Analizîndu-se comparativ indicatorii relativi de uzare, în funcție de natura rocilor, în tabelul 5.1 s-a recomandat utilizarea CMS, pe tipuri și metode de foraj.

Tabelul 5.1 Recomandările de utilizare a CMS

Nr. crt.	Natura Rocii: Taria – Denumire	Taria – f	Abrazivitatea	Exemple	Simbol	Tipul CMS, corespunzator metodei de foraj si tipului sculei: ROTATIV (cu tais fix)	PERCUTANT (sfredele)	ROTOPERCUTANT (AXIAL) (capete detasabile)
1	SLABA	Sub 6	Mica	Marne, argila, carbune	S	F50(F40)	——	——
			Mijlocie	Sisturi nisipoase, gresii sistoase	Sa	F50		
			Mare	Marne nisipoase, gresii slabe	SA			
2	Medie	6...12	Mica	Marne compacte, granite, minereuri de nichel	M	F50 (F40)	F 20	F20 sau F 30
			Mijlocie	Marmura compacta, gresii medii	Ma	F 50	F20 sau F30	
			Mare	Cuartite fisurate, minereuri de fier	MA			F20 sau F 40
3	Tare	12...18	Mica	Marne compacte, bazalt, granite compacte	T	F 50 (F40)	F 10 sau F 20	F20 sau F 30
			Mijlocie	Calcare metalifere, granite tari, gresii	Ta	F50	F 20	
			Mare	Calcare cuartitice slab compacte, minereuri de plumb	TA	—	F 20 sau F 30	F 20 sau F 40
4	Extratare	Peste 18	Mica	Granite foarte compacte	E	(F50)	F 10	F 20
			Mijlocie	Porfire foarte compacte	Ea	—	F 10 sau F 20	F 20 sau F 30
			Mare	Cuartite foarte compacte	EA		F 20	

Realizarea tipizării propusă pentru carburile metalice sinterizate, pe sortimente, va permite verificarea recomandărilor de utilizare în vederea optimizării performanțelor de foraj.

Primit la redacție la 9 octombrie 1985

BIBLIOGRAFIE

10. D. CONSTANTINESCU, *Contribuții la utilizarea carburilor metalice sinterizate în foraj*. I, St. cerc. mec. apl., **45**, nr. 6 (1986).
11. P. NICOLAE, P. HERȘCOVICI, *Inserții din carburi metalice sinterizate pentru industria minieră*, Rev. Metalurgia, **31**, 8 (1979).

O NOUĂ TEORIE A TURBULENȚEI ÎN CADRUL SISTEMELOR DINAMICE DISIPATIVE

de P. ROMAN

Institutul Politehnic București

Lucrarea constituie o încercare de a prezenta sintetic modelul matematic al turbulenței în cadrul teoriei sistemelor dinamice disipative, dezvoltat în ultimii 15 ani. Se urmărește situarea acestui model în sfera cunoștințelor științifice din domeniul mecanicii analitice.

1. INTRODUCERE

Turbulența în mișcările fluidelor vîscoase este considerată ca unul dintre cele mai complexe fenomene macroscopice din natură, iar importanța practică a studierii și cunoașterii acestor fenomene este tot mai mare.

Aparența de haos a turbulenței la numere Reynolds mari (sau numere Rayleigh în convecția termică) rezultă din instabilitatea intrinsecă a curgerilor fluide la scară mare (reală), în absența influențelor stabilizatoare, cum este spre exemplu vîscozitatea asociată cu vecinătatea pereților solizi staționari.

Interpretări teoretice ale turbulenței [1], [2], [3], [4] bazate pe observații asupra fenomenului fizic, nu au reușit să constituie o explicație completă. Într-adevăr, instabilitatea (neregularitatea) fenomenului din natură trebuie să se oglindească în ecuațiile de bază ale hidrodinamicii, ecuațiile Navier-Stokes. Studiul matematic al acestor ecuații cu derivate parțiale, *neliniare*, este foarte dificil. Cel puțin la fel de dificilă este tratarea numerică pentru regimul de curgere turbulent.

Nici studierea experimentală a turbulenței în scopul obținerii unor informații cantitative precise nu s-a dovedit a fi mai ușoară.

Îmbunătățirea considerabilă, calitativ nouă, a înțelegerii naturii turbulenței se sprijină pe noi idei din teoria matematică a sistemelor dinamice neliniare susținute în ultimii ani prin simularea numerică a ecuațiilor hidrodinamicii cu calculatoare de mare capacitate și măsurători ale unor caracteristici de turbulență cu ajutorul unor tehnici experimentale de mare finețe.

Se știe că într-o serie de probleme dinamice nu poate fi obținută o soluție explicită chiar pentru cazul sistemelor cu puține grade de libertate și fără perturbare (zgomot) extern. O asemenea situație se întîlnește și în cazul sistemelor dinamice disipative (cu frecare internă). Această dificultate apare datorită faptului că problemele dinamice descrise de ecuații regulate pot avea soluții care se comportă *neregulat* în timp. În absența unor soluții explicite, studiul hidrodinamicii cu evoluție în timp a fost abordat în cadrul teoriei calitative a sistemelor dinamice [5], [6], [7], [8]. Aproximarea fenomenelor neregulate (aperiodice, haotice) în compartimentul sistemelor dinamice disipative nu se referă explicit la fenomenele de turbulență dezvoltată din hidro sau aerodinamică.

Cu toate acestea, se poate afirma că apariția turbulenței este explicată printr-un mecanism matematic care descrie un model de instabilitate fizicește acceptabil.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 46, NR. 1, 1987, P. 94—102

Conceptul de *mecanism matematic al turbulenței* apare pentru prima oară în lucrarea lui D. Ruelle și F. Takens din anul 1971, care propune ca în descrierea fenomenului de neregularitate (haos) în sistemele cu evoluție în timp să se înlocuiască noțiunea de mișcare cvasiperiodică cu un obiect matematic nou, numit *atractor straniu*.

2. ECUAȚIILE HIDRODINAMICII ÎN CADRUL SISTEMELOR DINAMICE

Fie ecuațiile Navier-Stokes pentru un fluid incompresibil:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\sum_{j=1}^{d} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \nu \Delta v_i - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i, \tag{1}$$

$$\sum_j \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0, \tag{2}$$

$$v_i = v_i^0 = v_i^0 + W_i, \tag{3}$$

unde (v_i) este cîmpul vitezelor unui fluid închis într-un domeniu Ω, ν este coeficientul de viscozitate cinematică, p este presiunea, iar (g_i) descrie cîmpul forțelor exterioare. (W_i) este un cîmp de viteze care se anulează pe frontiera $\partial\Omega$ a domeniului în conformitate cu condiția de nealunecare la perete.

Ecuațiile (1) cu condițiile (2) și (3) pot fi puse sub forma unei ecuații de evoluție printr-o proiecție ortogonală într-un spațiu al cîmpurilor vectoriale cu divergență nulă. În acest fel, termenul de presiune este eliminat și se obține ecuația de forma:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = F_\mu(W), \qquad W \in \mathbb{R}^m, \tag{4}$$

unde W este cîmpul vectorilor viteză din domeniul închis Ω care aparține unui spațiu funcțional H (spațiu hilbertian).

F_μ determină evoluția neliniară în timp a sistemului, iar μ este un parametru care descrie intensitatea acțiunii externe exercitată asupra fluidului. Parametrul μ se consideră constant pentru fiecare parcurgere (în timp), a unui experiment.

Se presupune că ecuația de evoluție (4) definește un sistem dinamic. Astfel, problema fizică a turbulenței este legată de problema matematică a cunoașterii ecuațiilor Navier-Stokes.

Fie o soluție corectă a ecuației (4) scrisă sub forma:

$$W(t) = f_\mu^t(W), \tag{5}$$

unde f^t, cu $t > 0$, reprezintă un operator de evoluție în timp. Existența acestei soluții într-o mulțime deschisă $\boldsymbol{U}$ din Ω, cu proprietatea de semigrup $f^s \circ f^t = f^{s+t}$ și condițiile inițiale $W \in \boldsymbol{U}$ și $f^t\ W \in \boldsymbol{U}$, definește sistemul dinamic. În spațiul cu două dimensiuni ($d = 2$), existența și unicitatea soluțiilor ecuațiilor Navier-Stokes (deci existența lui $\boldsymbol{U}$) a fost demonstrată. Pentru $d = 3$ existența lui $\boldsymbol{U}$ nu a fost demonstrată și matematicienii studiază posibilitatea existenței sistemului dinamic în prezența unor singularități [9].

3. PROBLEMA SISTEMELOR DISIPATIVE ȘI A ATRACTORILOR

În cadrul dinamicii Hamiltoniene (a sistemelor conservative), în conformitate cu teorema lui Liouville, volumul în spațiul fazelor *) se conservă local și se scrie $\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(W) = 0$. Pentru sistemele disipative (cu frecare internă), cum este și orice sistem hidrodinamic, mișcarea contractă volumele și $\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(W) < 0$.

Această caracteristică a sistemelor disipative este esențială în stabilirea modelului teoretic al turbulenței „matematice".

În ecuația (4) este ușor de imaginat că parametrul μ este numărul Reynolds (sau numărul Rayleigh) al curgerii.

Mecanismul teoretic care conduce la apariția stării numită de turbulență arată, în esență, cum variația lui μ produce schimbări ale cîmpului vectorial F_μ și care dintre acestea reprezintă un model fizicește acceptabil și asemănător turbulenței.

Să admitem că pentru $\mu = 0$ ecuația (4) are soluția $W_0 = 0$ și definește tendința fluidului către starea de repaus. Fie $W_0(\mu)$ o soluție a ecuației (4) care definește o stare de echilibru (staționară) pentru $\mu < \mu_{critic}$. Atunci, $F_\mu(W_0(\mu)) = 0$.

În continuare se urmărește $W_0(\mu)$ pe măsură ce crește μ.

Pentru $\mu = 0$, jacobianul:

$$(A_\mu)_j^k = \left.\frac{\partial F_\mu^k}{\partial x_j}\right|_{W_0(\mu)}$$

are toate valorile proprii cu partea reală strict negativă. Din motive de continuitate proprietatea se păstrează și pentru valori μ mici (numere Reynolds mici).

În acest caz o perturbație slabă a lui $W_0(\mu)$ se amortizează pentru $t \to \infty$ și caracterul staționar (laminar) al curgerii se menține **). În interpretarea geometrică, această situație corespunde faptului că punctul fix $W_0 = 0$ este un atractor ***), sau altfel formulat, traiectoria de fază este atrasă de punctul fix $W_0 = 0$ (fig. 2). La creșterea în continuare a numărului Reynolds (Re), soluția stării staționare își pierde stabilitatea. În

*) Spațiul fazelor reprezintă o interpretare geometrică a comportamentului mecanic al unui sistem dinamic (vezi lucrarea [10]).

**) Dacă scriem $W(t) = e^{A_\mu \cdot t} \cdot f(t)$, atunci se observă amortizarea soluției.

***) Dacă admitem că există o mulțime deschisă U din Ω, care în evoluția în timp se contractă asimptotic către o mulțime compactă A, atunci spunem că A este o mulțime atractoare avînd o vecinătate fundamentală U și sînt îndeplinite condițiile:

(a) pentru fiecare mulțime deschisă $V \supset A$, $f^t U \subset V$ cînd t este suficient de mare, și

(b) $f^t A = A$ pentru toți t.

Mulțimea deschisă $U_{t>0}\ (f^t)^{-1} U$ este bazinul de atracție a lui A. Fie, spre exemplu, atractorul lui Henon (fig. 1) în care se pleacă de la un sistem de ecuații cu doi parametri x și y:

$$x(t+1) = y(t) + 1 - ax^2(t),\ y(t+1) = bx(t).$$

Fiind date valorile inițiale $x(0)$ și $y(0)$ și $a = 1,4$ și $b = 0,3$, se calculează $x(t)$ și $y(t)$ pentru $t = 1, 2, \ldots 10.000$ cu o precizie de 16 cifre semnificative. Rezultatele pe calculator arată cum punctele calculate se așează pe o serie de linii cu o structură complexă.

conformitate cu teorema bifurcației lui Hopf [4], perechile de valori proprii complex conjugate ale jacobianului intersectează axa imaginară pentru $\mu = \mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots$ Pentru $\mu > \mu_1$, punctul fix $W_0(0)$ nu mai este

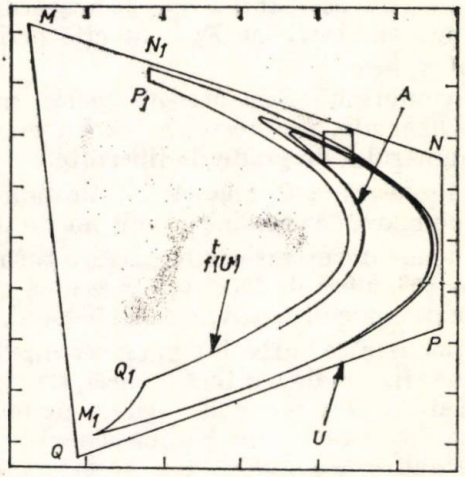


Fig. 1.— Atractorul lui Henon asociat unei transformări a planului care, spre exemplu, trimite cvadrilaterul $MNPQ$ în interiorul său, în $M_1N_1P_1Q_1$.

atractor (fig. 3). La valoarea $\mu = \mu_1$ perturbația lui $W_0(\mu)$ nu se amortizează și nici nu se amplifică pentru $t \to \infty$, ceea ce corespunde unui număr *Re* critic.

Pentru $\mu > \mu_i$ există o familie uniparametrică de orbite închise (traiectorii de fază închise) ale cîmpului vectorial F_μ, iar orbita închisă este noul atractor (fig. 4).

Ca urmare a acestui proces (numit bifurcație) mișcarea staționară (laminară) devine o mișcare periodică (oscilatorie). Amplitudinea mișcării crește cu μ.

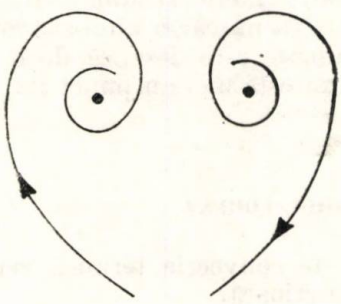


Fig. 2

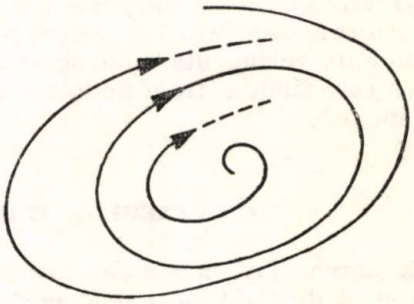


Fig. 3

Fig. 4

După o primă bifurcație caracterizată de apariția unei mișcări periodice cu frecvența ω_1, dacă numărul *Re* continuă să crească, se poate ca o nouă bifurcație (instabilitate) să se suprapună mișcării periodice. În teoria lui Landau [3], care multă vreme a constituit singura teorie considerată satisfăcătoare în descrierea apariției turbulenței, suprapunerea succesivă a unor mișcări periodice conduce la o mișcare numită *cvasiperiodică* a cărei

expresie este:

$$W(t) = F_k(\omega_1 t, \omega_2 t, \ldots, \omega_k t), \tag{6}$$

în care $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ sînt frecvențele mișcărilor periodice fundamentale care se suprapun succesiv, iar F_k o funcție periodică de faze în perioada 2π ($\varphi_k = \omega_k t + \beta_k$).

În conformitate cu această teorie, mișcarea descrisă de (6) are k grade de libertate. La creșterea lui *Re*, crește și numărul de frecvențe și deci al numărului de grade de libertate.

La limită, cînd *Re* tinde la infinit, numărul de grade de libertate este arbitrar de mare, dar rămîne o mulțime de valori discrete.

În noua interpretare matematică a turbulenței care aparține lui Ruelle și Takens [5], ideea de bază este aceea că ecuațiile Navier-Stokes descriu un sistem dinamic disipativ, care în general, nu are mișcări cvasiperiodice.

Astfel, dacă o curbă integrală a cîmpului vectorial F_μ nu este atrasă de un punct fix sau de o orbită închisă, este improbabil să descrie o mișcare cvasiperiodică. Din punct de vedere matematic mișcările cvasiperiodice trebuie să apară pe un tor k-dimensional în spațiul fazelor de dimensiune infinită (mulțimea deschisă U). Aceste mișcări însă *nu sînt generice*, în sensul că, sub acțiunea unei mici perturbații asupra ecuației de evoluție (4), cvasiperiodicitatea poate fi înlocuită cu altceva.

În sistemele disipative, datorită proprietății de contracție a volumului în spațiul fazelor, mișcarea finală pe un atractor poate fi instabilă. Această instabilitate se manifestă prin faptul că o mică variație δW_0 a condițiilor inițiale conduce la o creștere în timp exponențială a erorii. Astfel, orbitele (traiectoriile de fază) ale unor puncte inițial foarte apropiate (pe atractor), se separă exponențial în evoluția în timp. Un sistem dinamic care manifestă o asemenea instabilitate se spune că are dependență senzitivă față de condițiile inițiale (SCI)*), iar atractorul a fost denumit *straniu* (Ruelle [5]). Structura curbelor integrale $W(t)$ pe un atractor straniu este complicată și haotică. Ruelle și Takens [5] propun ca mișcarea unui sistem fluid să fie numită turbulentă cînd această mișcare este descrisă de o curbă integrală care tinde către o mulțime care nu este nici un punct fix, nici o orbită închisă.

4. UN EXEMPLU: ATRACTORUL LORENZ

E. Lorenz [11] a studiat mișcarea de convecție termică generată într-un strat de fluid încălzit la partea inferioară.

Un asemenea fenomen se produce în atmosfera terestră și constituie o problemă fundamentală de meteorologie.

---

*) Atractorul lui Henon manifestă SCI. Alegînd alte valori $x(0)$ și $y(0)$, punctul $x(t)$, $y(t)$ se îndepărtează la infinit sau evoluează către un sistem de șapte puncte. La o alegere corectă a valorilor inițiale se constată numeric că $\delta W(t) \simeq \delta W_{(0)} l^{e\lambda t}$ cu $\lambda = 0{,}42$, deci erorile cresc exponențial. Ca urmare atractorul lui Henon este un atractor „straniu".

Lorenz a stabilit un model aproximativ al acestui tip de mișcare, definit de următoarele ecuații diferențiale:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma x + \sigma y \\ -xz + rx - y \\ xy - bz \end{pmatrix}, \tag{7}$$

unde $\sigma = Pr$ (numărul Prandtl), $r = \dfrac{Ra}{Ra_{critic}}$,

$$b = \frac{4}{1 + (k^2/\pi^2)}.$$

Se constată că valoarea minimă a numărului Rayleigh critic (Ra_{critic}) se obține pentru $k = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ fiind $Ra_{critic} \simeq 657{,}5$ (așa cum a stabilit Rayleigh). Pentru această valoare se obține $b = \dfrac{8}{3}$.

Lorenz a integrat ecuațiile (7) pentru valoarea $b = \dfrac{8}{3}$ și un număr Prandtl mare $\sigma = 10$ (pentru care $Ra_{critic} \cong 24{,}74$) și a adoptat pentru r o valoare ușor supracritică $r = 28$.

Spațiul fazelor pentru sistemul (7) este tridimensional (x, y, z). La schimbarea lui z cu $z_1 = z - r - \sigma$, ecuațiile (7) descriu un sistem numit de tip hidrodinamic [13]. Dacă se consideră suma $x^2 + y^2 + z_1^2$ (o sferă de mărime mare), atunci ecuațiile (7) indică faptul că în evoluția în timp această sumă este strict descrescătoare. Ca urmare, toate traiectoriile de fază după un timp suficient de mare rămîn în interiorul unui domeniu închis.

Se constată că sistemul definit de ecuațiile (7) are un punct fix (atractor) $0 = (0, 0, 0)$ pentru $r < 1$ și alte două puncte fixe C, C' pentru $r > 1$. Pentru o valoare $r > r_{critic}$, cele două puncte devin instabile. Lorenz a observat că fiecare traiectorie, după un timp mai mic sau mai mare, trece în vecinătatea unuia dintre punctele C sau C', descrie în jurul acestuia mai multe bucle și se îndepărtează pentru a trece în vecinătatea celui de-al doilea punct, apoi urmează același proces ș.a.m.d. (fig. 5). Modul în care se succed trecerile și numărul de bucle are o dependență senzitivă (SCI) față de condițiile inițiale. Lorenz trage concluzia că fenomenul de convecție termică din atmosfera terestră este imprevizibil, ceea ce aduce o justificare erorilor care apar în prognozele meteorologice.

Interpretarea atractorului straniu a lui Lorenz este dificilă din cauza structurii foarte complexe a traiectoriilor de fază.

O metodă foarte eficientă de reconstituire a procesului simulat pe calculator este metoda secțiunii Poincaré *), care operează o secționare

*) Fie, în cazul general, o familie de curbe integrale $W(t)$ a cîmpului vectorial F_μ care sînt paralele și intersectează transversal o suprafață (plan) $N - 1$ dimensională (fig. 6).

Secțiunea Poincaré reprezintă mulțimea punctelor P de intersecție cu planul. Aplicația Poincaré conduce de la un punct de intersecție x la următorul, $P_\mu(x)$.

transversală în mănunchiul de traiectorii de fază astfel că în locul unei lungi curbe în N dimensiuni se obţine un set de S puncte în $N-1$ dimensiuni.

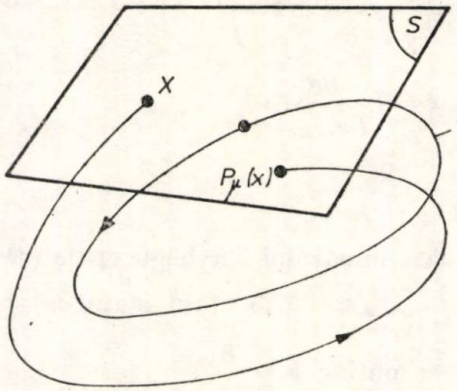


Fig. 5. — Secţiunea Poincaré ilustrată printr-o imagine de fază.

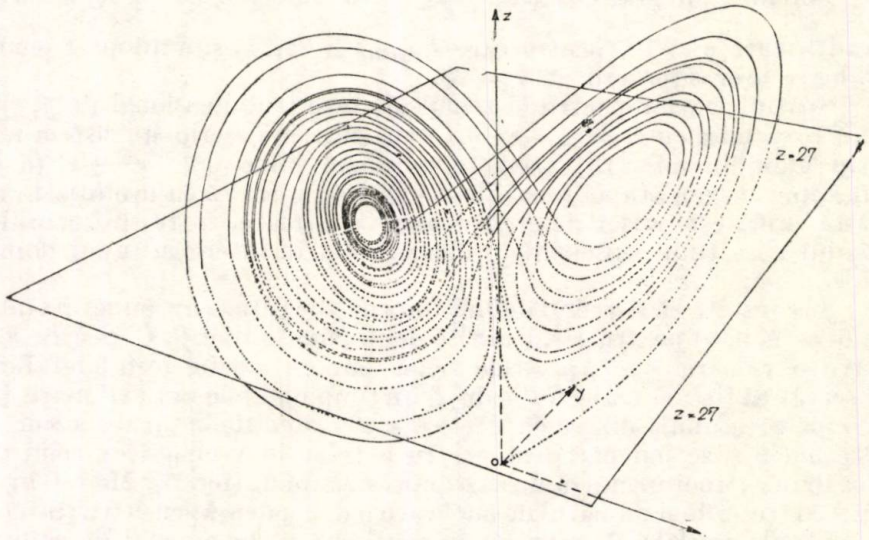


Fig. 6. — Atractorul straniu Lorenz asociat unei probleme de convecţie atmosferică. Figura prezentată a fost obţinută de O. Lanford [12].

Utilizînd metoda secţiunii Poincaré, prin experimentări numerice ample, O. Lanford [12] a obţinut o imagine sugestivă a atractorului Lorenz prin secţionarea cu planul $z = 27$ (fig. 5). Acest rezultat constituie o remarcabilă demonstraţie a modelului teoretic prin evidenţierea punctului fix în spaţiul funcţional, a mişcării periodice şi în continuare a bifurcaţiei care conduce la orbitele atractoare.

5. O CONFIRMARE EXPERIMENTALĂ A TEORIEI MATEMATICE A TURBULENȚEI

Evidențierea experimentală a caracterului de periodicitate și cvasiperiodicitate în mișcarea unui fluid se obține prin măsurarea spectrului de putere al unei mărimi scalare (viteză de fluctuație turbulentă, flux de căldură etc). Spectrul de putere $S(\omega)$ al unui semnal scalar $u(t)$ este definit ca rădăcină pătrată a amplitudinii Fourier (a acestui semnal) pe unitatea de timp. El măsoară cantitatea de energie în unitatea de timp (puterea) conținută în semnal, funcție de frecvența ω. Astfel, măsurători de mare precizie ale componentei radiale de viteză într-o curgere în spațiul dintre un cilindru care se rotește și un cilindru fix (mișcare de tip Couette) [14], indică faptul că pentru valori crescătoare ale numărului Reynolds spectrul de putere prezintă succesiv următoarele imagini :

(a) un sistem periodic caracterizat de o frecvență fundamentală ω și armonicele 2ω, 3ω, ... ;

(b) un sistem cvasiperiodic caracterizat de mai multe frecvențe fundamentale $\omega_1, \ldots, \omega_k$ și combinații liniare cu coeficienți întregi ;

(c) un spectru de bandă continuă în care seria discretă de frecvențe dispare (rămîn frecvența fundamentală și prima subarmonică).

Bifurcația care are loc la valoarea $Re_{critic} = 2501$ $\left(Re = \dfrac{2\pi r_1(r_2 - r_1)}{\nu\tau},\right.$ unde τ este perioada rotației$\left.\right)$ și are ca rezultat apariția spectrului de bandă continuă, este bruscă, inversabilă și fără histerezis.

Un rezultat calitativ asemănător s-a obținut într-o experiență de convecție termică de tipul Rayleigh-Bénard [15].

Apariția spectrului continuu de frecvențe într-o mișcare turbulentă contrazice ipoteza explicării turbulenței prin cvasiperiodicitate și confirmă ipoteza asupra mișcării pe un atractor straniu. Într-adevăr, banda continuă de frecvență indică o comportare neperiodică, haotică.

Astfel, evoluția în timp și apariția turbulenței este explicată de modelul sistemului dinamic care posedă un atractor straniu.

6. PROBLEMA TURBULENȚEI DEZVOLTATE

De importanță fundamentală pentru explicarea și modelarea matematică a turbulenței dezvoltate (din domeniul hidro sau aerodinamicii inginerești) este teoria fizică dezvoltată de Kolmogorov [2] și de Onsager, Obuhov și alții.

Această teorie descrie cascada de energie dintr-o mișcare turbulentă, de la structurile spațiale (unde energia este injectată turbionilor avînd dimensiune proporțională cu scara geometrică a curgerii) pînă la turbionii de scară foarte mică (unde energia este disipată prin frecare vîscoasă, fluctuațiile turbulente fiind amortizate). Modelele matematice cu aplicații inginerești se bazează pe scrierea uneia sau mai multor ecuații (relații de închidere) a mărimilor turbulente (energia cinetică a fluctuațiilor turbulente de viteză, funcția de disipație etc.), iar în forma cea mai generală a ecuației transferului tensiunii turbulente Reynolds ($\overline{u_i u_j}$). O serie de rezul-

tate obținute pentru cazuri de curgere în configurație geometrică complicată evidențiază posibilitățile acestor modele.

Cu toate acestea, teoria cascadei de energie nu ține seamă de fenomenele de intermitență, adică de faptul că ponderea cea mai mare a vorticității și disipației se află într-o mică submulțime a spațiului fizic (spre exemplu, vîrtejuri localizate, vizibile la suprafața apei unui rîu).

Utilizînd modelul de turbulență bazat pe atractorul straniu, s-au făcut încercări [8] de a elabora o teorie deductivă a turbulenței dezvoltate în care un rol esențial îl joacă proprietatea de ergodicitate care asociază sistemului fizic o măsură invariantă. Astfel, se reușește o descriere a comportamentului sistemului numai pe perioade lungi de timp, fără a fi necesar studiul stărilor tranzitorii. Evoluția în timp, pe o perioadă lungă, a sistemului dinamic, are loc pe un atractor.

Deoarece studiul geometric al atractorilor prezintă mari dificultăți matematice, se poate spune că înțelegerea cît mai corectă a sistemelor dinamice excitate mult dincolo de regimul cvasiperiodic devine realizabilă în cadrul unei teorii a proprietăților statistice a acestor sisteme. Pe această cale (probabil) este posibilă „diferențierea gradelor de complexitate a atractorilor și mișcărilor și constituie astfel un pas mai departe în micșorarea distanței dintre sisteme simple și turbulența în întregime dezvoltată" (Eckmann și Ruelle [8]).

BIBLIOGRAFIE

1. H. POINCARÉ, *Théorie des tourbillons*, Georges Carér, Paris (1893).
2. A. N. KOLMOGOROV, *Structură locală a turbulenței într-un fluid incompresibil la numere Reynolds foarte mari*, Dokladi Akad. Nauk S.S.S.R., **30**, p. 299—303 (1941).
3. L. D. LANDAU, *Asupra problemei turbulenței*, Dokladi Akad. Nauk S.S.S.R., **44**, Nr. S, p. 339—342 (1944).
4. E. HOPF, *A mathematical example displaying the features of turbulence*, Commun. pure appl. Math., **1**, p. 303—322 (1948).
5. D. RUELLE și F. TAKENS, *On the nature of turbulence*, Commun. math. Phys., **20**, p. 167—192 (1971).
6. J. P. ECKMANN, *Roads to turbulence in dissipative dynamical systems*, Rev. Modern Physics, **53**, p. 643—654 (1981).
7. D. RUELLE, *Turbulent dynamical systems*, Proc. Int. Congr. Math., Varșovia, p. 271—286 (1983).
8. J. P. ECKMANN și D. RUELLE, *Ergodic theory of chaos and strange attractors*, IHES, Bures-sur-Yvette, P. 15 (1985).
9. C. FOIAȘ și R. TEMAM, *Some analytic and geometric properties of the solutions of the evolution Navier-Stokes equations*, J. Math. pures et appl., **58**, p. 339—368 (1979).
10. L. D. LANDAU și E. M. LIFȘIȚ, *Mecanica*, Izdatelstvo Nauka, Moscova, 1965.
11. E. N. LORENZ, *Deterministic non periodic flow*, J. Atmos, Sci, **20**, p. 130—141 (1963).
12. O. E. LANFORD, *Turbulence seminar*, Proceedings, ed. Springer, 1977.
13. A. S. MONIN, *Asupra naturii turbulenței*, Uspehi Fiz. Nauk, **125**, 1, p. 97—122 (1978).
14. J. P. GOLLUB și H. L. SWINNEY, *Onset of turbulence in a rotating fluid*, Phys. Rev. Lett, 35, p. 927—930 (1975).
15. A. LIBCHABER și J. MAURER, *Une expérience de Rayleigh-Bénard de géométrie réduite; multiplication, accrochage et démultiplication de fréquences*, J. Physique, 41, Colloques C. 3, p. 51—56 (1980).

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

● Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental, de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.

● Note (lucrări mai scurte cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni).

● Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.

● Recenzii asupra cărţii româneşti şi străine.

Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

● Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).

● Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

● Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe. amenajări hidraulice).

● Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calcul al maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).

● Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

● Statica şi dinamica construcţiilor, metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).

● Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi izotopilor radioactivi în tehnică).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi din străinătate.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie 79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 46, nr. 2 martie—aprilie 1987

SUMAR

STUDII

I. JELEV, Calculul regimului tranzitoriu al apei în reţele de conducte ramificate, inelare şi mixte. II. Aplicarea practică a metodei 105

B. PLOSCEANU, R. C. BOGDAN, Transmisii mecanice diferenţiale cu variator la intrare 128

G. ONU, Efectul neliniar al forţelor axiale în calculul structurilor fundate pe coloane . . 137

O. S. CREŢU, GH. FRUNZĂ, Transmisie mecanică de putere constantă 150

A. OPREAN, D. PRODAN, Determinarea unor parametri hidraulici, cinematici şi dinamici la pompele (motoarele) hidraulice cu performanţe ridicate 163

FL. IONESCU, M. IOSIP, Motoare hidraulice liniare cu sustentaţie hidrostatică. Analiza, sinteza şi proiectarea 174

S. T. CHIRIACESCU, N. POPESCU, M. DANCAŞIU, I. BALCU, RODICA MUNTEANU, Supapa de limitare a presiunii — sursa de vibraţii şi zgomote în instalaţiile hidraulice 184

RECENZII 200

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Articolele, originale și de înalt nivel științific, vor fi redactate într-un stil concis, evitîndu-se introducerile foarte lungi. Articolele vor fi dactilografiate la două rînduri, pe hîrtie albă de bună calitate, în două exemplare. Prima pagină trebuie să conțină titlul lucrării, numele autorului (autorilor) și locul de muncă precum și un rezumat de cel mult 150 cuvinte. Toate datele științifice și tehnice prezentate trebuie formulate în unități SI. Formulele trebuie dactilografiate sau scrise cu cerneală, clar și indicîndu-se caracterul literelor (aldine, italice etc.). Indicii inferiori și superiori trebuie indicați clar, pentru evitarea confuziilor. Ca semn zecimal se va utiliza virgula. Tabelele vor fi dactilografiate pe foi separate, cu indicarea titlurilor și cu numerotarea cu cifre arabe. Desenele și diagramele trebuie executate în tuș, pe hîrtie de calc, la dimensiuni aproximativ duble față de acelea finale și cu litere scrise cu îngrijire și suficient de mari pentru a fi vizibile după reproducere. Referințele bibliografice vor fi menționate, pe cît posibil, în ordine alfabetică, la sfîrșitul articolului. În text vor fi indicate prin numărul din lista referințelor, în paranteze drepte.

Referințele din reviste vor conține inițiala și numele autorului (autorilor), titlul articolului (subliniat cu o linie), numele revistei (prescurtat conform uzanțelor internaționale), numărul volumului (subliniat dublu), numărul fasciculei și anul de apariție în paranteză, de exemplu :

1. S. AIZICOVICI, C. FETECĂU, *Existence of Couette flows in second grade fluids*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., **31**, 5(1986).

Referirea la o carte se face indicînd inițiala și numele autorului (autorilor),titlul cărții (subliniat cu o linie), editura, orașul, anul apariției și numerele paginilor, dacă referirea se face la o parte a cărții, de exemplu :

3. W. FLÜGGE, *Tensor Analysis and Continuum Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972, p. 93—99.

Manuscrisele vor fi trimise la adresa : 79717 București 22, Calea Victoriei, 125.

CALCULUL REGIMULUI TRANZITORIU AL APEI ÎN REȚELE DE CONDUCTE RAMIFICATE, INELARE ȘI MIXTE. II. APLICAREA PRACTICĂ A METODEI

de I. JELEV
Institutul de Cercetări Hidrotehnice București

Cu ajutorul programului de calcul „REȚEA" elaborat în I.C.H. s-a studiat regimul nepermanent al apei într-un număr mare de rețele de conducte sub presiune din cadrul unor sisteme de irigație din țară și străinătate.
Se prezintă o parte din rezultatele obținute în I.C.H. în acest domeniu, precum și unele concluzii privind desfășurarea fenomenelor tranzitorii rapid variabile în rețele de conducte.

1. INTRODUCERE

Pentru evidențierea manevrelor și situațiilor celor mai periculoase întîlnite în exploatare, precum și pentru studiul comportării în ansamblu a rețelelor de conducte ramificate sau inelare, s-a analizat regimul tranzitoriu al apei în două rețele de conducte (una ramificată, cealaltă inelară) a căror formă și dimensiuni sînt reprezentate în figurile 1 și 2.

S-a studiat un număr mare de manevre posibile și s-au analizat diverse situații de funcționare a rețelelor pe teren orizontal sau în pantă. Rezultatele obținute s-au aplicat la studiile efectuate pentru stabilirea sistemelor de protecție optimă la lovitura de berbec pentru mai multe rețele de conducte sub presiune din sistemele de irigație Viișoara și Cîmpia Buzăului. S-a analizat de asemenea comportarea în regim tranzitoriu și s-au dimensionat instalațiile și dispozitivele de protecție pentru 50 de rețele de irigație din sistemul Kirkuk-Adhaim din nord-estul Irakului. În cele ce urmează prezentăm unele concluzii ale studiilor efectuate pentru cele două rețele reprezentate în figurile 1 și 2 precum și pentru două rețele din sistemul de irigație Viișoara și Cîmpia Buzăului (fig. 20*a* și fig. 31). Rezultatele și concluziile obținute referitor la funcționarea în regim nepermanent a rețelelor de conducte din sistemul de irigație Kirkuk-Adhaim sînt prezentate detaliat în lucrarea [3].

2. MIȘCAREA NEPERMANENTĂ A APEI ÎNTR-O REȚEA DE CONDUCTE RAMIFICATE

Pentru evidențierea manevrelor celor mai periculoase din exploatarea curentă (normale sau accidentale), cît și a comportării în ansamblu a unei rețele ramificate de conducte la șocul hidraulic, s-a ales pentru studiul regimului tranzitoriu al apei, o rețea ramificată de conducte, a cărei formă și caracteristici geometrice sînt prezentate în figura 1.

Stația de pompare alimentează cu apă rețeaua de conducte cu un debit de 6,5 m^3/s la o presiune de 10 at. La hidranți presiunile sînt cuprinse între 5 și 7 at. Spre deosebire de stațiile de pompare și repompare ce refulează apa prin una sau mai multe conducte independente într-un bazin

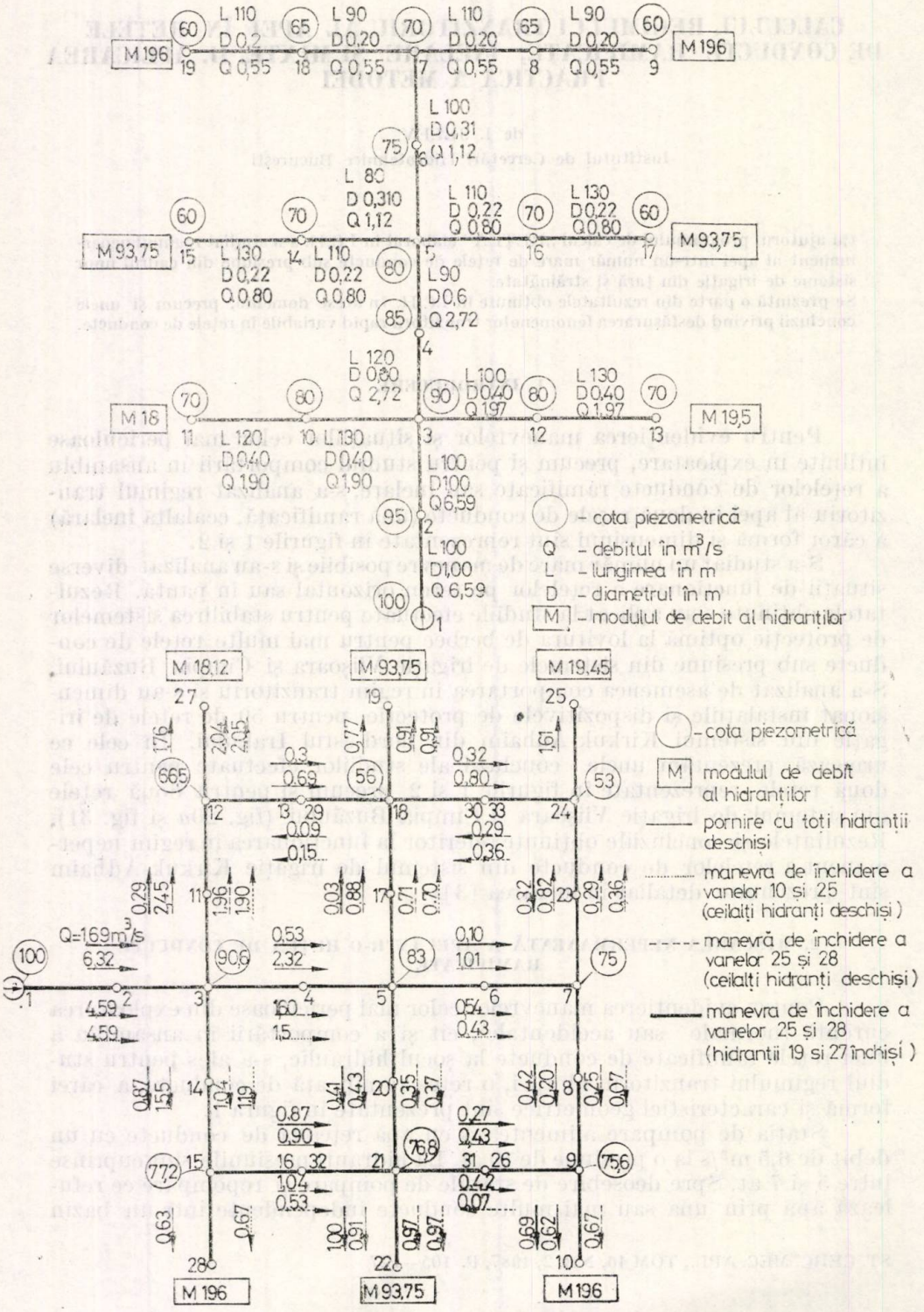


Fig. 1 și 2. — Schemele de calcul pentru două rețele de conducte sub presiune.

sau canal de refulare, în cazul stațiilor de punere sub presiune, există un număr mult mai mare de manevre și situații ce au ca efect apariția unor regimuri tranzitorii periculoase pentru rețea. Astfel, în timpul unor regimuri tranzitorii de funcționare a stației, hidranții din rețea pot avea diferite grade de deschidere. Alți hidranți aflați în curs de deschidere sau închidere constituie surse de perturbații ce se pot suprapune peste unele regimuri tranzitorii periculoase, cum sînt cele produse de oprirea bruscă a stației de pompare, evacuarea accidentală a unor pungi de aer etc. Valoarea presiunii de închidere etanșă a dispozitivelor ce se închid la lipsa de presiune amonte (dispozitive tip AO, vane tip FLONIC etc.), prevăzute în unele rețele de conducte, influențează la rîndul lor dimensiunile finale ale unor instalații de protecție cum sînt castelele de echilibru sau rezervoarele de aer.

Pe baza datelor din literatura de specialitate și a rezultatelor studiilor proprii, s-au evidențiat și studiat următoarele tipuri de manevre și situații mai periculoase :

A. MANEVRE LA STAȚIA DE POMPARE

A I. pornirea stației ;
A II. oprirea stației în cazul unei rețele amplasate pe un teren orizontal ;
A III. oprirea stației în cazul unei rețele amplasate pe un teren cu panta pozitivă accentuată.
Pentru manevra A III au fost studiate mai multe variante :
A III. 1. rețea fără protecție (cu unul sau mai mulți hidranți deschiși) ;
A III. 2. rețea echipată cu supape de suprapresiune ;
A III. 3. rețea prevăzută cu rezervor de aer.

B. MANEVRE LA HIDRANȚII DE CAPĂT

B I. deschiderea unuia sau a mai multor hidranți ;
B II. închiderea unuia sau a mai multor hidranți ;
B II. 1. fără supape de suprapresiune ;
B II. 2. cu supape de suprapresiune ;
B III. evacuarea accidentală a unor pungi de aer (cu unul sau mai mulți hidranți închiși).

Prin suprapunerea unora dintre manevrele de mai sus, rezultă un număr sporit de variante posibile.

În cele ce urmează se analizează efectele manevrelor enumerate mai sus, manevre considerate ca reprezentative pentru o rețea de conducte.

A I. *Pornirea stației de pompare.* Manevra s-a executat în condițiile creșterii debitului de la $Q = 0$, la debitul maxim $Q = 6{,}5$ m^3/s, în timp de 5 secunde (toți hidranții din rețea deschiși). În figura 3 se prezintă variația presiunilor în diferite puncte din rețea. Se observă că în cazul unei rețele amplasate într-un teren orizontal, manevra de pornire nu conduce la suprapresiuni, fapt confirmat și de experiența practică de exploa-

tare a rețelelor. Concluzia de mai sus rămîne valabilă și în situația în care toți hidranții din rețea sînt închiși în momentul inițial. *)

Datorită faptului că după o perioadă scurtă de desfășurare în timp a fenomenului (15 ÷ 20 secunde), parametrii mișcării (presiuni debite) tind spre valorile de regim permanent manevra de pornire este utilizată

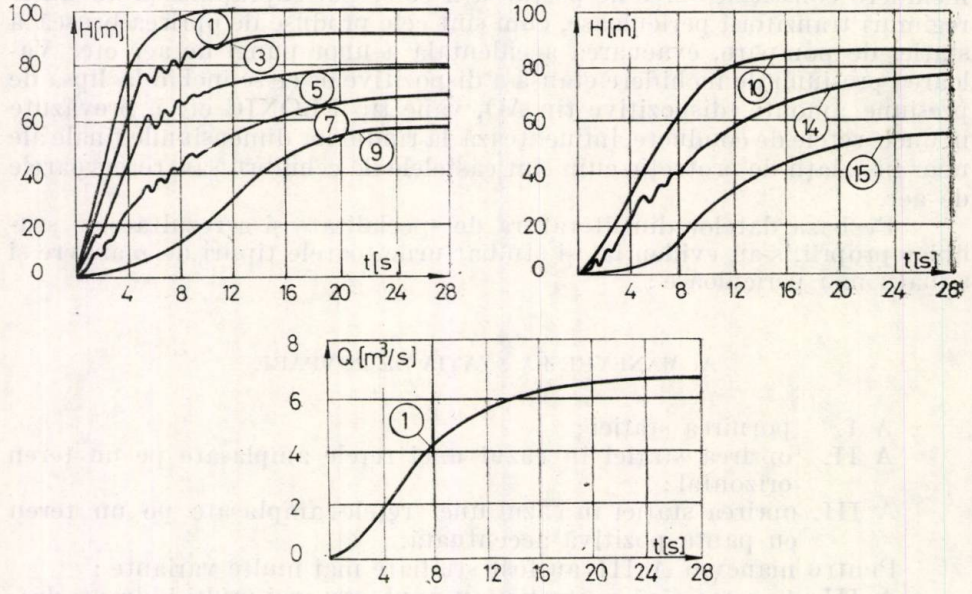


Fig. 3

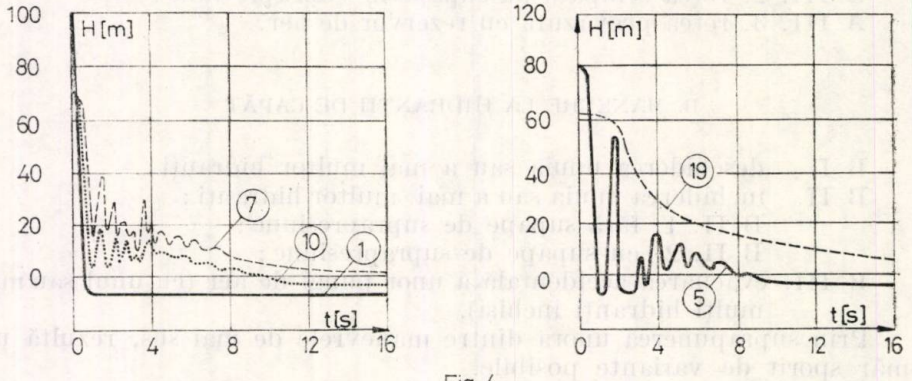


Fig. 4

Fig. 3. — Variații de presiune și debit în funcție de timp la pornirea stației de pompare.
Fig. 4. — Variația presiunii în timp, la oprirea bruscă a stației de pompare (rețea amplasată pe teren orizontal).

*) Manevra de pornire s-a efectuat considerîndu-se în momentul inițial rețeaua plină cu apă. În cazul pornirii stației de pompare, în faza de umplere cu apă a rețelei, se constată apariția în unele cazuri a unor suprapresiuni ce pot prezenta un pericol deosebit pentru conductele rețelei [2].

în cadrul programului „REȚEA" pentru calculul regimului permanent inițial în rețelele de conducte ramificate și inelare. După stabilirea regimului de curgere se simulează manevrele dorite pentru studiul regimului nepermanent.

A. II. *Oprirea bruscă a stației de pompare în cazul rețelei amplasate pe un teren orizontal.* Manevra de oprire totală s-a executat în timp de 5 secunde, cu scăderea rapidă a debitului la stația de pompare de la 6,5 m^3/s la zero, toți hidranții fiind în funcțiune. În figura 4 se observă evoluția continuu scăzătoare a presiunilor în timp. Pe tot timpul fenomenului nu apar suprapresiuni periculoase.

A III. *Manevra de oprire a stației în cazul unei rețele de conducte amplasate pe un teren în pantă.* Pentru a nu modifica un număr mare de date de bază, s-a completat rețeaua cu două tronsoane scurte de conductă în nodurile 11 și 13 al căror capăt superior se află la o cotă mai ridicată cu 70 m față de cota nodurilor 11 și 13. La capătul celor două tronsoane de conductă apa este refulată în două canale cu nivel constant.

A III 1. *Cazul fără protecție.* S-au studiat următoarele situații de funcționare a rețelei :

Hidranții 15, 17, 19 și 9 deschiși. Rezultatele calculelor se prezintă grafic în figura 5. Se observă că datorită curgerii inverse apare în rețea o alternare rapidă a presiunilor scăzute (cavitație în unele noduri) cu suprapresiuni. Fenomenul este caracteristic pentru o astfel de situație și subliniem faptul că rețeaua amplasată în pantă se comportă asemănător cu o conductă de refulare unică, fără protecție.

Datorită faptului că există patru hidranți deschiși, suprapresiunile nu sînt mari, dar apariția cavitației în unele noduri, conduce la necesitatea analizei unor mijloace de protecție (de exemplu rezervor de aer amplasat lîngă stația de pompare, dispozitive de aerisire-dezaerisire etc.).

Hidranții 9 și 19 închiși, iar hidranții 15 și 17 deschiși. Variația presiunii în mai multe puncte din rețea este reprezentată grafic în figura 6. Fenomenul se desfășoară la fel ca în cazul precedent, obținîndu-se valori mai mari ale presiunilor, în special la hidranții 9 și 19 . Și în acest caz se impune amplasarea unui rezervor de aer lîngă stație, rezervor ce transformă mișcarea ondulatorie într-o mișcare oscilatorie lentă.

Hidranții 15, 17, 19 și 9 închiși. Din figura 7 se observă că aceasta este situația cea mai dezavantajoasă, obținîndu-se suprapresiunile cele mai mari. Introducerea unor mijloace de protecție este obligatorie.

A III 2. *Protecția cu supape de suprapresiune.* În figura 8 se prezintă rezultatele obținute pentru manevra A III, în cazul amplasării unor supape de suprapresiune în nodurile 14, 16, 18 și 8. Se observă efectul favorabil al acestor supape, prin reducerea presiunilor maxime și scăderea frecvenței oscilațiilor.

A III 3. *Protecția cu rezervor de aer.* În figura 9 se prezintă variația presiunilor în conductă, a presiunii și volumului pernei de aer precum și a debitului schimbat între rețea și rezervorul de aer amplasat în nodul 2. Caracteristicile rezervorului sînt $V_{tot} = 20$ m^3 ; $V_{aer} = 5$ m^3 ; rezistența hidraulică a branșamentului rezervorului de aer la conductă, $M = \pm 8{,}25$ (diametrul conductei de racotd $d_r = 350$ mm). Efectele rezervorului de

aer constau în transformarea mișcării rapid variabile de tip ondulatoriu, într-o mișcare lentă, oscilatorie, cu limitarea presiunilor maxime și înlăturarea fenomenelor de cavitație. În toate situațiile în care rețeaua de

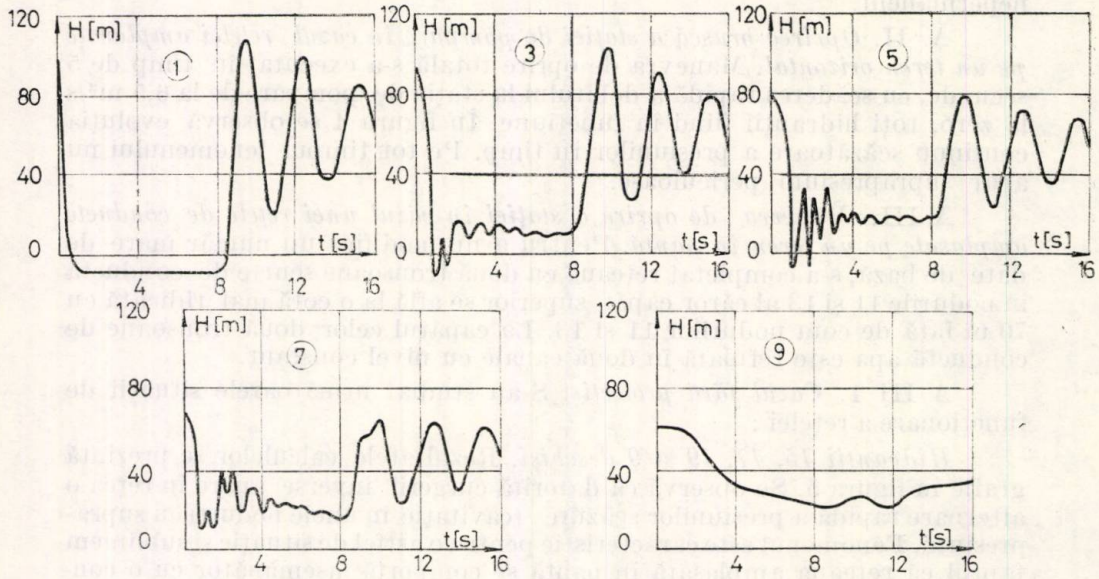


Fig. 5

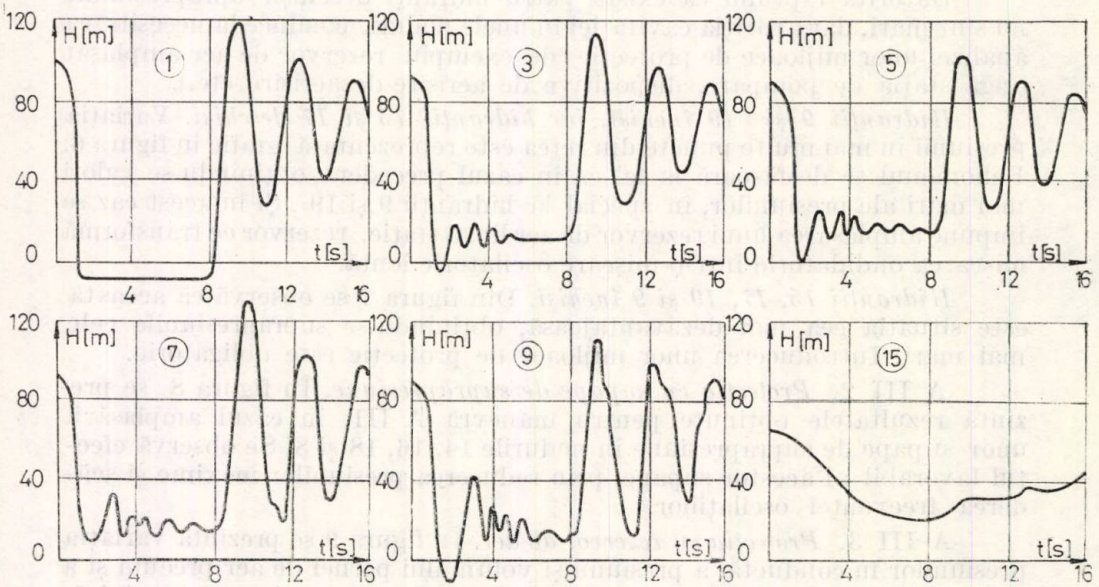


Fig. 6

Fig. 5 ÷ 7. — Variația presiunilor în funcție de timp la oprirea bruscă a stației de pompare (rețea amplasată pe un teren în pantă).

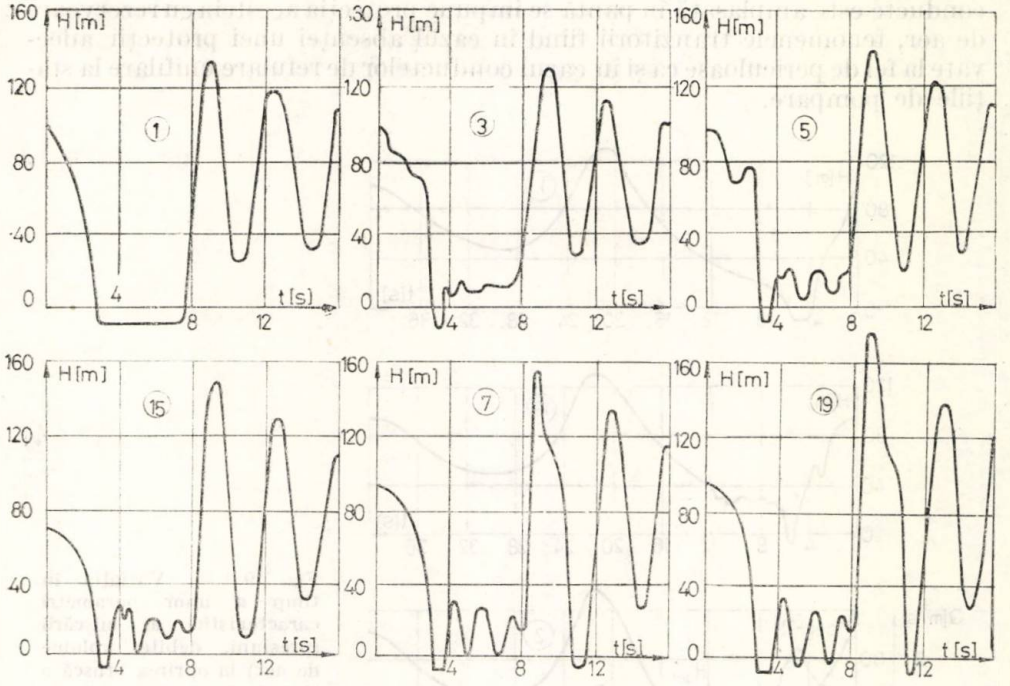


Fig. 7

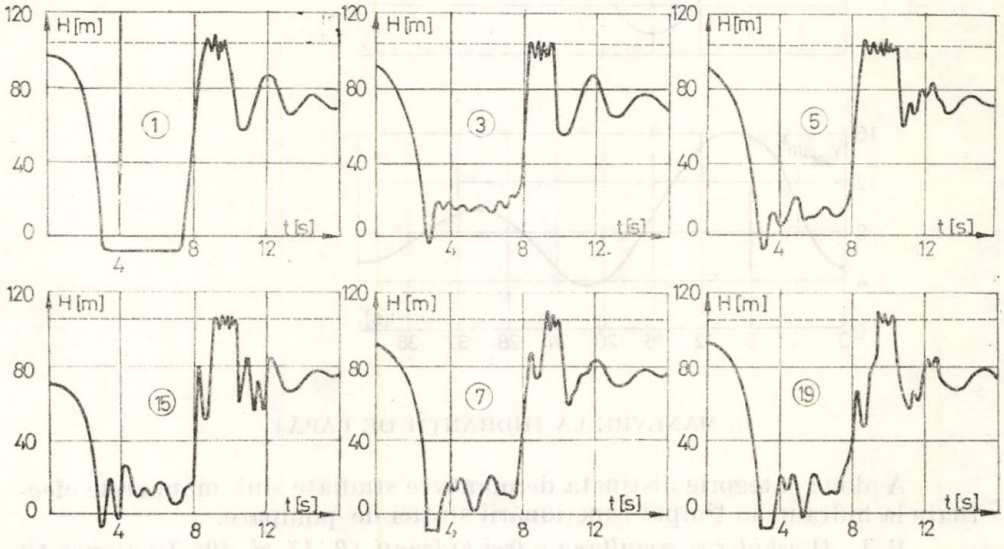


Fig. 8

Fig. 8. — Variația presiunilor la oprirea bruscă a stației de pompare, într-o rețea echipată cu supape de suprapresiune.

conducte este amplasată în pantă se impune protecţia acesteia cu rezervoare de aer, fenomenele tranzitorii fiind în cazul absenţei unei protecţii adecvate la fel de periculoase ca şi în cazul conductelor de refulare unifilare la staţiile de pompare.

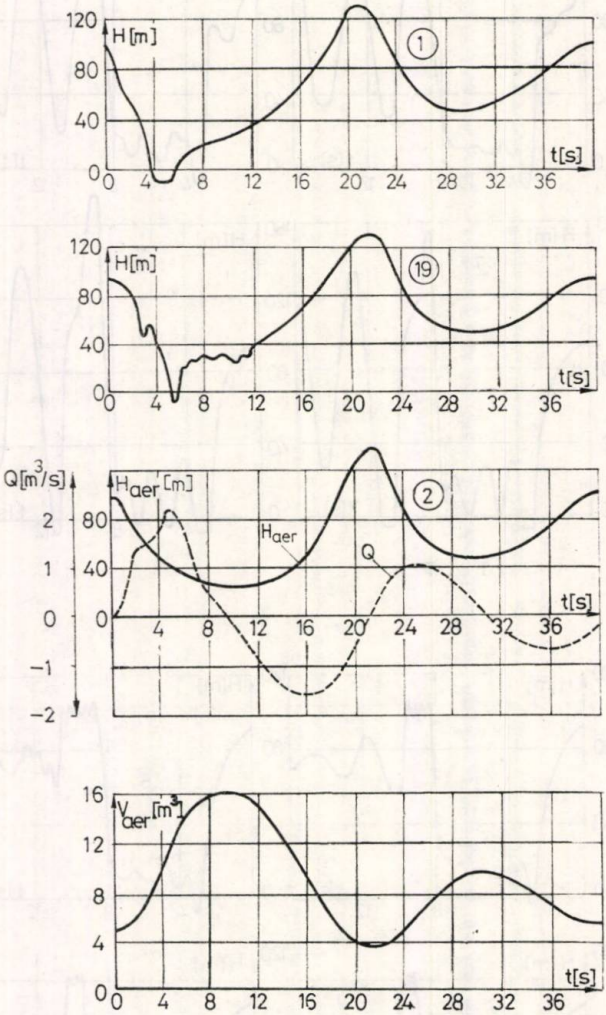


Fig. 9. — Variaţia în timp a unor parametri caracteristici ai mişcării (presiuni, debite, volume de aer) la oprirea bruscă a staţiei de pompare (protecţie cu rezervor de aer).

B. MANEVRE LA HIDRANŢII DE CAPĂT

A doua categorie distinctă de manevre studiate sînt manevrele efectuate la hidranţi în timpul funcţionării staţiei de pompare.

B I. *Deschiderea simultană a trei hidranţi* (*9, 17 şi 19*). În figura 10 se prezintă grafic variaţia presiunilor în mai multe puncte din reţea, variaţia debitului într-un nod cu hidrant ce se deschide în timp de 15 s., precum şi variaţia debitului la staţia de pompare. Hidranţii 11, 13 şi 15

sînt deschişi. Se observă că nu apar suprapresiuni sau variaţii rapide de presiune. În prima fază are loc o scădere accentuată a presiunii în dreptul hidranţilor ce se deschid, urmată de o creştere lentă a acesteia pînă la stabilizarea unei valori constante de regim. În celelalte noduri scăderea presiunii în prima fază este mult mai puţin accentuată. Debitul prih hidranţi

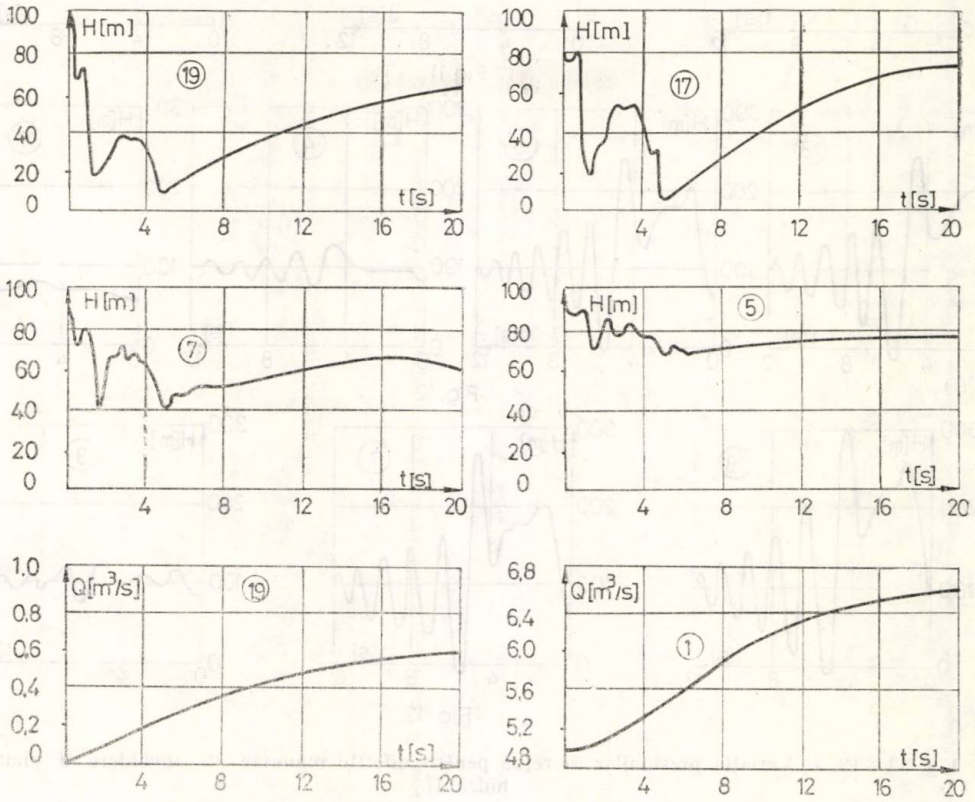


Fig. 10. — Variaţii de presiuni şi debite în reţea şi la staţia de pompare (deschiderea simultană a trei hidranţi).

creşte lent odată cu deschiderea acestora, iar debitul staţiei de pompare se măreşte corespunzător.

B II. 1. *Închiderea totală în timp de 5 secunde a unor hidranţi (cazul fără supape de suprapresiune în reţea)*

Închiderea hidrantului 19, toţi ceilalţi hidranţi fiind deschişi. În cazul închiderii unui hidrant se produce o suprapresiune importantă la acel hidrant, suprapresiune ce se propagă în reţea pînă în primul punct în care, datorită unui hidrant deschis, prin conductă circulă un anumit debit. În restul reţelei nu se mai produc variaţii importante de presiuni şi debite. În figura 11 sînt reprezentate grafic perturbaţiile produse.

Închiderea simultană a doi hidranţi (9 şi 19) toţi ceilalţi hidranţi fiind deschişi. În această situaţie apar suprapresiuni mai mari ce se propagă în reţea. După întîlnirea unei porţiuni de reţea prin care circulă

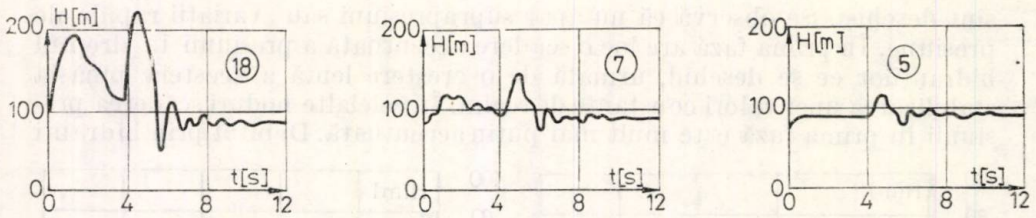


Fig.11

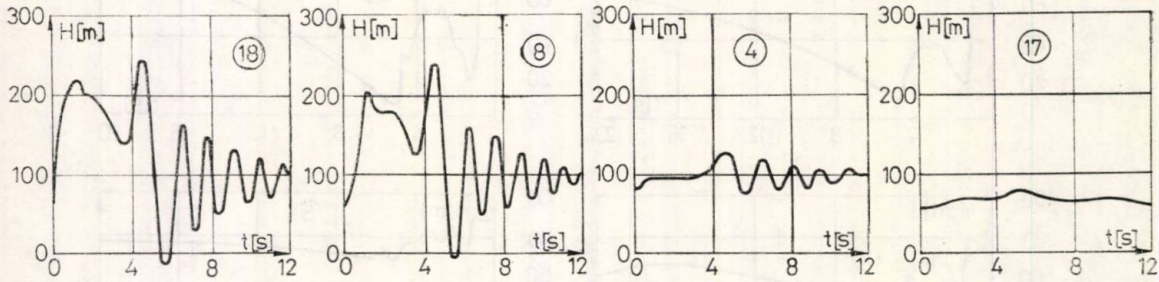


Fig. 12

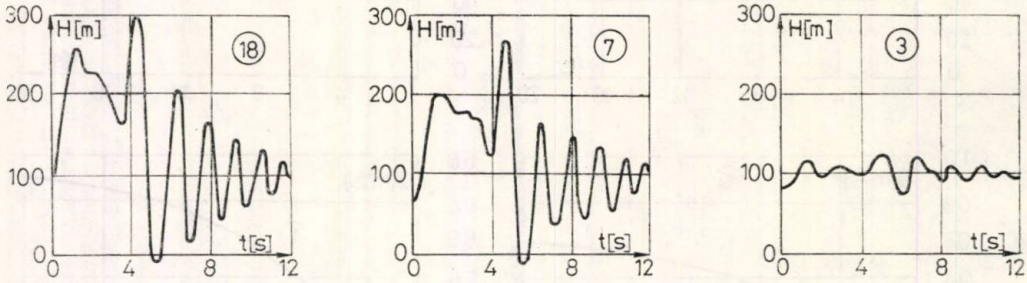


Fig. 13

Fig. 11÷13. — Variația presiunilor în rețea pentru diferite manevre de închidere a unor hidranți.

apă datorită hidranților rămași deschiși, ca și în cazul precedent, fenomenul se atenuează (fig. 12).

Închiderea simultană a trei hidranți (*9, 17 și 19*), toți ceilalți hidranți fiind deschiși. În situația închiderii simultane în 5 secunde a 3 hidranți, apar suprapresiuni deosebit de mari, cu oscilații rapide ce se propagă dinspre hidranții închiși spre stația de pompare (fig. 13). În realitate manevra analizată (închiderea unui debit foarte mare în numai 5 secunde) nu este posibilă. Timpul de închidere a unui hidrant este de cel puțin $10 \div 15$ s, iar debitul evacuat prin cei 3 hidranți este mult mai mic. Ca și în cele două cazuri precedente, în momentul cînd unda de presiune întîlnește o porțiune de rețea în care debitul apei este diferit de zero, are loc o atenuare puternică a suprapresiunilor (nodul 3).

B II. 2. *Protecția cu supape de suprapresiune.* În cazul amplasării unor supape de suprapresiune în nodurile 8, 16 și 18 se observă pentru toate cele trei manevre anterioare un efect favorabil materializat prin reducerea suprapresiunilor și scăderea frecvenței oscilațiilor acestora

(fig. 14, 15 și 16). În figura 14 s-a reprezentat și variația debitului pompat și a debitului evacuat prin supapa de suprapresiune din nodul 18, pentru cazul închiderii în 5 s. a hidrantului 19, toți ceilalți hidranți rămînînd deschiși. În figura 16 s-a reprezentat și variația debitului la hidranții 15 și 9 în cazul închiderii simultane a hidranților 9, 17 și 19. Se observă tendința creșterii debitului prin hidrantul 15 rămas deschis, ca urmare a închiderii hidranților 9, 17 și 19.

B III. *Evacuarea accidentală a unor pungi de aer.* Realizarea acestei manevre, presupune adoptarea unei ipoteze în privința eliminării pungilor de aer. Întrucît asupra volumului de aer și a timpului de evacuare a acestuia se pot face mai multe ipoteze, rezultatele calculelor trebuie privite în funcție de ipotezele admise. În cazul eliminării unei pungi de aer în dreptul hidrantului 9, are loc o antrenare rapidă a coloanei de apă din conductă pe timpul eliminării aerului, urmată de o oprire rapidă a acesteia în momentul eliminării întregii cantități de aer. Se presupune că evacuarea întregii cantități de aer se realizează în timp de 5 secunde. În timpul accelerării coloanei de apă în conductă, apare fenomenul de cavitație în zona respectivă, urmat de o suprapresiune foarte mare ce se propagă în rețea pînă la întîlnirea unor conducte cu hidranți deschiși. Zona afectată este cu atît mai întinsă, cu cît unda de presiune produsă străbate o distanță mai mare pînă la primul hidrant deschis. În figurile 17, 18 și 19 se prezintă suprapresiunile în diverse puncte din rețea, în situația în care este închis numai hidrantul 19 în primul caz, hidanții 17 și 19 în al doilea caz, respectiv hidranții 15, 17 și 19 în cel de al treilea caz. Aceste situații accidentale sînt cele mai periculoase într-o rețea, ele conducînd la suprapresiuni deosebit de mari. Pentru prevenirea lor, sînt necesare măsuri speciale pentru evitarea formării unor pungi de aer în rețea și de evacuare controlată a acestora atunci cînd apar (umplere controlată a rețelei de conducte cu apă, prevederea pe bază de calcule hidraulice a unor dispozitive de aerisire-dezaerisire, montarea unor supape de suprapresiune etc.).

3. STUDIUL MIȘCĂRII NEPERMANENTE A APEI ÎNTR-O REȚEA RAMIFICATĂ DE CONDUCTE DIN SISTEMUL VIIȘOARA

Ținînd seama de datele din literatura de specialitate și de rezultatele și concluziile expuse în paragraful precedent, s-a studiat mișcarea nepermanentă a apei în plotul 64 (CS1) din sistemul Viișoara în scopul stabilirii și dimensionării sistemelor de protecție la lovitura de berbec. Schema rețelei de conducte, de tip ramificat este prezentată în figura 20 *a*. În cea mai mare parte rețeaua este situată pe un teren plan, sau cu pante negative mici. Spre extremități pantele negative cresc foarte mult, unii dintre hidranții de capăt aflîndu-se cu circa 20 ÷ 30 m sub nivelul stației de pompare. Ca urmare, pe anumite tronsoane periferice pot apare presiuni mari, cînd hidranții de capăt sînt închiși, sau chiar în timpul funcționării acestora.

Principalele caracteristici ale rețelei (debite, presiuni de regim, diametre, lungimi) sînt prezentate în figura 20 *b* ce conține schema de calcul a sectorului 64 (CS1) din sistemul Viișoara. Rețeaua de conducte

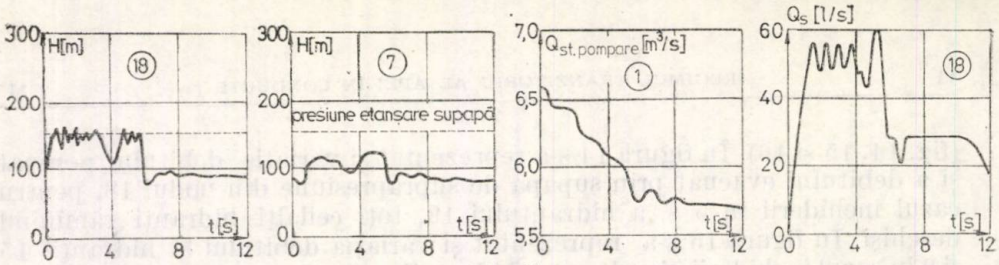


Fig. 14

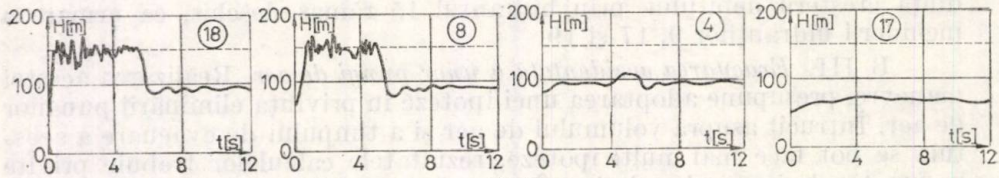


Fig. 15

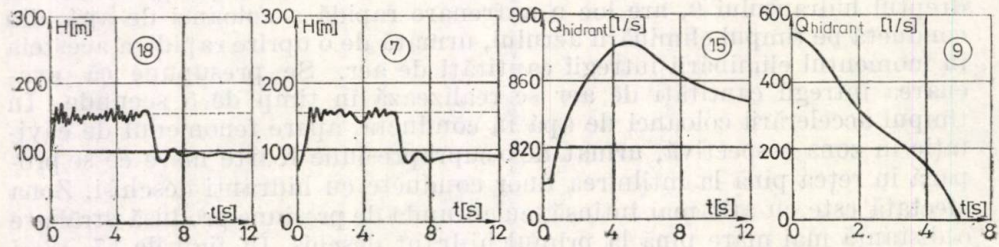


Fig. 16

Fig. 14÷16. — Variații de presiuni și debite în rețeaua echipată cu supape de suprapresiune, pentru diferite manevre de închidere a hidranților.

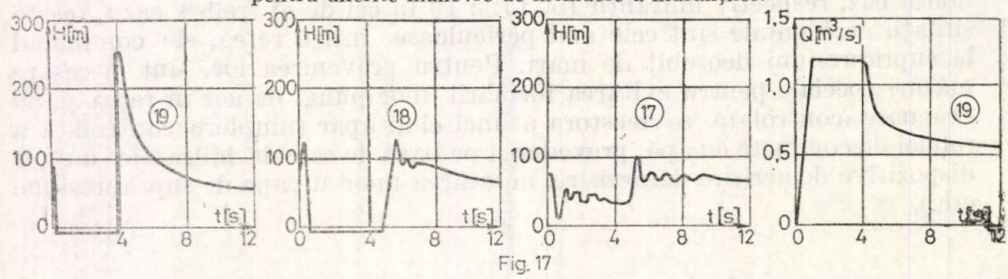


Fig. 17

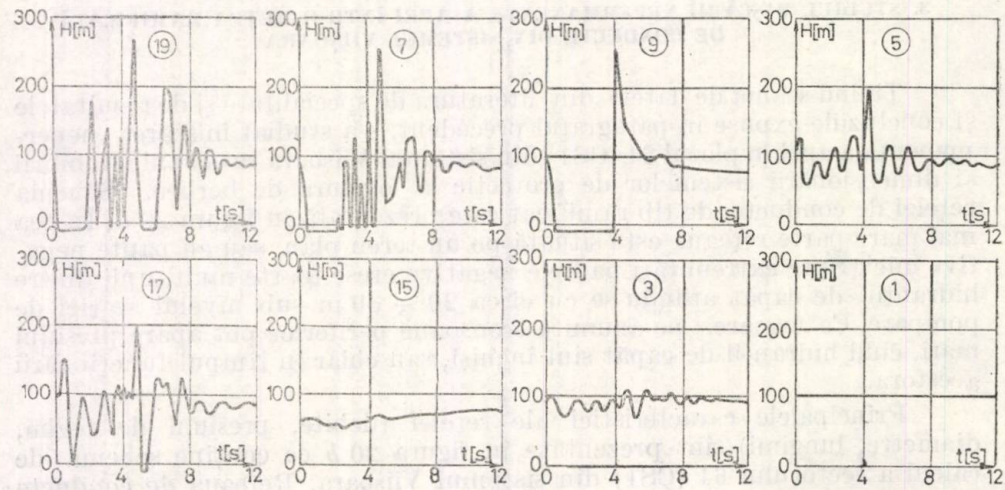


Fig. 18

Fig. 17÷19. — Variații de presiune în rețea la evacuarea unor pungi de aer.

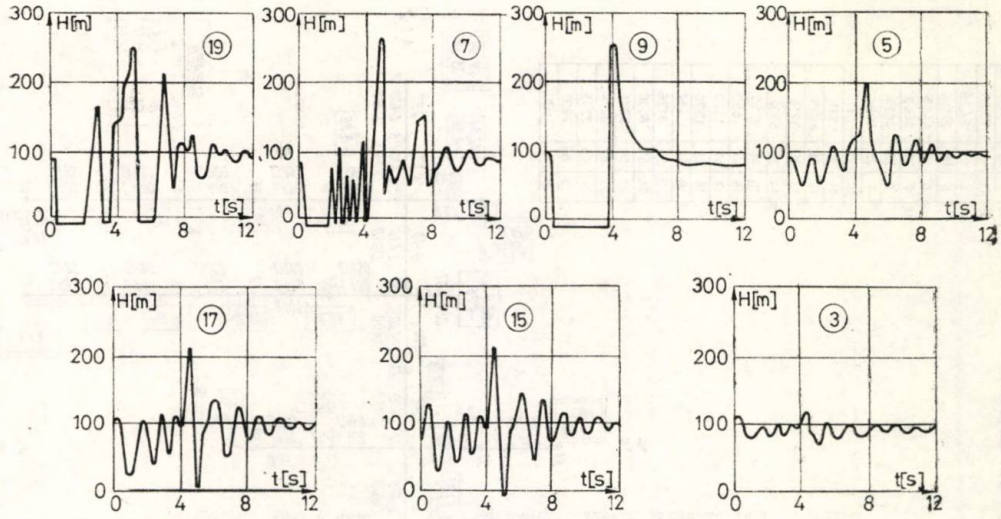


Fig. 19

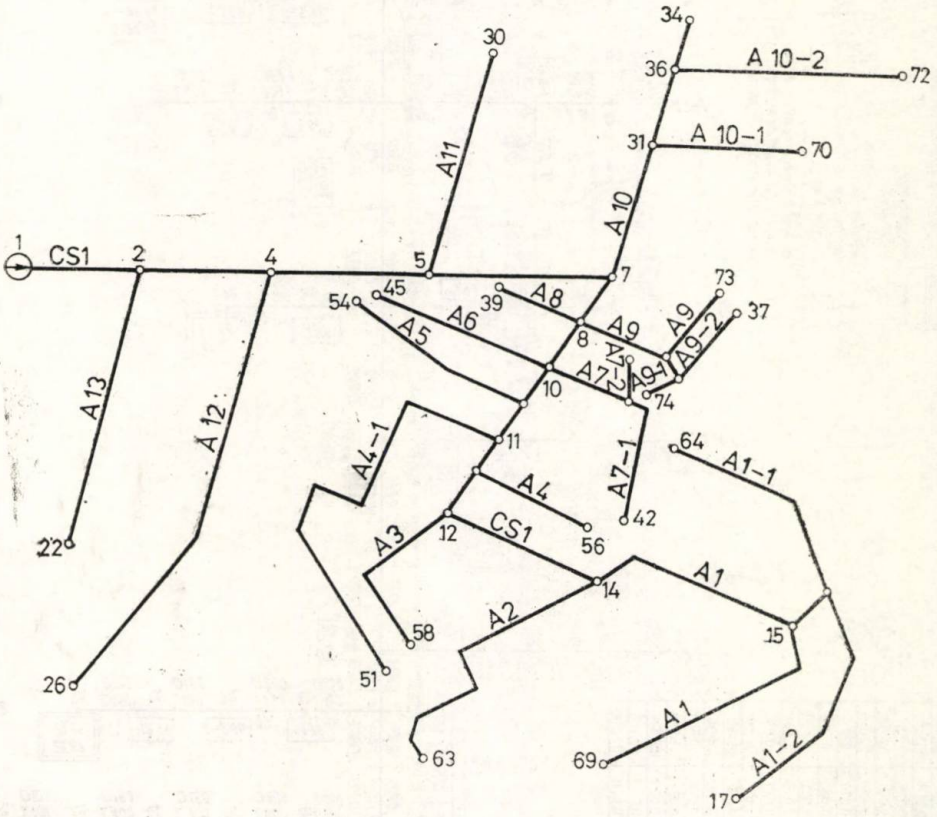


Fig. 20 *a*

Fig. 20*a*. — Schema unei rețele de conducte ramificate din sistemul Viișoara.

MŰSZAKI EGYETEM 1848

		H	Q	M
1	17	65	0,027	89.163
2	22	48	0,067	10.693
3	26	53,73	0,070	10.965
4	30	52,68	0,087	6900
5	34	51,81	0,0174	121126
6	37	57,75	0,030	64157
7	39	48,03	0,052	17.763
8	42	45,00	0,025	72.000
9	45	48,43	0,070	9884
10	51	57,50	0,081	8766
11	54	53,00	0,052	19.500
12	56	53,31	0,026	78.861
13	58	50,00	0,035	40.810
14	63	44,80	0,101	4.400
15	64	47,50	0,027	65156
16	66	51,00	0,085	6866
17	70	57,70	0,0174	190.580
18	72	54,98	0,0348	45.399
19	73	57,70	0,023	109.074
20	74	57,75	0,023	109.168
21	75	45,00	0,020	112.500

SCHEMA DE CALCUL A REȚELEI RAMIFICATE
DE CONDUCTE DIN SISTEMUL VIIȘOARA, SECTOR 64(CS1)

cota piezometrică a hidranților de capăt *)
cota geodezică a hidranților de capăt
cotă piezometrică
cotă geodezică
Q debitul în l/s
L lungimea în m
D diametrul în mm

*) toate cotele sînt exprimate în cote relative față de nivelul din bazinul de aspirație al stației de pompare

DIAFRAGMA

1	3	5,08
2	6	5,00
3	9	15,80
4	13	154,26
5	16	27146
6	19	4445
7	21	4445
8	23	4024
9	25	4024
10	27	731
11	29	731
12	32	8935
13	35	3216
14	38	5732
15	40	9259
16	44	4657
17	47	1570
18	49	1570
19	53	11468
20	55	8136
21	57	8090
22	59	2274
23	61	2274
24	66	2231
25	68	2231
26	71	11420

SUPAPĂ

NOD	Z
16	-8,96
62	-25,96
67	-23,36

Fig. 20*b*. — Schema de calcul pentru o rețea de conducte din sistemul Viișoara.

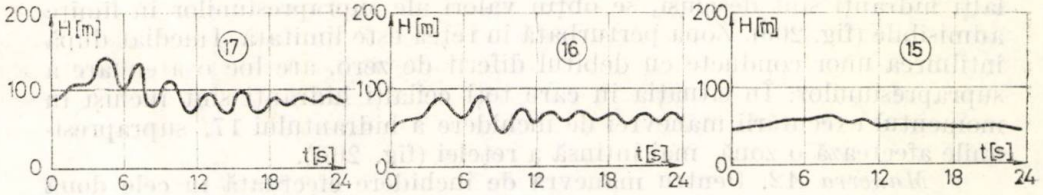


Fig. 20c

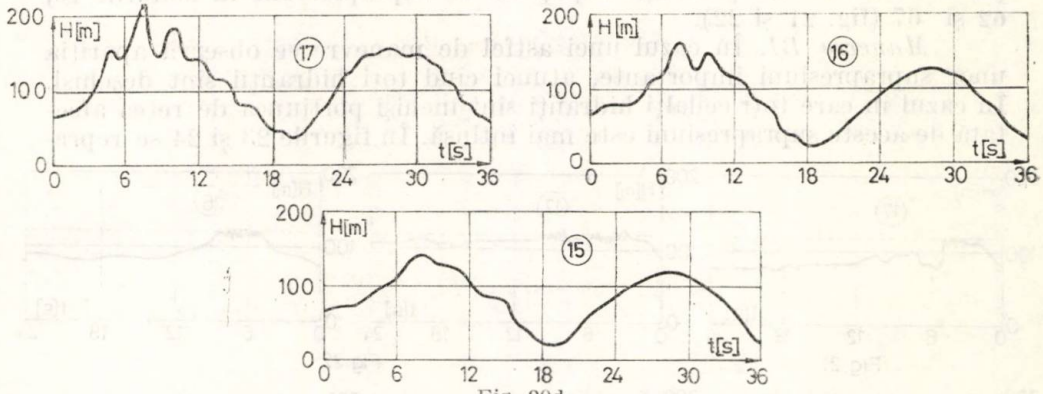


Fig. 20d

Fig. 20c și *d* — Variații de presiune în rețea la închiderea unui hidrant.

este alimentată cu apă de la o stație de pompare comună pentru ploturile CS1, CS2 și CS3. Pentru plotul CS1, stația de pompare asigură un debit de $Q = 0{,}972$ m³/s la o presiune $H = 69{,}5$ m. Tot în figura 20*b* se prezintă tabelar presiunea, debitul maxim și modulul de debit al fiecărui hidrant, precum și nodurile cu diafragmă fictivă (în care s-au concentrat pierderile de sarcină) cu indicarea valorilor modulelor de debit corespunzătoare fiecărei diafragme.

3.1. REZULTATELE CALCULELOR

Ținînd seama de amplasarea în teren a rețelei (orizontală, cu unele zone avînd pantă negativă accentuată) s-au studiat următoarele manevre :

A. *Închiderea unui hidrant (17) în timp de 15 secunde* :

— A1. fără supape de suprapresiune în rețea ;

— A2. cu supape de suprapresiune în nodurile 16, 62, 67 (fig. 20*b*).

B. *Închiderea simultană a patru hidranți (17, 63, 64 și 69) în timp de 15 secunde* :

— B1. fără supape de suprapresiune ;

— B2. cu supape de suprapresiune în nodurile 16, 62 și 67.

C. *Eliminarea unei pungi de aer în dreptul hidrantului 17* :

— C1. fără supape de suprapresiune ;

— C2. cu supape de suprapresiune în nodurile 16, 62 și 67.

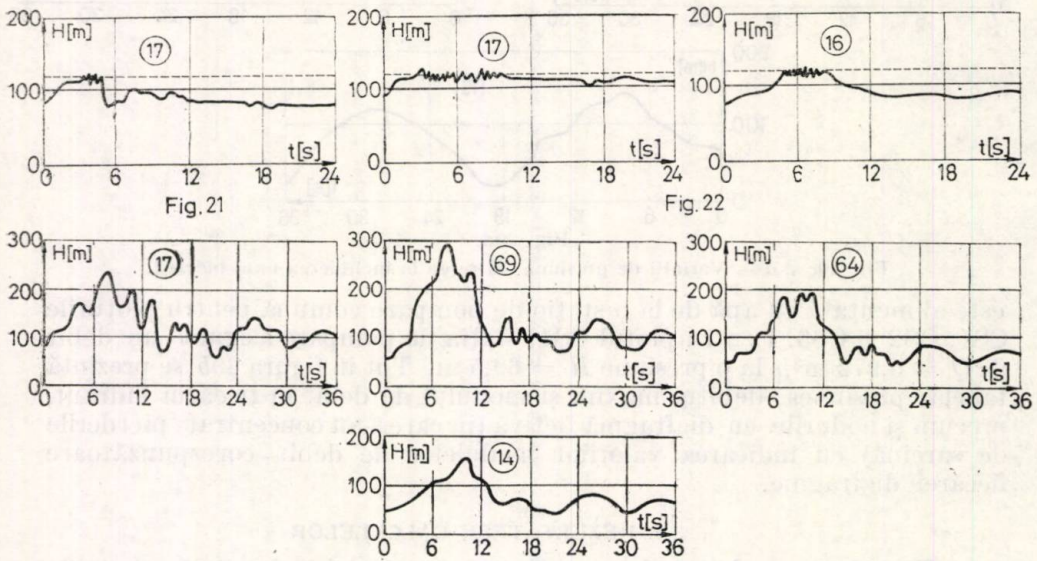
Întrucît manevrele A, B și C s-au dovedit cele mai nefavorabile pentru rețeaua studiată, nu s-au mai prezentat și alte manevre sau situații analizate.

Manevra A1. O astfel de manevră este des întîlnită în exploatare. Închizînd hidrantul 17 în timp de 15 secunde, în situația în care toți cei-

lalți hidranți sînt deschiși, se obțin valori ale suprapresiunilor în limite admisibile (fig. 20*c*). Zona perturbată în rețea este limitată. Imediat după întîlnirea unor conducte cu debitul diferit de zero, are loc o atenuare a suprapresiunilor. În situația în care toți ceilalți hidranți sînt închiși în momentul executării manevrei de închidere a hidrantului 17, suprapresiunile afectează o zonă mai întinsă a rețelei (fig. 20d).

Manevra A2. Pentru manevra de închidere efectuată în cele două situații de mai sus, se poate observa efectul favorabil de reducere a suprapresiunilor datorită prezenței supapelor de suprapresiune în nodurile 16, 62 și 67 (fig. 21 și 22).

Manevra B1. În cazul unei astfel de manevre se observă apariția unor suprapresiuni importante, atunci cînd toți hidranții sînt deschiși. În cazul în care toți ceilalți hidranți sînt închiși porțiunea de rețea afectată de aceste suprapresiuni este mai întinsă. În figurile 23 și 24 se repre-



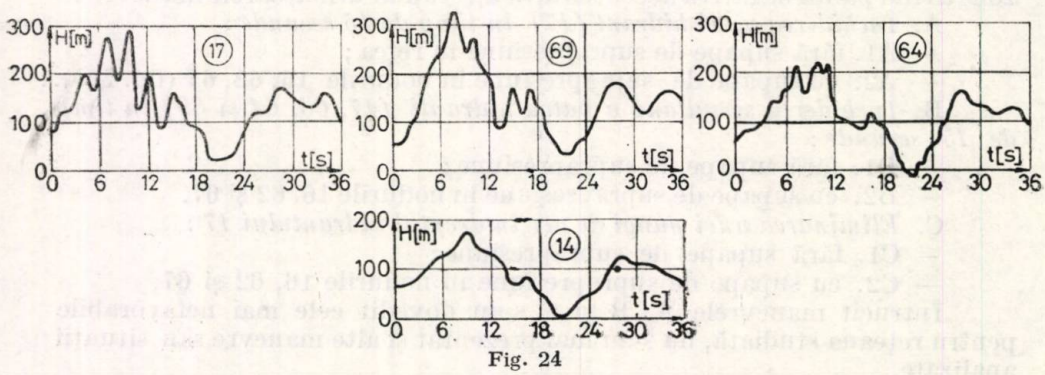


Fig. 21 și 22. — Variații de presiune în rețea la închiderea unui hidrant (supape de suprapresiune în nodurile 16, 62 și 67).

Fig. 23 și 24. — Variații de presiune în rețea (închiderea simultană a patru hidranți).

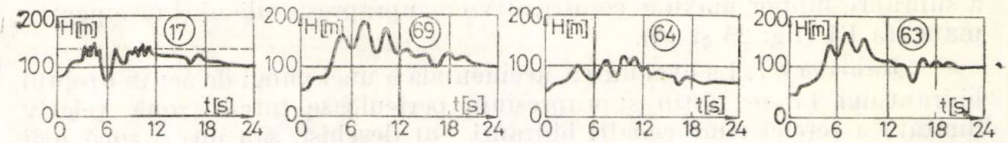


Fig. 25

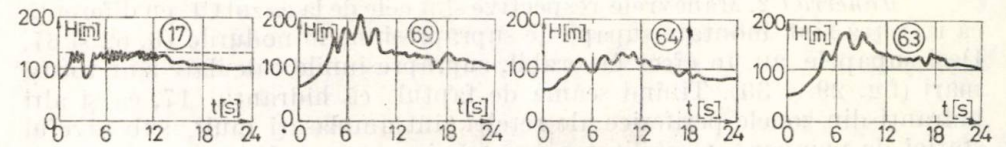


Fig. 26

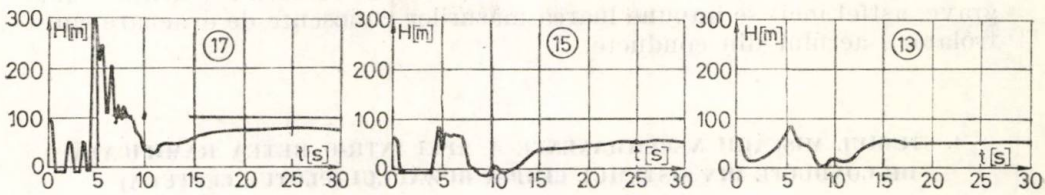


Fig. 27

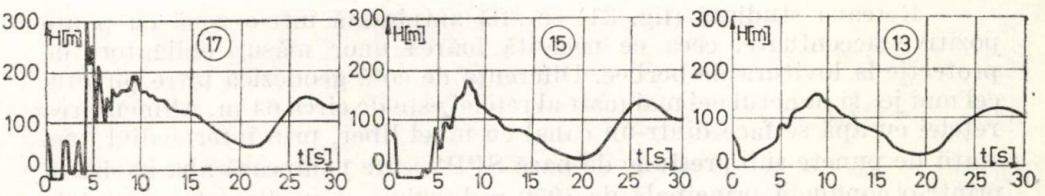


Fig. 28

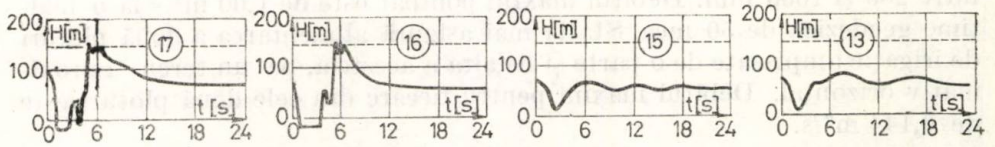


Fig. 29

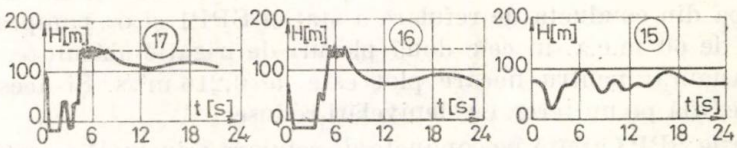


Fig. 30

Fig. 25 și 26. — Variații de presiune în rețea, ca urmare a închiderii simultane a patru hidranți (supape de suprapresiune în nodurile 16, 62 și 67).

Fig. 27÷30. — Variații de presiune în rețea ca urmare a evacuării accidentale a unor pungi de aer (cu și fără supape de suprapresiune în rețea).

zintă grafic variația presiunilor în timp, în diverse puncte din rețea, pentru cele două situații studiate.

Manevra B2. Pentru aceeași manevră de la cazul B1, datorită prezenței supapelor de suprapresiune în nodurile 16, 62 și 67 se observă o atenuare

a suprapresiunilor maxime comparativ cu suprapresiunile obținute pentru manevra B1 (fig. 25 și 26).

Manevra C1. La evacuarea accidentală a unei pungi de aer în dreptul hidrantului 17 se obțin suprapresiuni periculoase într-o zonă relativ limitată a rețelei cînd ceilalți hidranți sînt deschiși, sau într-o zonă mai întinsă, atunci cînd toți ceilalți hidranți sînt închiși (fig. 27 și 28).

Manevra C2. Manevrele respective sînt cele de la cazul C1, cu diferența că în rețea sînt montate supape de suprapresiune în nodurile 16, 62 și 67. Deși supapele au un efect favorabil, suprapresiunile calculate sînt totuși mari (fig. 29 și 30). Ținînd seama de faptul că hidrantul 17, ca și alți hidranți din zonele periferice ale rețelei sînt amplasați mult sub nivelul stației de pompare, posibilitatea evacuării unor pungi de aer prin acești hidranți este scăzută, dar urmările unei astfel de situații accidentale sînt grave, astfel încît se impune luarea măsurilor cunoscute de evacuare controlată a aerului din conducte.

4. STUDIUL MIȘCĂRII NEPERMANENTE A APEI ÎNTR-O REȚEA RAMIFICATĂ DE CONDUCTE DIN SISTEMUL CÎMPIA BUZĂULUI (PLOTUL CEPTURA)

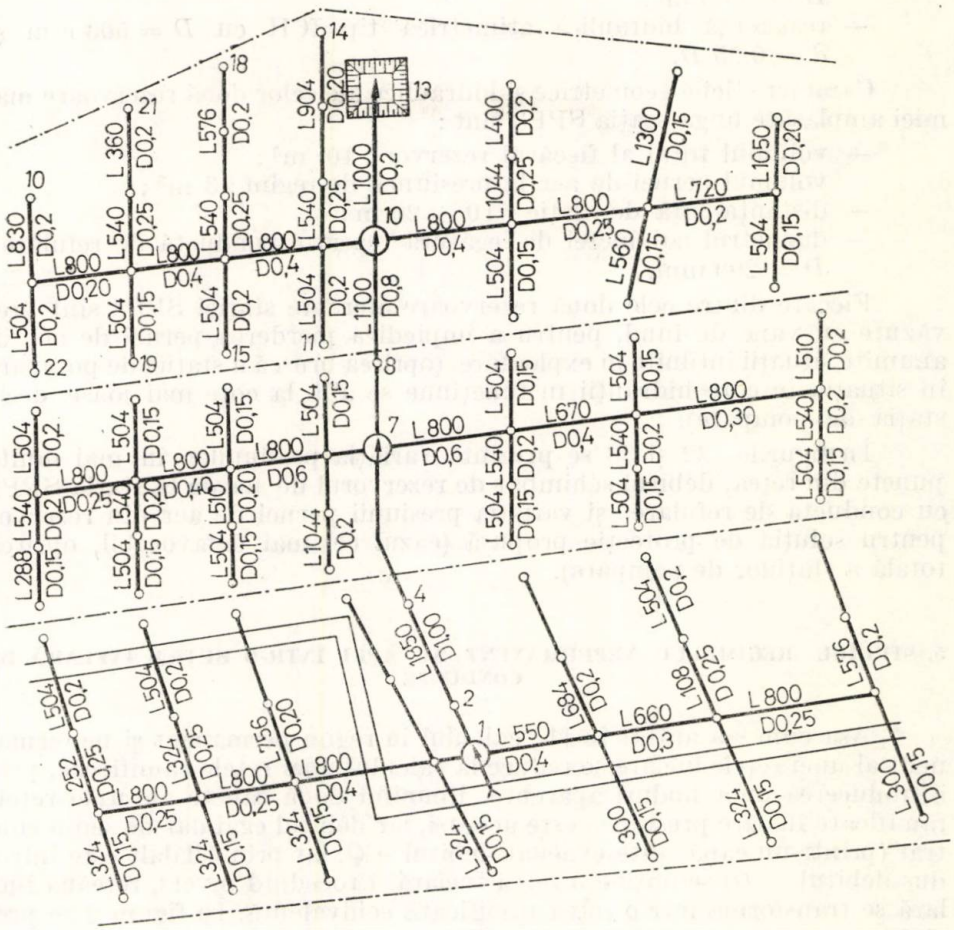
Rețeaua studiată (fig. 31) se află amplasată într-o zonă cu pante pozitive accentuate, ceea ce necesită luarea unor măsuri obligatorii de protecție la lovitura de berbec. Diferența de cotă geodezică între punctul cel mai jos și punctul cel mai înalt al rețelei este de circa 64 m. Alimentarea rețelei cu apă se face dintr-un canal cu nivel liber, prin intermediul unei stații de punere sub presiune de bază SPP1, care pompează apa în sistem printr-o conductă principală de 3950 m lungime și cu diametre variabile între 200 și 1000 mm. Debitul maxim pompat este de 1,00 m^3/s la o înălțime geodezică de 50 mca. Stația mai asigură alimentarea a două ploturi de irigație amplasate de o parte și de alta a acesteia, pe un teren aproximativ orizontal. Debitul maxim pentru fiecare din cele două ploturi este de 0,144 m^3/s.

La o distanță de 1850 m de stația SPP1 se află stația SPP2 care aspiră apa din conducta de refulare a stației SPP1 și o pompează la o presiune de 60 m.c.a. în cele două ploturi de irigație alăturate. Debitul maxim asigurat pentru fiecare plot este de 0,216 m^3/s. Și aceste două ploturi se află pe un teren cu denivelări reduse.

Stația SPP3 aflată pe conducta de refulare principală a stației SPP1 la 1100 m de stația SPP2, asigură alimentarea ultimelor două ploturi din cele șase ale rețelei de irigație Ceptura. Debitul maxim pentru fiecare din cele două ploturi este de 0,192 m^3/s la o presiune inițială de 73 mca. Diferențele de cote între punctele cele mai înalte și cele mai joase ale acestor ultime două ploturi sînt mari (circa 40 m). Cele trei stații pot funcționa în două trepte de presiune, asigurînd la hidrantul cel mai îndepărtat, fie o presiune de 38 mca în cazul udării prin aspersiune, fie de numai 12 mca în cazul irigării prin brazde.

4.1. REZULTATELE CALCULELOR ȘI SOLUȚIILE PROPUSE

Ținînd seama de amplasarea pe teren a rețelei din plotul Ceptura, s-a analizat comportarea stațiilor de pompare în situația cea mai defavorabilă întîlnită în exploatare: oprirea simultană a tuturor pompelor.


14
13
18
21
10
22
19
15
11
8
7
4
2
1
L 1650 D1,00
L 550 D0,4
L 660 D0,3
L 800 D0,25
L 1300 D0,15
L 1050 D0,20
L 720 D0,2
L 560 D0,15
L 1044 L 400
L 1000 D0,2
L 904 D0,20
L 576 D0,2
L 360 D0,2
L 830 D0,2
L 1100 D0,8
L 800 D0,4
L 800 D0,6
L 670 D0,4
L 800 D0,30
L 510 D0,2
L 504 D0,2
L 504 D0,15
L 540 D0,25
L 800 D0,20
L 288 L 540 D0,15 D0,2
L 1044 D0,2
L 504 L 510 D0,15 D0,20
L 504 L 540 D0,15 D0,2
L 504 L 540 D0,15 D0,2
L 504 L 540 D0,15 D0,2

alăturate stației SPP3. Soluția de protecție pentru SPP1 constă dintr-un rezervor de aer cu următoarele caracteristici geometrice și hidraulice :

— volumul total al rezervorului : 30 m^3 ;
— volumul pernei de aer la presiunea de regim : 10 m^3 ;
— distanța față de stația : 10÷20 m ;
— diametrul conductei de legătură rezervor-conductă de refulare $D = 500$ mm ;
— rezistență hidraulică asimetrică tip ICH cu $D = 500$ mm și $d = 0{,}55\ D$.

Caracteristicile geometrice și hidraulice ale celor două rezervoare mai mici amplasate lîngă stația SPP3 sînt :

— volumul total al fiecărui rezervor : 10 m^3 ;
— volumul pernei de aer la presiunea de regim : 3 m^3 ;
— distanța față de stație : 10 ÷ 20 m ;
— diametrul conductei de legătură rezervor-conductă de refulare : $D = 200$ mm.

Fiecare dintre cele două rezervoare aferente stației SPP3 sînt prevăzute cu vane de fund, pentru a împiedica pierderea pernei de aer în anumite situații întîlnite în exploatare (oprirea bruscă a stației de pompare în situația în care hidranții în funcțiune se află la cote mai joase decît stația de pompare).

În figurile 32 și 33 se prezintă variația presiunilor în mai multe puncte din rețea, debitul schimbat de rezervorul de aer de la stația SPP1 cu conducta de refulare și variația presiunii pernei de aer din rezervor pentru soluția de protecție propusă (cazul cel mai defavorabil, oprirea totală a stațiilor de pompare).

5. STUDIUL REGIMULUI NEPERMANENT AL APEI ÎNTR-O REȚEA INELARĂ DE CONDUCTE

Așa cum s-a arătat în [1] calculul în regim permanent și nepermanent al unei rețele inelare se reduce la calculul unei rețele ramificate, prin introducerea unor noduri aparente. Reunind două capete ale unei rețele ramificate în care presiunea este aceeași, iar debitul egal dar de semn contrar (printr-un capăt este evacuat debitul $+Q$, iar prin celălalt este introdus debitul $-Q$) se obține o rețea inelară. Procedînd invers, rețeaua inelară se transformă într-o rețea ramificată echivalentă. În figura 2 se prezintă rețeaua inelară de conducte analizată, alimentată de o stație de pompare, avînd aceleași caracteristici, ca și stația de pompare prezentată în paragraful 2. În cazul unei rețele inelare, un interes deosebit prezintă calculul situației de regim permanent, calcul care prin metodele clasice este laborios. Programul „REȚEA" oferă posibilitatea determinării regimului de curgere permanent (debite și presiuni în conductele rețelei) pentru o situație concretă dată a rețelei (configurație geometrică, dimensiunile conductelor, caracteristicile stației de pompare, amplasarea și gradul de deschidere sau închidere a hidranților) prin metoda stabilizării parametrilor curgerii, pornind de la valori inițiale ale presiunilor și debitelor fixate arbitrar.

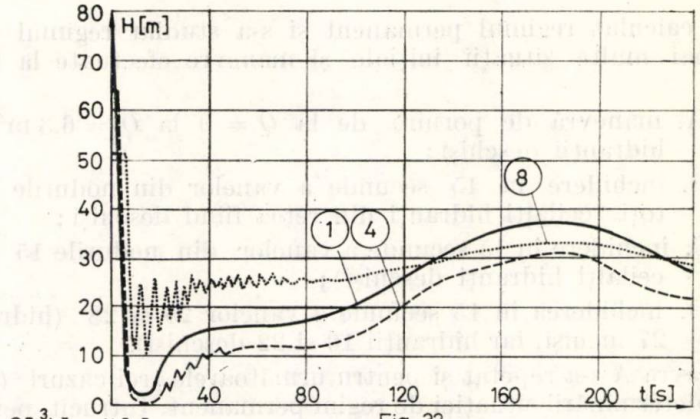


Fig. 32

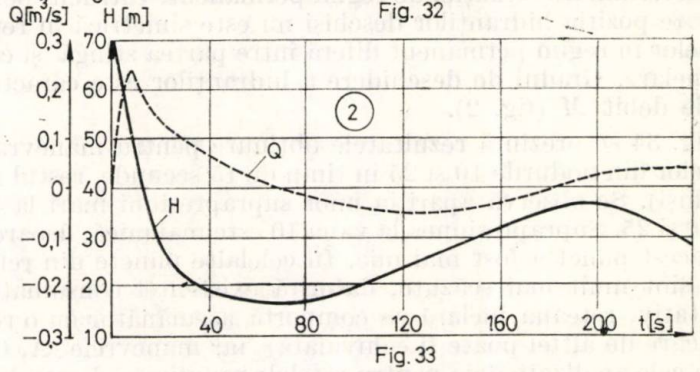


Fig. 33

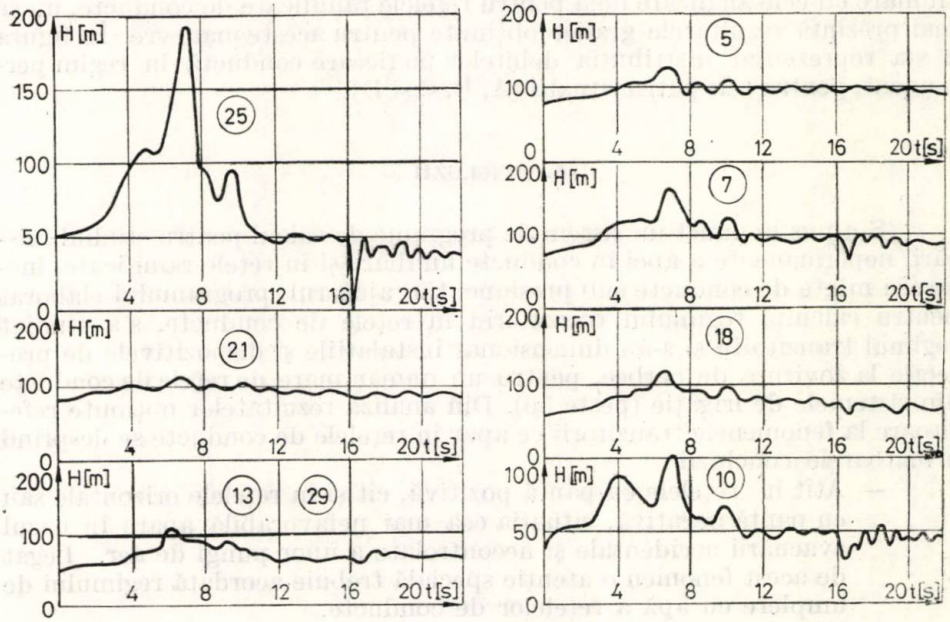


Fig. 34

Fig. 32 şi 33. — Variaţii de presiuni şi debite la oprirea bruscă a staţiei de pompare.
Fig. 34. — Variaţii de presiune în reţeaua de conducte inelară (închiderea în 15 secunde a hidranţilor din nodurile 10 şi 25).

S-a calculat regimul permanent și s-a studiat regimul tranzitoriu pentru mai multe situații inițiale și manevre efectuate la hidranți și anume :

— A. manevră de pornire de la $Q = 0$ la $Q = 6{,}3\ m^3/s$ cu toți hidranții deschiși ;
— B. închidere în 15 secunde a vanelor din nodurile 10 și 25, toți ceilalți hidranți din rețea fiind deschiși ;
— C. închidere în 15 secunde a vanelor din nodurile 15 și 28 (toți ceilalți hidranți deschiși) ;
— D. închiderea în 15 secunde a vanelor 25 și 28 (hidranții 19 și 27 închiși, iar hidranții 10 și 22 deschiși).

Manevra A s-a repetat și pentru următoarele trei cazuri (B, C și D) în scopul determinării situației de regim permanent. Întrucît pentru cazurile analizate poziția hidranților deschiși nu este simetrică în rețea, repartiția debitelor în regim permanent diferă între partea stîngă și cea dreaptă a rețelei inelare. Gradul de deschidere a hidranților este caracterizat prin modulul de debit M (fig. 2).

În fig. 34 se prezintă rezultatele obținute pentru manevra B (închiderea vanelor din nodurile 10 și 25 în timp de 15 secunde, restul hidranților fiind deschiși). Se observă apariția unor suprapresiuni mari la vanele din nodurile 10 și 25. Suprapresiunea la vana 10 este mai mică, deoarece debitul inițial în acest punct a fost mai mic. În celelalte puncte din rețea, suprapresiunile sînt mult mai scăzute, datorită existenței consumatorilor. Întrucît calitativ, rețeaua inelară se comportă asemănător cu o rețea ramificată (cu care de altfel poate fi echivalată) iar manevrele A, C și D sînt similare cu cele analizate deja pentru rețelele ramificate de conducte, nu se mai prezintă rezultatele grafice obținute pentru aceste manevre. În figura 2 s-a reprezentat distribuția debitelor pe fiecare conductă în regim permanent, pentru cele patru situații (A, B, C și D).

6. CONCLUZII

S-a pus la punct un sistem de programe de calcul pentru studiul mișcării nepermanente a apei în conducte unifilare și în rețele ramificate, inelare și mixte de conducte sub presiune. Cu ajutorul programului elaborat pentru calculul regimului tranzitoriu în rețele de conducte, s-a studiat regimul tranzitoriu și s-au dimensionat instalațiile și dispozitivele de protecție la lovitura de berbec, pentru un număr mare de rețele de conducte din sistemele de irigație (peste 50). Din analiza rezultatelor obținute referitoare la fenomenele tranzitorii ce apar în rețelele de conducte se desprind următoarele concluzii :

— Atît în rețelele cu pantă pozitivă, cît și în rețelele orizontale sau cu pantă negativă, situația cea mai nefavorabilă apare în cazul evacuării accidentale și necontrolate a unor pungi de aer. Legat de acest fenomen o atenție specială trebuie acordată regimului de umplere cu apă a rețelelor de conducte.
— Manevrarea rapidă și simultană a unor hidranți, conduce în unele situații la suprapresiuni mari.

— În cazul rețelelor situate într-un teren cu pantă accentuată, manevra cea mai periculoasă este cea de oprire bruscă a debitului stației de pompare, fapt ce provoacă oscilații alternative rapide de subpresiuni și suprapresiuni mari.
— S-a pus în evidență tendința de atenuare a suprapresiunilor de conducte ramificate și inelare, atunci cînd unda de presiune întîlnește zone în care apa circulă. Din acest punct de vedere, rețelele inelare sau mixte oferă un grad sporit de siguranță, întrucît sectoarele din rețea în care apa stagnează sînt limitate în comparație cu rețelele ramificate de conducte.
— Apariția depresiunilor și suprapresiunilor în rețelele de conducte în timpul regimurilor tranzitorii conduce la necesitatea studierii acestor regimuri, în vederea dimensionării pentru fiecare caz în parte a instalațiilor și dispozitivelor de protecție necesare.

Primit la redacție la 7 august 1986

BIBLIOGRAFIE

1. I. JELEV, *Calculul regimului tranzitoriu al apei în rețele de conducte ramificate, inelare și mixte. Partea I*, St. cerc. mec. apl., **46**, 1 (1987).
2. I. JELEV, *Studiul hidraulic al regimurilor tranzitorii în faza de umplere cu apă a rețelelor de irigație sub presiune SRPA1, SRPA9, SRPA19 și SRPA20 din incinta Ialomița-Călmățui*, Studii hidraulice I.C.H. (1984).
3. I. JELEV, *Computer analysis of hidraulic transients in pipe networks. Considerations concerning the head losses in the Water hammer phenomena*, XXth Congress of the International Association for Hydraulic research, Moscow, sept. 1983.

TRANSMISII MECANICE DIFERENȚIALE CU VARIATOR LA INTRARE

de B. PLOSCEANU și R. C. BOGDAN
Institutul Politehnic din București

În lucrare, se studiază cinematica și dinamica transmisiilor mecanice diferențiale cu variator la intrare în regim de funcționare permanent.
Se arată condițiile în care aceste transmisii pot fi folosite cu o încărcare subunitară a variatorului, ca amplificatoare sau reducătoare de turație.

1. INTRODUCERE

Creșterea performanțelor transmisiilor mecanice cu turație variabilă în ceea ce privește gama de reglare, finețea de reglare, randamentul sau puterea transmisă a condus la transmisiile mecanice diferențiale cu variator [1], [3], [4], [5].

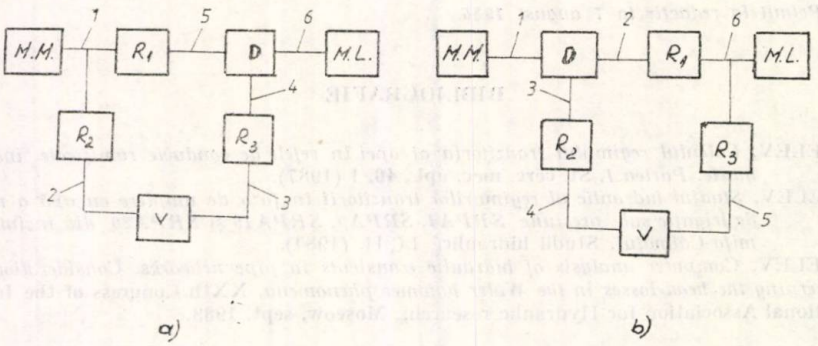


Fig. 1

Astfel de transmisii se realizează după una din schemele reprezentate în figura 1, unde MM — mașina motoare, ML — mașina de lucru, D — mecanismul diferențial simplu, V — variatorul de turație, $R_{1,2,3}$ — reductor de turație.

Transmisiile realizate conform schemei din figura 1*a*, după poziția variatorului în schemă, se numesc transmisii cu variator la intrare, iar cele din figura 1*b*, — transmisii cu variator la ieșire.

În lucrare se analizează parametrii cinematici și dinamici în regim de funcționare permanent pentru transmisiile mecanice diferențiale cu variator la intrare în scopul creșterii performanțelor și optimizării folosirii acestora.

2. CINEMATICA TRANSMISIEI

Cinematica transmisiei (fig. 1 *a*) rezultă din ecuațiile rapoartelor de transmitere ale mecanismelor componente:

$$n_1 = i_{15}\, n_5 \quad (1); \quad n_1 = i_{12}\, n_2 \quad (2); \quad n_2 = i_{23}\, n_3 \qquad (3)$$

$$n_3 = i_{34}\, n_4 \quad (4); \quad n_5 = i^6_{54}\, n_4 + (1 - i^6_{54})\, n_6 \qquad (5)$$

Relația (5) — ecuația lui Willis — care descrie cinematica mecanismului diferențial simplu, stabilește, prin intermediul raportului de transmitere de bază, $i_0 = i_{54}^6$, faptul că elementul 6 este brațul portsatelit. După poziția brațului, transmisia se poate realiza în trei variante, ce rezultă printr-o permutare circulară a indicilor raportului de transmitere de bază. Dacă se iau în considerare și variantele de amplasare a roților centrale, rezultă pentru fiecare poziție a brațului portsatelit două posibilități.

Variantele ce rezultă din poziția roților centrale se pun în evidență prin valoarea raportului de transmitere de bază.

Ca urmare, este suficient să se analizeze numai variantele ce rezultă din poziția elementului 4, respectiv 5 ca braț portsatelit și descrisă de ecuațiile :

$$n_6 = i_{65}^4 n_5 + (1 - i_{65}^4) n_4 \tag{5'}$$

și

$$n_4 = i_{46}^5 n_6 + (1 - i_{46}^5) n_5. \tag{5''}$$

Din ecuațiile (1)—(5) rezultă raportul de transmitere al transmisiei

$$i_{16} = \frac{i_{12} i_{23} i_{34} i_{15} (1 - i_{54}^6)}{i_{12} i_{23} i_{34} - i_{15} i_{54}^6}. \tag{6}$$

Dacă se notează :

— raportul de transmitere al transmisiei :

$$i_{16} = y, \tag{7}$$

— raportul de transmitere al variatorului :

$$i_{23} = x, \tag{8}$$

— raportul de transmitere de bază al mecanismului diferențial simplu :

$$i_0 = i_{54}^6 = a \tag{9}$$

— produsul rapoartelor de transmitere ale reductoarelor necesare cuplării variatorului cu motorul și respectiv mecanismul diferențial :

$$i_{12} i_{34} = b, \tag{10}$$

— raportul de transmitere al reductorului pentru cuplarea motorului cu diferențialul :

$$i_{15} = c, \tag{11}$$

atunci (6) se scrie :

$$y = \frac{(1 - a) b c x}{bx - ca}. \tag{12}$$

Relația (12) reprezintă ecuația unei hiperbole echilatere ce trece prin origină de asimptote $x = ac/b$ și $y = (1 - a)\, c$, al cărei grafic este reprezentat în figura 2.

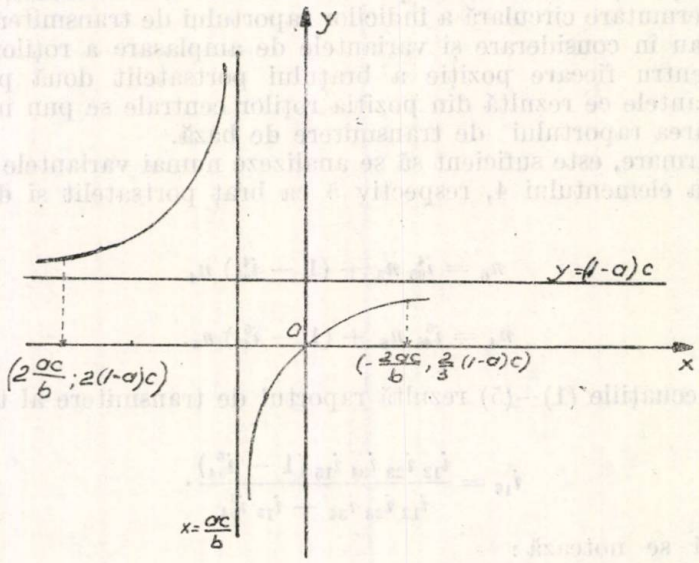


Fig. 2

După semnele parametrilor a, b și c se pot obține patru grafice ce diferă numai prin poziția asimptotelor. În continuare, avînd în vedere că relațiile sînt principial aceleași, se analizează cazul pentru care $ac/b < 0$, adică asimptota verticală trece printr-un $x < 0$.

Dacă se folosesc ecuațiie (5′) și (5″) cu notațiile (7)—(11), ecuația raportului de transmitere este:

$$y = \frac{bcx}{abx + (1 - a)\, c}, \tag{12′}$$

respectiv

$$y = \frac{abcx}{(a - 1)\; bx + c}. \tag{12″}$$

Ecuațiile (12′) și (12″) sînt tot ecuațiile unor hiperbole echilatere ce trec prin origină dar de asimptote $x = (a - 1)\; c/a\; b$ și $y = c/a$, respectiv $x = c/(1 - a)\; b$ și $y = ac/(a - 1)$.

3. CIRCULAȚIA TEORETICĂ DE PUTERE

Performanțele transmisiilor mecanice cu turație variabilă, realizate cu variator inseriat sînt limitate în ceea ce privește puterea transmisă de posibilitățile variatorului propriu-zis în comparație cu restul transmi-

siei cu roți dințate. Transmisiile mecanice diferențiale cu variator pot depăși aceste limite prin ramificarea puterii.

Transmiterea puterii prin ramurile unui mecanism [1], [2], [3] și deci prin elementele cinematice ale acestuia, se exprimă cu ajutorul coeficienților de repartiție a puterii λ_x, dați de raportul dintre puterea ce străbate ramura (elementul cinematic) și puterea motoare ce intră în transmisie. Dacă $M_m \cdot \omega_m$ este puterea motoare, pentru un element oarecare x

$$\lambda_x = \frac{M_x\ \omega_x}{M_m\ \omega_m}. \tag{13}$$

Calculul acestor coeficienți se face direct din condițiile cinematice [2], cu relația :

$$\lambda_x = \frac{i_x}{i_t}\frac{\partial i_t}{\partial i_x}, \tag{14}$$

unde i_x este raportul de transmitere al mecanismului în care intră elementul cinematic a cărui încărcare se calculează ; i_t — raportul de transmitere al transmisiei. Ca urmare, coeficientul de încărcare al variatorului λ_v, conform notațiilor adaptate pentru transmisia ce se analizează, se calculează cu relația :

$$\lambda_v = \frac{x}{y}\frac{\partial y}{\partial x} \tag{15}$$

și este

$$\lambda_v = \frac{ac}{ac - bx}. \tag{16}$$

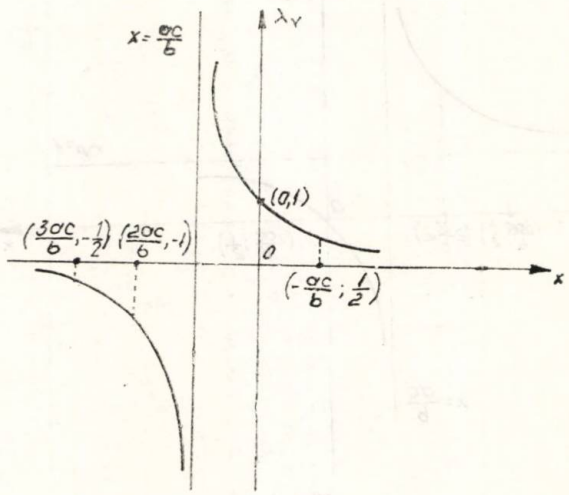


Fig. 3

Relația (16) este ecuația unei hiperbole echilatere ce trece prin punctul de coordonate (0,1) și are ca asimptote dreptele $x = ac/b$ și $y = 0$ (fig. 3).

Pentru transmisia a cărei cinematică este descrisă de ecuațiile (12′) și (12″) coeficientul de încărcare al variatorului este:

$$\lambda_v = \frac{(1-a)\,c}{abx + (1-a)\,c}, \tag{16′}$$

respectiv

$$\lambda_v = \frac{c}{(a-1)\,bx + c}. \tag{16″}$$

Ecuațiile (16′) și (16″) sînt tot hiperbole echilatere ce trec prin punctul de coordonate (0,1) și au ca asimptote dreptele $x = (a-1)c/ab$ și $x = 0$, repsectiv $x = c/(1-a)\,b$ și $y = 0$.

Pentru reductoarele R_2 și R_3 coeficienții de încărcare corespunzători, λ_{R_2} și λ_{R_3} sînt egali, așa cum rezultă din calcule și așa cum era de așteptat, cu ai variatorului.

$$\lambda_{R_2} = \lambda_{R_3} = \lambda_v. \tag{17}$$

Coeficientul de încărcare al reductorului R_1, calculat cu relația (14), este

$$\lambda_R = \frac{bx}{bx - ac}. \tag{18}$$

Graficul funcției (18) reprezentat în figura 4, este al unei hiperbole echilatere ce trece prin origină și are ca asimptote dreptele $x = ac/b$ și $\lambda_R = 1$.

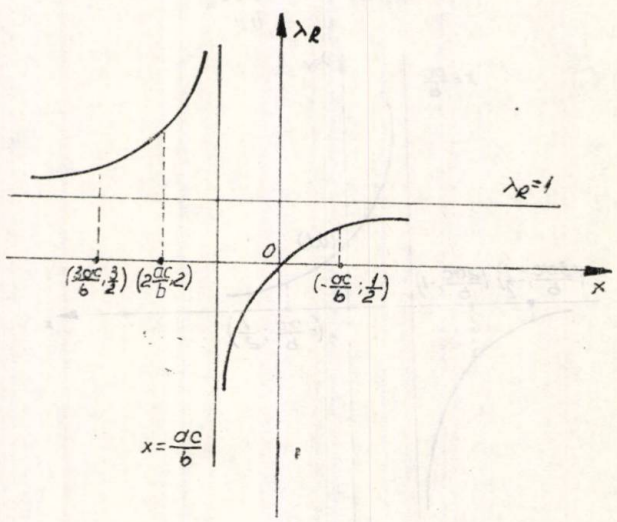


Fig. 4

În celelalte cazuri, coeficientul de încărcare al reductorului R_1 este

$$\lambda_R = \frac{abx}{abx + (1-a)\,c}, \tag{18′}$$

respectiv

$$\lambda_R = \frac{(a-1)\,b}{(a-1)\,bx + c}. \tag{18''}$$

Graficele funcțiilor (18') și (18'') sînt hiperbole echilatere ce trec prin origină și au ca asimptote dreptele $x = (a-1)\,c/a\cdot b$ și $\lambda_R = 1$, respectiv $x = c/(a-1)b$ și $\lambda_R = 1$.

În continuare se pune problema repartizării puterii pe elementele centrale ale mecanismului diferențial simplu, în particular pe pinionul mecanismului diferențial în vederea determinării randamentului transmisiei.

Conform notațiilor adoptate, $i_0 = a = i^6_{54}$ și deci se va determina coeficientul de repartiție a puterii pe elementul 5 al mecanismului cu axe fixe asociat prin inversarea mișcării mecanismului diferențial simplu. Cu relația (14) rezultă

$$\lambda_{D5} = \lambda_D = \frac{a(c-bx)}{(1-a)\,(bx-ac)}, \tag{19}$$

(19) este ecuația unei hiperbole echilatere ce intersectează axele în punctele de coordonate $\left(\frac{c}{b};\ 0\right)$ și $(0\,;\ 1/(a-1))$ și are drept asimptote dreptele $x = a\,c/b$ și $\lambda_D = a/(a-1)$. Graficul funcției (19) este reprezentat în figura 5.

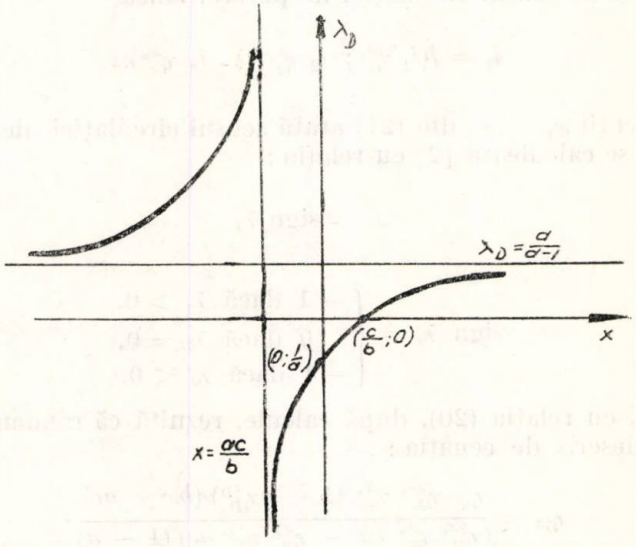


Fig. 5

Pentru celelalte cazuri rezultă :

$$\lambda_D = \frac{a(c-bx)}{abx + (1-a)\,c} \tag{19'}$$

și

$$\lambda_D = \frac{c - bx}{(a-1)\,bx + c}. \tag{19''}$$

Graficele funcțiilor (19') și (19'') sînt tot hiperbole echilatere ce intersectează axele în punctele $(c/b\,;\,0)$ și $(0\,;\,a/(1-a))$, respectiv $(c/b\,;\,0)$ și $(0,\,1)$, cu dreptele $\lambda_D = -1$ și $x = (a-1)\,c/ab$ respectiv $\lambda_D = 1/(1-a)$ și $x = c/(1-a)\,b$ ca asimptote.

4. RANDAMENTUL TRANSMISIEI

Folosirea transmisiilor mecanice diferențiale cu variator poate aduce cu sine o dată cu ramificarea puterii și o creștere a randamentului transmisiei în comparație cu transmisiile cu variator inseriat.

Pentru calculul randamentului transmisiei se va folosi relația [2]:

$$\eta_t = \frac{\tilde{i}_t}{i_t}, \tag{20}$$

unde i_t este raportul de transmitere cinematic dat aici de ecuația (12); $\tilde{i}_t$ — raportul de transmitere de forță.

Raportul de transmitere de forță este o funcție ce depinde de raportul de transmitere cinematic, de randamentele de bază ale mecanismelor componente și de sensul circulației de putere, adică

$$i_t = f(i_1\,\eta_1^{x_1};\; i_2\,\eta_2^{x_2} \ldots i_n\,\eta_n^{x_n}). \tag{21}$$

Exponenții $x_1 \ldots x_n$ din (21) arată sensul circulației de putere prin mecanism și se calculează [2] cu relația:

$$x_i = \operatorname{sign} \lambda_i \tag{22}$$

unde

$$\operatorname{sign} \lambda_i = \begin{cases} +1 \text{ dacă } \lambda_i > 0, \\ 0 \text{ dacă } \lambda_i = 0, \\ -1 \text{ dacă } \lambda_i < 0. \end{cases}$$

Atunci, cu relația (20), după calcule, rezultă că randamentul transmisiei este descris de ecuația:

$$\eta_{16} = \frac{\eta_R^{x_R}\,\eta_R^{2x_v}\,\eta_v^{x_v}\,(1 - a\eta_D^{x_D})\,(bx - ac)}{(\eta_R^{2x_v}\,\eta_v^{x_v}\,bx - \eta_R^{x_R}\,\eta_D^{x_D}\,ac)\,(1-a)}. \tag{23}$$

Graficul funcției (23) este reprezentat în figura 6.

Pentru $x = ac/b$, randamentul este zero, dar funcția este continuă în acest punct.

Graficul funcției are ca asimptotă orizontală dreapta $\eta_l = (1 - \eta_D\,a)\,\eta_R/(1-a)$.

În celelalte cazuri, randamentul transmisiei este descris de ecuațiile:

$$\eta_{16} = \frac{\eta_R^{2x_v}\,\eta_V^{x_v}\,\eta_R^{x_R}\,[abx + (1-a)\,c]}{\eta_R^{2x_v}\,\eta_V^{x_v}\,\eta_D^{x_D}\,abx + (1-a\,\eta_D^{x_D})\,c\,\eta_R^{x_R}}, \tag{23'}$$

respectiv

$$\eta_{16} = \frac{\eta_R^{x_R}\,\eta_R^{2x_v}\,\eta_V^{x_v}\,\eta_D^{x_D}\,[(a-1)\,bx + c]}{\eta_R^{2x_v}\,\eta_V^{x_v}\,(\eta_D^{x_D}\,a - 1)\,bx + c\,\eta_R^{x_R}}. \tag{23''}$$

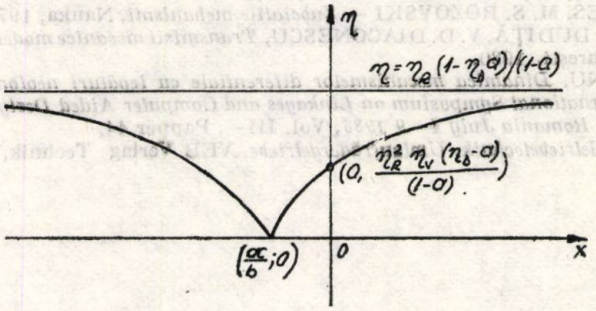


Fig. 6

Pentru aceste cazuri graficul funcției este aemănător, funcția se anulează pentru $x = (a-1)c/a\,b$, respectiv $x = c/(1-a)b$ și are ca asimptotă orizontala dreapta $\eta = \eta_R\eta_D$, respectiv $\eta = (1-a)\,\eta_R\eta_D/(1-a\eta_D)$.

5. CONCLUZII

Din ecuațiile ce descriu cinematica și dinamica regimului de funcționare permanent a transmisiilor mecanice diferențiale cu variator la intrare se pot trage următoarele concluzii mai importante:

Încărcarea subunitară a variatorului are loc dacă raportul de transmitere al acestuia este cu încă o dată mai mare decît valoarea punctului prin care trece asimptota graficului raportului de transmitere (fig. 3). Cu ipotezele făcute în lucrare, aceasta înseamnă, conform ecuațiilor (16), că $x \in (-\infty; 2\,ac/b] \cup [0; +\infty)$, respectiv $x \in (-\infty, 2(a-1)\,c/a\cdot b) \cup \cup \cdot [0; +\infty)$ și, respectiv, $x \in (-\infty; 2c/(1-a)\,b] \cup [0; +\infty)$.

În condițiile de mai sus transmisia este amplificatoare de turație dacă asimptota orizontală a graficului raportului de transmitere al transmisiei are cota subunitară (fig. 2). Atunci, conform ecuațiilor (12), se impune ca: $(1-a)\,c < 1$, respectiv $c/a < 1$ și, respectiv, $ac/(a-1) < 1$.

În aceleași condiții, transmisia este reducătoare de turație dacă asimptota orizontală are cota mult mai mare decît 1.

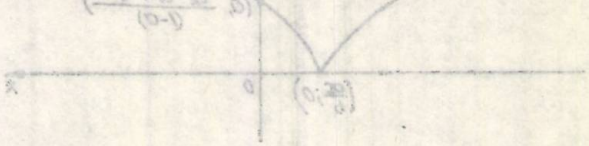
În general astfel de transmisii se recomandă ca transmisii cu o deosebită finețe de reglare în condițiile unui randament ridicat și a unei încăr-

cări a variatorului sub 50% din puterea motoare, dacă raportul de transmitere al variatorului ia valori mai mari decît dublul punctului prin care trece asimptota graficului raportului de transmitere (fig. 3).

Primit la redacție la 28 octombrie 1986

BIBLIOGRAFIE

1. E. BUGAJEVSKI, *Contribuții la studiul cinematic și dinamic al mecanismelor cu trenuri diferențiale*, Teză de doctorat, I.P.B., 1971.
2. M. A. KRAINES, M. S. ROZOVSKI — *Zubciatîie mehanismî*, Nauka, 1972.
3. G. MILOIU, F. DUDIȚĂ, V. D. DIACONESCU, *Transmisii mecanice moderne*, Edit. Tehnică, București, 1980.
4. B. PLOSCEANU, *Dinamica mecanismelor diferențiale cu legături neolonome*, în *IFTMM. International Symposium on Linkages and Computer Aided Design Methods. Bucharest, Romania July 1—9 1985*, Vol. III—, Papper 44.
5. I. VOLMER, *Getriebetechnik. Umlaufrädergetriebe*. VEB Verlag Technik, Berlin, 1978.



EFECTUL NELINIAR AL FORȚELOR AXIALE ÎN CALCULUL STRUCTURILOR FUNDATE PE COLOANE

de G. ONU

Institutul de Proiectări Transporturi Auto, Navale și Aeriene

Anterior [24], a fost prezentat un echivalent al coloanei active, pentru calculul liniar al structurilor cu fundații flexibile. Aici, pornindu-se de la matricea de rigiditate geometrică a elementului de coloană, se extinde utilizarea acestui tip de echivalent la calculul de ordinul al II-lea și de stabilitate al structurilor fundate pe coloane. În acest fel se obține o reducere a numărului parametrilor nedeterminați ai ansamblului structură-fundație-teren atunci cînd se ține seama de efectul forțelor axiale, reducere deosebit de importantă dacă se are în vedere faptul că acest tip de calcul are un caracter ciclic.

1. INTRODUCERE

Efectul forțelor axiale poate fi pus în evidență prin scrierea condițiilor de echilibru în raport cu poziția deformată a structurii. Scrise astfel, aceste condiții reliefează faptul că mărimea momentelor încovoietoare din elementele liniare ale structurii este influențată de prezența forțelor axiale de la noduri. Prin introducerea în calcul a excentricităților acestor forțe, excentricități provocate de schimbarea poziției nodurilor structurii, relația încărcare-moment încovoietor capătă un caracter neliniar în raport cu deplasările transversale ale nodurilor, caracter care se amplifică pe măsura creșterii intensității forțelor axiale. Întrucît deformata structurii este aprioric necunoscută și deci efectul forțelor axiale nu poate fi anticipat, soluția problemei nu se poate obține decît ciclic, prin aproximații succesive. Pierderea stabilității echilibrului structurii prin deformare continuă sau limitare poate fi privită drept un stadiu limită al efectului forțelor axiale.

Pentru calculul suprastructurilor există numeroase lucrări consacrate parțial sau în totalitate acestui efect, în bibliografia de la sfîrșit fiind citate numai cîteva titluri [1—11]. Pe de altă parte, în ceea ce privește calculul de ansamblu al structurilor fundate pe coloane puternic comprimate, indicațiile sînt destul de limitate. Chiar și în lucrările consacrate în întregime problemelor de conlucrare a coloanelor sau piloților cu terenul de fundație [13—18], atenția cercetătorilor s-a îndreptat mai mult asupra studiului coloanei izolate, mai puțin asupra coloanelor asamblate prin radier și practic deloc asupra fenomenului de conlucrare generală.

Acest fapt se datorește în mare parte dificultăților întîmpinate la alcătuirea unui model de calcul eficient, capabil să reproducă principalele particularități de comportare ale ansamblului structură-fundație-teren. Modelul ar trebui să conțină, pe de o parte, coloane, soluționate în mod tradițional cu ajutorul diferențelor finite [14—17] și, pe de altă parte, diverse elemente de suprastructură pentru care metoda elementelor finite constituie cel mai potrivit instrument de calcul numeric [2, 5, 12]. Îmbinarea celor două metode de calcul în cadrul aceluiași program este posibilă însă, în cazul structurilor fundate pe coloane, acest mixaj nu conduce la cea mai eficientă soluție. Procedura de calcul automat a rigidităților coloanelor prin metoda diferențelor finite este mult mai lentă decît procedura similară, bazată pe condensare statică, din metoda elementelor finite.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 46, NR. 2, 1987, P. 137—149

Acest inconvenient, care în cazul unui calcul prin corecții succesive evident se amplifică, pledează pentru o tratare unitară pe baza unui model în cadrul căruia atît coloanele puternic comprimate, cît și elementele de suprastructură sînt modelate cu ajutorul elementelor finite.

Pornindu-se de la acest deziderat, în cele ce urmează se va prezenta un procedeu pentru calculul de ordinul al II-lea și de stabilitate al structurilor fundate pe coloane, procedeu în care, cu ajutorul tehnicei substructurilor, coloanele vor fi tratate ca macroelemente [19]. Destinat unui calcul geometric neliniar în domeniul micilor deplasări al structurilor care conlucrează cu terenul prin intermediul unor fundații flexibile guvernate de legi constitutive liniare și acționate de sarcini conservative, procedeul vizează în primul rînd situațiile în care mărimea forțelor axiale nu poate fi determinată anticipat. În același spirit, pentru verificarea stabilității structurilor fundate pe coloane sau piloți, se admite o comportare precritică neliniară, corespunzătoare unei reduceri continue a rigidității structurii pe măsura creșterii forțelor axiale.

2. COLOANA PUTERNIC COMPRIMATĂ CA MACROELEMENT AL STRUCTURII

Se consideră o coloană activă, încastrată total sau parțial în terenul de fundație, coloană divizată într-un număr n de elemente interconectate la noduri. Divizarea se face astfel încît, pe lungimea fiecărui element aflat în contact cu terenul, să se poată lua o variație liniară a parametrilor E_s și G_s care, în cadrul modelului fundației generalizate, caracterizează compresibilitatea terenului și capacitatea de repartiție a acestuia [12, 20].

2.1. MATRICEA DE RIGIDITATE A ELEMENTULUI DE COLOANĂ

Considerînd un element de coloană în problema plană, se scrie expresia energiei acumulate numai prin deformarea din încovoiere a elementului și deformarea corespunzătoare a mediului suport:

$$U = U_i + U_t + U_p = \frac{1}{2}\int EI\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int E_s w^2 \,\mathrm{d}x + \\ + \frac{1}{2}\int G_s\left(\frac{dw}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int P_x\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x\,. \tag{1}$$

În relația de mai sus, în care s-au neglijat termenii superiori ordinului al II-lea, w reprezintă cîmpul deplasărilor de încovoiere exprimat în funcție de deplasările nodale ale elementului:

$$w = N\delta = \left(\frac{1}{2} - \frac{3x}{4a} + \frac{x^3}{4a^2}\right) U1 + \left(\frac{-a}{4} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{4a} - \frac{x^3}{4a^2}\right) U2 + \\ + \left(\frac{1}{2} + \frac{3x}{4a} - \frac{x^3}{4a^3}\right) U3 + \left(\frac{a}{4} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{4a} - \frac{x^3}{4a^2}\right) U4, \tag{2}$$

N constituie vectorul funcțiilor e formă, iar δ, vectorul deplasărilor nodale.

Prima integrală din (1) conduce la matricea de rigiditate elastică a unui element de bară încovoiată [1—7], iar următoarele două, la matricea de rigiditate elastică a mediului de rezemare aferent elementului de coloană [20, 21]. Ultima integrală din (1) constituie componenta neliniară a energiei de deformație, reprezentînd lucrul mecanic efectuat de eforturile unitare normale, a căror rezultantă pe secțiune este forța P_x, prin parcurgerea deformațiilor elementului încovoiat. Dacă se admite că forța axială din coloană nu se modifică pe timpul deformării din încovoiere și ținînd seama de (2), ultima integrală din (1) se rescrie sub forma

$$U_p = \delta^T \frac{P}{2} \int_{-a}^{a} \left(1 + \mu \frac{x}{a}\right) \frac{dN^T}{dx} \frac{dN}{dx} dx\, \delta. \tag{3}$$

Notația

$$P_x = P\left(1 + \mu \frac{x}{a}\right), \text{ cu } \mu = F/2P \tag{4}$$

indică o variație liniară a forței axiale în lungul elementului, variație care nu depinde de mărimea deformației de încovoiere. Variația forței P_x se datorește transferului uniform la teren, prin aderență laterală, a unei părți F (fig. 1*a*) din forța axială care acționează la nodul superior al elementului.

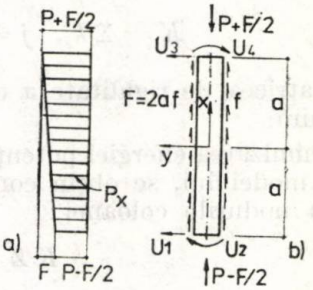


Fig. 1. — Element de coloană — *a*) Variația forței P ; *b*) Deplasările nodale și forțele care acționează în lungul elementului.

Se admite drept cunoscută pentru fiecare element de coloană legea de variație a forței de aderență [15, 22, 26]. În consecință, pentru un anumit nivel de încărcare a coloanei, $P + F/2$ (fig. 1*b*) este o mărime constantă a cărei valoare se obține scăzînd din forța axială de la capitel, forța preluată de teren pînă la nodul superior al elementului considerat.

În aceste condiții matricea de rigiditate geometrică a elementului de coloană, raportată la deplasările $U1—U4$ (fig. 1*b*), se obține prin efectuarea integralei din (3). Cu notația $l = 2a$, această matrice se scrie :

$$k_G = \frac{P}{60l} \begin{bmatrix} 72 & -6(1+\mu)l & -72 & -6(1-\mu)l \\ -6(1+\mu)l & 4(2-\mu)l^2 & 6(1+\mu)l & -2l^2 \\ -72 & 6(1+\mu)l & 72 & 6(1-\mu)l \\ -6(1-\mu)l & -2l^2 & 6(1-\mu)l & 4(2+\mu)l^2 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Dacă se neglijează aportul forței de aderență ($\mu = 0$), matricea k_G ia forma convențională a matricei de rigiditate a eforturilor inițiale așa cum a fost prezentată în [23], iar P ia valoarea forței axiale de la capitelul coloanei.

Matricea de rigiditate a elementului j de coloană este dată de relația

$$k_j = k_E + k_G, \tag{6}$$

în care k_E reprezintă matricea de rigiditate elastică a elementului și a mediului suport aferent, iar k_G este matricea de rigiditate geometrică (5).

2.2. MATRICEA DE RIGIDITATE A COLOANEI ÎN PROBLEMA PLANĂ

Cunoscînd matricea de rigiditate a fiecărui element de coloană se poate scrie expresia potențialului ansamblului coloană-teren plus sarcini ca o sumă a potențialelor elementelor componente și a încărcării exterioare :

$$\pi = Z^T \left(\frac{1}{2} \Sigma k_j Z - Q \right). \tag{7}$$

În (7), Z constituie vectorul deplasărilor nodale ale coloanei, Q, vectorul sarcinilor aplicate la noduri, iar

$$K = \Sigma k_j, \quad j = 1, 2, \ldots n \tag{8}$$

reprezintă matricea de rigiditate a coloanei puternic comprimate privite ca substructură.

Din minimizarea energiei potențiale totale (7) în raport cu gradele de libertate ale modelului, se obțin condițiile de echilibru ale forțelor care acționează la nodurile coloanei :

$$K Z = Q. \tag{9}$$

În vederea introducerii lui K în matricea de rigiditate globală este necesar să se izoleze rigiditățile coloanei raportate la deplasările de interfață. Pentru aceasta se rescrie ecuația (9) sub forma

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{is} \\ K_{si} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_i \\ Z_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_i \\ Q_s \end{bmatrix}, \tag{10}$$

în care Z_s este vectorul gradelor de libertate de la capitel, iar Z_i este vectorul deplasărilor celorlalte noduri ale coloanei. Semnificația celorlalți termeni din (10) rezultă prin particularizare. Eliminînd din (10) vectorul Z_i, se va obține forma redusă a sistemului de condiție :

$$K' Z_s = Q', \tag{11}$$

în care matricea redusă,

$$K' = K_{ss} - K_{si} K_{ii}^{-1} K_{is}, \tag{12}$$

reprezintă matricea de rigiditate a coloanei puternic comprimate privite ca macroelement al structurii. De asemenea, din (10) și (11), rezultă

$$Q' = Q_s \tag{13}$$

deoarece coloana este încărcată numai prin intermediul secțiunii de capitel. Inversarea matricei K_{ii} din (12) constituie un impediment în cazul calculelor repetitive. Această operație poate fi evitată dacă relația (12) se aplică succesiv de $2n$ ori, eliminînd de fiecare dată cîte o linie și o coloană din matricea de rigiditate a substructurii. Această operație de reducere treptată a matricei K este echivalentă procesului de substituție directă din algoritmul lui Gauss cu ajutorul produsului matricelor de reducere $M^{(k)}$ ([25], p. 211—213).

Cu notații asemănătoare celor utilizate în [24], matricea K' se scrie astfel:

$$K' = \begin{bmatrix} k'_H & k'_r \\ k'_r & k'_M \end{bmatrix}, \tag{14}$$

k'_H, k'_M și k'_r reprezintă rigiditățile care caracterizează comportarea la încovoiere a coloanei puternic comprimate. Indicile prim marchează deosebirea existentă între aceste rigidități și rigiditățile k_H, k_M și k_r din [24] care au fost determinate neglijînd efectul forței axiale.

3. ECHIVALENTUL NELINIAR AL COLOANEI PUTERNIC COMPRIMATE

Determinarea caracteristicilor echivalentului, lungimea L'_e, parametrul deformației din forfecare t' și rigiditatea secțională la încovoiere $(EI)'_e$, se realizează introducîndu-se în condiția de echivalență parțială din [24] energia de deformație a coloanei puternic comprimate. Se obține:

$$L'_e = \frac{2k'_r}{k'_H},$$

$$t' = \frac{3k'_M\, k'_H - 4k'^2_r}{k'^2_r}, \tag{15}$$

$$(EI)'_e = \frac{2k'_r(k'_M\, k'_H - k'^2_r)}{k'^2_H}.$$

Echivalentul neliniar definit prin caracteristicile (15) constituie corespondentul fizic al macroelementului caracterizat prin matricea de rigiditate K' (12). Acest echivalent depinde nu numai de caracteristicile coloanei reale (secțiune, lungime, grad de încastrare în teren), ci și de mărimea forței axiale. Relația dintre caracteristicile echivalentului și forța axială este neliniară.

Dacă forțele axiale din coloane nu pot fi stabilite anticipat, mărimea lor fiind influențată de trecerea structurii în poziție deformată, apare necesitatea unui calcul ciclic, cu corectarea treptată a rigidității ansamblului. În aceste condiții, datorită caracterului lor neliniar, în fiecare ciclu de calcul va fi necesar să se recalculeze caracteristicile echivalentului, în fapt

va trebui să se introducă alți echivalenți în modelul de calcul. Acest mod de tratare poate fi considerat acceptabil în cazul structurilor fundate pe un număr redus de coloane cu caracteristici diferite.

De cele mai multe ori, în practica curentă, coloanele unei structuri pot fi grupate într-un număr redus de tipuri, în timp ce, datorită forțelor axiale diferite, numărul echivalenților neliniari este de regulă mult mai mare. În situațiile de acest fel, și mai ales dacă este necesar un calcul ciclic, se dovedește a fi mai eficientă utilizarea factorilor de corecție asociați matricei de rigiditate elastice.

4. ECHIVALENTUL LINIAR AL COLOANEI PUTERNIC COMPRIMATE

Matricea de rigiditate a macroelementului (14), scrisă cu ajutorul factorilor de corecție, ia forma

$$K' = \begin{bmatrix} \dfrac{12(EI)_e}{(1+t)L_e^3} A & \dfrac{6(EI)_e}{(1+t)L_e^2} C \\ \dfrac{6(EI)_e}{(1+t)L_e^2} C & \dfrac{(4+t)(EI)_e}{(1+t)L_e} B \end{bmatrix}, \tag{16}$$

în care $(EI)_e$, L_e și t sînt caracteristicile echivalentului determinate în ipoteza că se neglijează efectul forței axiale [24], iar A, B și C sînt factori de corecție care se pot defini în raport cu ν, parametrul forței axiale N de la capitelul coloanei. ν se poate exprima convenabil în funcție de caracteristicile echivalentului și forța de la capitel:

$$\nu = L_e (N/(EI)_e)^{\frac{1}{2}}.$$

Cei trei factori de corecție, A, B și C, introduc efectul forței axiale din poziția deformată a coloanei.

4.1. VARIAȚIA CARACTERISTICILOR ECHIVALENTULUI ÎN FUNCȚIE DE GRADUL DE ÎNCASTRARE AL COLOANEI

Dacă coloanele sînt fundate în terenuri stratificate, neomogene, determinarea celor trei caracteristici ale echivalentului se face folosind rigiditățile calculate în absența forței axiale. Pe de altă parte, în cazul terenurilor monostrat, variația caracteristicilor echivalenților se poate reprezenta grafic în funcție de factorul de flexibilitate R care definește gradul de încastrare al coloanei în teren [15].

În figura 2 este reprezentată variația celor trei caracteristici în cazul unui teren cu modul de fundație constant, iar în figura 3, în cazul unui teren cu modul de fundație variind liniar cu adîncimea. Cu linii continue este reprezentat cazul coloanelor flotante, iar cu linii întrerupte cazul coloanelor admise a fi articulate la vîrf. După cum se poate constata, de la anumite valori ale lui R cele două reprezentări se confundă, intrîndu-se în domeniul coloanei semiinfinite.

S-au folosit notațiile: EI și L pentru rigiditatea secțională și, respectiv, lungimea coloanei reale; $k = k_0 b$ și $n = mb$, k_0 fiind modulul de fundație în ipoteza lui Winkler, m, parametrul care indică rata de creștere cu adîncimea a modulului de fundație, iar b este lățimea de conlucrare cu terenul. Factorul de flexibilitate R este definit în cele două figuri.

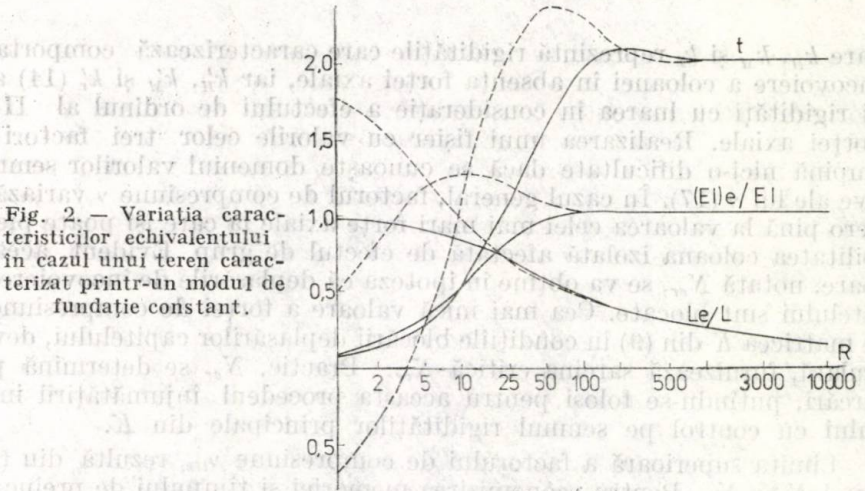


Fig. 2. — Variația caracteristicilor echivalentului în cazul unui teren caracterizat printr-un modul de fundație constant.

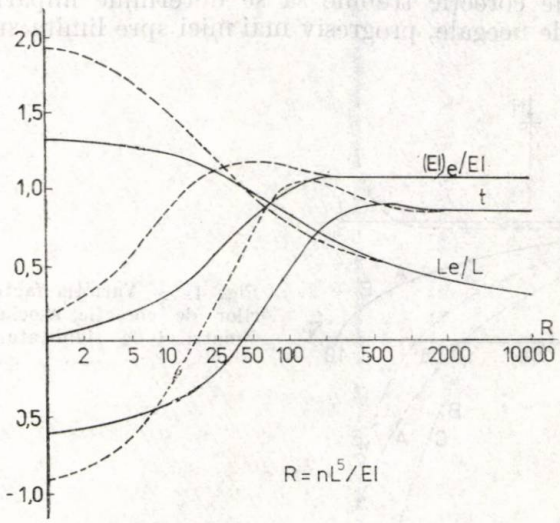


Fig. 3. — Variația caracteristicilor echivalentului în cazul unui teren caracterizat printr-un modul de fundație variind liniar cu adîncimea.

4.2. DETERMINAREA FACTORILOR DE CORECȚIE

După cum este cunoscut din statica neliniară [4, 7], factorii de corecție asociați matricei de rigiditate pot fi priviți ca măsură a rigidității elementului. Similar, în cazul examinat aici, factorii de corecție reflectă reducerea rigidităților echivalentului pe măsura creșterii forței de compresiune de la capitel.

În cazul coloanelor, determinarea pe cale analitică a acestor factori se dovedește foarte dificilă. Pot fi însă determinați cu ușurință printr-o abordare numerică, cu ajutorul rapoartelor :

$$A = k'_H/k_H,\ B = k'_M/k_M \text{ și } C = k'_r/k_r, \qquad (18)$$

în care k_H, k_M și k_r reprezintă rigiditățile care caracterizează comportarea la încovoiere a coloanei în absența forței axiale, iar k'_H, k'_M și k'_r (14) aceleași rigidități cu luarea în considerație a efectului de ordinul al II-lea al forței axiale. Realizarea unui fișier cu valorile celor trei factori nu întîmpină nici-o dificultate dacă se cunoaște domeniul valorilor semnificative ale lui ν (17). În cazul general, factorul de compresiune ν variază de la zero pînă la valoarea celei mai mari forțe axiale la care își poate pierde stabilitatea coloana izolată afectată de efectul de grup. Evident, această valoare, notată N_{cr}, se va obține în ipoteza că deplasările de încovoiere ale capitelului sînt blocate. Cea mai mică valoare a forței de compresiune la care matricea K din (9) în condițiile blocării deplasărilor capitelului, devine singulară, furnizează sarcina critică N_{cr}. Practic, N_{cr} se determină prin încercări, putîndu-se folosi pentru aceasta procedeul înjumătățirii intervalului cu control pe semnul rigidităților principale din K.

Limita superioară a factorului de compresiune ν_{lim} rezultă din (17), punînd $N = N_{cr}$. Pentru economisirea memoriei și timpului de prelucrare la calculator, coeficienții de corecție trebuie să se determine împărțind domeniul $0 - \nu_{lim}$ în intervale neegale, progresiv mai mici spre limita superioară a domeniului.

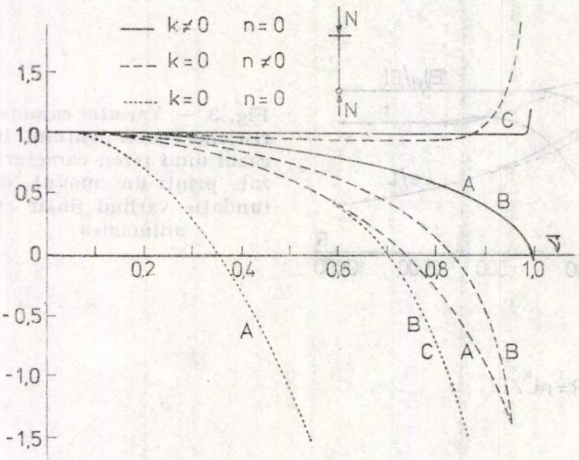


Fig. 4. — Variația factorilor de corecție asociați matricei de rigiditate.

În figura 4 este reprezentată variația coeficienților A, B și C ai coloanei semiinfinite purtătoare pe vîrf, în funcție de valoarea normalizată a factorului de compresiune $\bar{\nu} = \nu/\nu_{lim}$. Cu linie continuă este figurată variația celor trei coeficienți în cazul unui teren cu modul de fundație constant, iar cu linie întreruptă, în cazul unui teren cu modul de fundație variind liniar cu adîncimea. Rezultatele numerice obținute în cazul terenului cu modul de fundație constant evidențiază tendința unei modificări

foarte rapide a valorilor celor trei coeficienți, în imediata vecinătate a lui ν_{lim}. Pentru comparație, este reprezentată punctat variația coeficienților similari ai barei articulate-încastrate. Rezultatele obținute cu ajutorul relațiilor (18) coincid cu cele determinate pe cale analitică [3, 7, 10].

4.3. MATRICEA DE RIGIDITATE A COLOANEI ÎN PROBLEMA SPAȚIALĂ

În cazul general de solicitare, încovoiere pe două direcții și torsiune, în prezența forței axiale, matricea de rigiditate a echivalentului liniar al coloanei, convenabil partiționată, se scrie sub forma

$$\hat{K}_e = \begin{bmatrix} K' & 0 & 0 \\ 0 & K'' & 0 \\ 0 & 0 & K''' \end{bmatrix}, \tag{19}$$

în care K' este dată de (16), iar K'' este o matrice de același tip, conținînd rigiditățile de încovoiere ale coloanei după a doua direcție de solicitare. Dacă efectul de grup este identic pe cele două direcții și fața terenului natural este orizontală, matricele K' și K'' sînt alcătuite din aceleași elemente [24]. În caz contrar, cele două matrice diferă. Diferă nu numai prin caracteristicile echivalenților dar și prin factorii de corecție asociați rigidităților.

Matricea diagonală K''' conține rigiditatea axială și cea torsională [26].

Introducerea matricei $\hat{K}_e$ în matricea de rigiditate globală, cu eventuala eliminare a deplasărilor capitelului prin intermediul relațiilor de constrîngere, se realizează după modelul celor prezentate în [24].

5. DETERMINAREA SOLUȚIEI

Prin utilizarea echivalenților, deplasările coloanelor sînt eliminate din calcul, astfel încît soluția problemei poate fi obținută scriind condițiile de echilibru ale forțelor care acționează numai la nodurile suprastructurii. Matriceal, aceste condiții sînt exprimate prin relația

$$\bar{K}\,\bar{Z} = \bar{Q}, \tag{20}$$

în care $\bar{K}$ reprezintă matricea de rigiditate globală a structurii, iar $\bar{Z}$ și $\bar{Q}$ constituie deplasările nodurilor suprastructurii și, respectiv, sarcinile exterioare aplicate la aceste noduri.

Matricea de rigiditate globală a structurii se poate scrie sub forma

$$\bar{K} = \sum_s (\bar{K}_E + \bar{K}_G) + \sum_i \bar{K}_e, \tag{21}$$

în care însumările se extind asupra tuturor celor s elemente de suprastructură și i macroelemente de infrastructură.

$\bar{K}_E$ și $\bar{K}_G$ reprezintă matricea de rigiditate convențională și, respectiv, matricea de rigiditate a eforturilor inițiale [2, 3, 5, 7] a unui element de suprastructură, iar $\bar{K}_e$ este matricea de rigiditate a unui macro-

element de infrastructură (matricea $\hat{K}_e$ raportată la sistemul global de axe). Matricea $\bar{K}_E$ este independentă de valoarea forței axiale, $\bar{K}_G$ variază liniar, iar $\bar{K}_e$ variază neliniar în raport cu această forță.

Ecuația (20) este utilizată atît în calculul de ordinul al II-lea, cît și în calculul de stabilitate.

5.1. CALCULUL DE ORDINUL AL II-LEA

Determinarea soluției sistemului de ecuații (20) sub forma

$$\bar{Z} = \bar{K}^{-1}\bar{Q} \tag{22}$$

presupune cunoașterea forțelor axiale din toate elementele structurii. Cum aceste forțe sînt dependente de mărimea deplasărilor $\bar{Z}$ soluția nu se va putea obține decît ciclic, prin corectarea alternativă a deplasărilor și a forțelor axiale. Se începe cu un calcul liniar elastic, care furnizează prima aproximație a acestor forțe. Se recalculează matricea $\bar{K}(21)$, se determină apoi deplasările $\bar{Z}$ (22) și, corespunzător acestora, noile valori ale forțelor axiale. Cu acestea se determină o nouă matrice $\bar{K}$ și alte deplasări $\bar{Z}$, procesul iterativ continuînd pînă cînd sarcinile exterioare aplicate la nodurile suprastructurii sînt echilibrate de eforturile interioare determinate pe baza ultimelor deplasări calculate.

5.2. VERIFICAREA STABILITĂȚII

Admițînd o creștere proporțională a forțelor axiale din elementele structurii, stadiul critic de încărcare se poate obține pe baza criteriului rigidității absolute nule [4, 27]. Potrivit acestui criteriu, și ținînd seama de faptul că numerotarea nodurilor structurii este arbitrară, stadiului critic îi corespunde acea matrice de rigiditate globală $\bar{K}$ a cărei matrice echivalentă superior triunghiulară [25] are toți coeficienții diagonali pozitivi, cu excepția ultimului care este egal cu zero. Nivelul de încărcare care generează această formă particulară a matricei echivalente se poate obține fie prin procedeul înjumătățirii intervalului, fie prin pași succesivi [3, 7], fie cu ajutorul unor metode de accelerare a procesului de calcul prin interpolare sau extrapolare parabolică [27, 28].

6. EXEMPLU DE CALCUL

În figura 5 este reprezentat un cadru tridimensional alcătuit din profile I 40. Axele de inerție maxime ale secțiunilor riglelor sînt paralele la planul XOZ, iar cele ale secțiunilor stîlpilor, la planul YOZ. Cele patru forțe verticale care acționează la noduri cresc proporțional pînă la pierderea stabilității cadrului. Acest exemplu a fost prezentat în [3], pentru multiplicatorul critic minim, determinîndu-se valoarea $\lambda_{cr} = 6{,}58$. Adițional, aici se ia în considerație existența a doi pereți care, pe direcția OZ, constituie pentru stîlpi un mediu de rezemare elastic de tip Winkler. În figură, pereții sînt reprezentați cu linie întreruptă.

Verificarea stabilității ansamblului, în domeniul elastic, luînd în considerație valori diferite pentru „modulul de fundație" k, care carac-

terizează compresibilitatea pereților, a fost făcută cu ajutorul programului PASAJ. Programul, utilizat și la rezolvarea exemplului comparativ din [24], a fost adaptat, pe baza celor arătate în paragrafele precedente, pentru calculul structurilor fundate pe coloane atunci cînd se ține seama de efectul forțelor axiale.

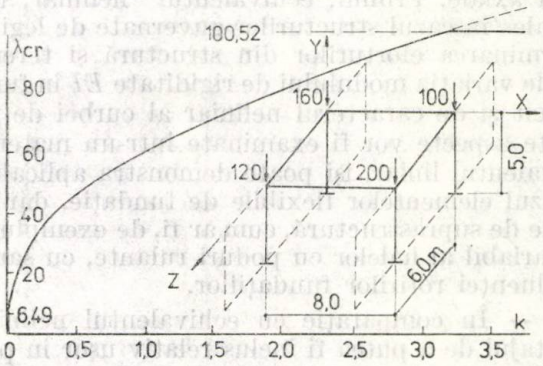


Fig. 5. — Cadru spațial acționat de patru forțe axiale (date în kN). Relația multiplicator critic minim — modul de fundație.

În figura 5 este reprezentată variația multiplicatorului critic minim în funcție de valoarea modulului de fundație k. Dintr-un studiu prealabil de convergență a soluției, s-a constatat că, indiferent de valoarea lui k, pentru mai mult de patru elemente/stîlp rezultatele nu se mai modifică. Curba reprezentată în figură corespunde unei împărțiri a stîlpilor în cinci părți egale (120 de grade de libertate / structură).

După cum se poate constata, parametrul λ_{cr} variază neliniar în raport cu modulul k, crescînd de la valoarea $\lambda_{cr} = 6{,}49$ ($k = 0$) pînă la valoarea $\lambda_{cr} = 100{,}52$ ($k \simeq 3{,}15$ kN/cmp) la care are loc plafonarea în raport cu modulul k. În acest interval, pierderea stabilității se produce prin deformarea continuă a cadrului în planul pereților. Pentru valori $k > 3{,}15$ kN/cmp, pierderea stabilității se produce în direcția OX, prin flambajul stîlpilor după axa de inerție maximă. S-a admis că pereții nu opun nici o rezistență la deplasări normale pe planul lor.

Se menționează că aceste rezultate au fost obținute atît prin intermediul modelului de calcul redus (24 GDL) realizat cu ajutorul echivalenților elastici, cît și prin intermediul modelului de calcul integral, fără substructuri (120 GDL).

Se mai adaugă că în ipoteza modelării stîlpilor cu cîte un singur element, multiplicatorul critic minim determinat cu programul PASAJ pentru $k = 0$ este egal cu cel calculat în [3].

În sfîrșit, se subliniază faptul că avînd la bază prezumția unei comportări perfect elastice a ansamblului cadru-pereți, soluția obținută nu este decît ipotetică. În realitate, datorită apariției deformațiilor plastice, pierderea stabilității se va produce prin divergență [9] plafonarea în raport cu modulul k avînd loc mai devreme, la o valoare λ_{cr} inferioară lui 100,52.

7. COMENTARII ȘI CONCLUZII

În încheiere, se consideră util să se sublinieze următoarele :

— Procedeul prezentat este destinat calculului structurilor fundate pe piloți sau coloane puternic comprimate, din rîndul acestora, fiind deose-

bit de util pentru proiectarea radierelor înalte, a viaductelor și podurilor cu pile flexibile, a unor tipuri de platforme și cheuri de acostare etc.

— Matricea de rigiditate geometrică a elementului de coloană (5) stă la baza definirii celor doi echivalenți, din punctul de vedere al efectului forței axiale. Primul, echivalentul neliniar, își poate dovedi utilitatea mai ales în cazul structurilor guvernate de legi constitutive neliniare, cînd determinarea eforturilor din structură și teren se face ținîndu-se seama atît de variația modulului de rigiditate EI în funcție de nivelul de încărcare [1], cît și de caracterul neliniar al curbei de interacțiune $p-y$ [16, 21]. Aceste aspecte vor fi examinate într-un material viitor. Cel de al doilea, echivalentul liniar, își poate demonstra aplicabilitatea imediată nu numai în cazul elementelor flexibile de fundație, dar și la modelarea unor elemente de suprastructură, cum ar fi, de exemplu, stîlpii cu moment de inerție variabil ai halelor cu poduri rulante, cu sau fără luarea în considerare a influenței rotirilor fundațiilor.

— În comparație cu echivalentul neliniar, echivalentul liniar are avantajul de a putea fi inclus relativ ușor în programele existente în care introducerea efectului de ordinul al II-lea se face cu ajutorul coeficienților de corecție asociați matricelor de rigiditate.

— Echivalentul liniar conduce la o reducere substanțială a efortului de calcul în cazul structurilor fundate pe un număr mare de coloane sau piloți, reducere care poate fi decisivă atunci cînd nu se dispune decît de un calculator de capacitate redusă.

Cîteva notații:

A, B, C — factorii de corecție aferenți echivalentului liniar;

$(EI)_e$, L_e, t — caracteristicile echivalentului liniar;

$(EI)'_e$, L'_e, t' — caracteristicile echivalentului neliniar;

k_H, k_M, k_r — rigiditățile coloanei în absența forței axiale;

k'_H, k'_M, k'_r — rigiditățile coloanei în prezența forței axiale.

Primit la redacție la 6 octombrie 1986

BIBLIOGRAFIE

1. R. AGENT, V. BĂNUȚ, *Calculul structurilor din beton armat cu stîlpi zvelți*, Edit. Tehnică, București, 1979.
2. C. AVRAM și colab., *Structuri din beton armat. Metoda elementelor finite — Metoda echivalențelor*, Edit. Academiei R.S. România, București, 1984.
3. V. BĂNUȚ, *Calculul neliniar al structurilor*, Edit. Tehnică, București, 1981.
4. F. BLEICH, *Buckling Strength of Metal Structures*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1952.
5. R. D. COOK, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1974.
6. J. M. GERE, W. WEAVER JR., *Analysis of Framed Structures*, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, New Jersey, 1965.
7. A. GHEORGHIU, *Concepții moderne în calculul structurilor*, Edit. Tehnică, București, 1975.
8. V. GIONCU, M. IVAN, *Bazele calculului structurilor la stabilitate*, Edit. Facla, Timișoara, 1983.
9. D. MATEESCU și colab., *Stabilitatea la compresiune a structurilor din bare de oțel*, Edit. Academiei R.S. România, București, 1980.
10. P. MAZILU, N. ȚOPA, *Stabilitatea sistemelor de bare*, secțiunea VIII, *Manual pentru calculul construcțiilor* (coord. A. D. Caracostea), Edit. Tehnică, București, 1977.

11. S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Teoria stabilității elastice*, Edit. Tehnică, București 1967.
12. A. BELEȘ și colab., *Calculul construcțiilor amplasate pe terenuri deformabile*, Edit. Academiei R.S. România , București, 1977.
13. A. R. TOAKLEY, *Buckling Loads for Elastically Supported Struts*, Journal ASCE, EM3, pp. 205—231 (1965).
14. C. S. DESAI, J. T. CHRISTIAN (Eds), *Numerical Methods in Geotechnical Engineering*, McGraw-Hill Book Co., N. Y., 1977.
15. H. G. POULOS, E. H. DAVIS, *Pile Foundation Analysis and Design*, John Wiley &Sons, Inc., New York, 1980.
16. L. C. REESE, J. D. ALLEN, *Drilled Shaft Manual* (Vol. 2), U.S. Dep. of Transportation, Washington D. C., 1978.
17. V. POP, *Calculul piloților la forțe axiale și transversale considerînd frecarea laterală*, a V-a C.N.G.F., Cluj-Napoca, 1983.
18. M. T. DAVISON, K. E. ROBINSON, *Bending and buckling of partially embedded piles*, Proc. 6th Int. Conf. S.M. & F.E., 1965, p. 246.
19. D. G. ROW, G. H. POWELL, *A substructure technique for nonlinear ana dynamic analysis*, Rep. No. UCB/EERC-78/15, Univ. of Calif., 1978.
20. G. ONU, *O soluție consistentă pentru calculul coloanelor pasive*, St. cerc. Mec. Apl., **45**, 1, p. 36—45 (1986).
21. G. ONU, *Calculul fundațiilor pe coloane în domeniul neliniar elastic*, St. Cerc. Mec. Apl., **40**, 5, p. 697—714 (1981).
22. I. MANOLIU și colab., *Aspecte caracteristice ale execuției și calculului piloților forați cu diametru mare*, Construcții, 3, p. 42—49 (1972).
23. R. GALLAGHER, J. PADLOG, *Discrete Element Approach to Structural Instability Analysis* , AIAA Jrn., **1**, 6, p. 1437 (1963).
24. G. ONU, *Echivalent cu constrîngeri pentru coloana activă ca element al structurilor cu fundații flexibile*, St. Cerc. Mec. Apl., **46**, **1** (1987).
25. G. DODESCU, *Metode numerice în algebră*, Edit. Tehnică, Buc., 1979.
26. M. F. RANDOLPH, *A computer program for the analysis and design of pile groups under general loading conditions*, CUED/D-Soils TR 91, Cambridge University, 1980.
27. P. C. WANG, *Metode numerice și matriceale în mecanica construcțiilor*, Edit. Tehnică, București, 1970.
28. N. BĂLUȚ și colab., *Calculul neliniar al structurilor reticulare curbe*, a II-a Conf. de constr. metalice, Timișoara, 1979.

TRANSMISIE MECANICĂ DE PUTERE CONSTANTĂ

de O. S. CREȚU, GH. FRUNZĂ
Institutul de Învățămînt Superior din Suceava

Se propune o soluție originală de transmisie mecanică de putere constantă. Se elaborează un studiu teoretic privind cinematica și statica elementelor active ale transmisiei în urma căruia se stabilește caracteristica de transmisie de putere constantă.
Se prezintă o variantă constructivă de variator de mică putere care este testat pe un stand special realizat.
Rezultatele cercetărilor sînt de natură să încurajeze continuarea lor în vederea obținerii unei transmisii deosebit de utilă în industrie.

1. INTRODUCERE

Practica industrială reclamă adeseori menținerea constantă a puterii, în vederea asigurării funcționării motoarelor la parametrii optimi sau pentru respectarea unor cerințe tehnologice.

Folosirea dispozitivelor de putere constantă conduce în totalitatea cazurilor la însemnate economii energetice. S-a constatat că utilizarea unui dispozitiv mecanic de putere constantă la un autovehicul realizează economii de carburant de 30—40% [2, 13].

Menținerea constantă a puterii este asigurată în mod obișnuit prin intercalarea în lanțul cinematic al mașinii a unui dispozitiv de putere constantă. Dintre dispozitivele de putere constantă se amintesc : dispozitivele electrice, hidraulice și mai rar cele mecanice.

Transmisiile electrice de putere constantă se realizează pentru orice domeniu de putere, dar prezintă dezavantajele unei complexități constructive și funcționale, necesitînd prezența unor echipamente electrice și electronice specializate.

Dispozitivele hidraulice de putere constantă sînt construite de regulă pentru puteri mari, necesită o precizie de execuție și montaj ridicată și reclamă utilizarea unor echipamente hidraulice scumpe.

Majoritatea transmisiilor mecanice se caracterizează prin menținerea constantă a cuplului transmis. Se cunosc puține dispozitive mecanice care să asigure menținerea constantă a puterii transmise, și, de cele mai multe ori, constanța puterii se realizează pentru o fracțiune din gama de reglaj [4]. Gama de reglaj este definită ca raportul dintre turația maximă de ieșire și turația minimă de ieșire (caracterizînd din punct de vedere cinematic transmisia).

2. PROPUNERE DE VARIATOR

Ținînd seama că transmisiile mecanice oferă o serie de avantaje față de celelalte transmisii [3,10] s-a căutat a se obține o soluție de dispozitiv mecanic (variator de turație) care să asigure constanța puterii transmise.

În acest scop s-a conceput un studiu teoretic asupra unui tip original de variator mecanic de turație reprezentat în figura 1, menit să reali-

zeze menţinerea constantă a puterii transmise pentru întreaga gamă de reglaj.

Variatorul este format din două discuri montate pe arborele de intrare: unul tronconic *1* şi celălalt toroidal *2*. Între aceste discuri sînt aşezate un număr oarecare de corpuri sferice *3*, rezemate circumferenţial într-un separator *4*. Bilele *3* sînt apăsate în contact cu discurile de intrare *1* şi *2* de o piesă tronconică la interior *5*, care se poate deplasa axial sub acţiunea unei forţe dezvoltată de un cuplaj cu apăsare automată *6* (tip elicoidal) plasat pe arborele de ieşire.

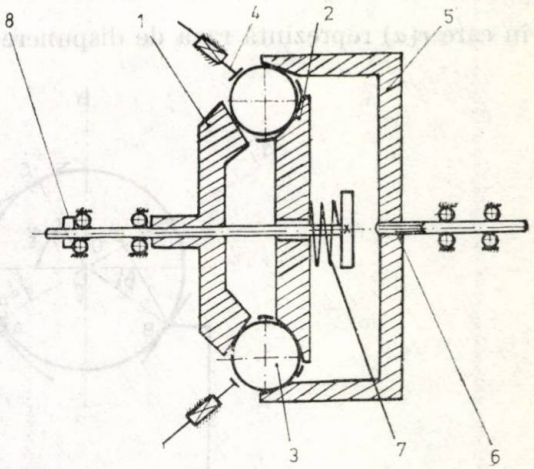


Fig. 1

Separatorul *4* permite bilelor toate mişcările solidului cu punct fix (centrul bilei), permiţînd de asemenea centrului bilei deplasarea după o direcţie paralelă cu generatoarea suprafeţei conice a discului. Pretensionarea se realizează de la un resort *7*, fiind reglată cu ajutorul unei piuliţe *8*.

Menţinerea constantă a puterii se realizează prin variaţia automată a raportului de transmitere funcţie de cuplul rezistent. Această variaţie se obţine prin modificarea poziţiei axei de rotaţie a bilelor, modificare impusă de deplasarea punctului de contact dintre bilă şi discul toroidal. Poziţia acestui punct este determinată de mărimile forţelor ce apar pe bilă şi de construcţia internă a variatorului.

3. CINEMATICA CORPULUI SFERIC

Pentru determinarea raportului de transmitere funcţie de poziţia bilei faţă de cele trei discuri cu care vine în contact, se fac referiri la figura 2.

Bila se găseşte în contact cu discul toroidal *2*, în punctul *A*, cu discul tronconic *1*, în punctul *B*, şi cu piesa de ieşire tronconică la interior *5*, în punctul *C*.

Se alege un sistem de referinţă cu originea în centrul bilei conform figurii 2. Axa *Oz* este astfel aleasă încît să formeze un triedru triortogonal drept.

Punctele de contact au coordonatele:

$$A(R\cos\alpha;\ -R\sin\alpha;\ 0);\ B(-R\cos\beta;\ -R\sin\beta;\ 0)\ \text{şi}\ C(R\cos\gamma;\ R\sin\gamma;\ 0), \tag{1}$$

în care R reprezintă raza bilei; α, β, γ — unghiurile de contact ale bilei cu cele trei discuri conform figurii (α este variabil, β și γ sînt constante).

Distanțele de la punctele de contact la axa de rotație a discurilor sînt, conform și cu figura 2, următoarele:

$$R_A = r(\alpha) - R \sin \alpha; \; R_B = r(\alpha) - R \sin \beta; \; R_C = r(\alpha) + R \sin \gamma, \quad (2)$$

în care $r(\alpha)$ reprezintă raza de dispunere a centrului bilei.

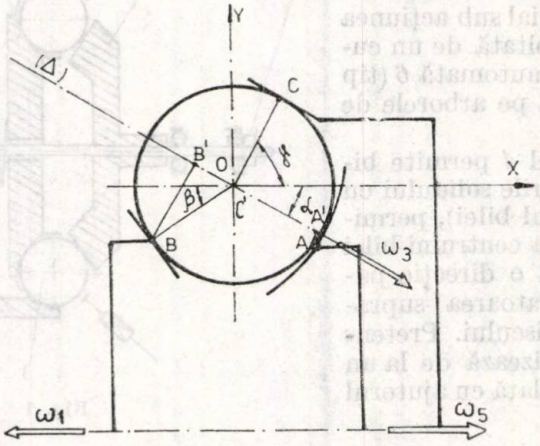


Fig. 2

Astfel vitezele punctelor de contact A, B și C, aparținînd discurilor, devin:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{A2} &= -\omega_1(r(\alpha) - R \sin \alpha)\,\bar{K}, \\ \bar{V}_{B1} &= \omega_1(r(\alpha) - R \sin \beta)\bar{K}, \\ \bar{V}_{C5} &= \omega_5(r(\alpha) + R \sin \gamma)\bar{K}, \end{aligned} \quad (3)$$

unde ω_1 și ω_2 sînt vitezele unghiulare ale discurilor de intrare *1* și *2* și de ieșire *5*.

Se consideră dreapta (Δ) de pantă λ, axa de rotație a bilei pentru poziția dată a contactelor, iar A', B' și C' proiecțiile punctelor de contact pe această dreaptă (figura 2). Vitezele punctelor de contact aparținînd bilei devin:

$$\bar{V}_{A3} = -\omega_3 ||\overline{AA'}||\,\bar{K}; \; \bar{V}_{B3} = -\omega_3 ||\overline{BB'}||\,\bar{K}, \quad (4)$$

$$\bar{V}_{C3} = \omega_3 ||\overline{CC'}||\,\bar{K},$$

unde ω_3 reprezintă viteza unghiulară a bilei; $||\overline{AA'}||$, $||\overline{BB'}||$ și $|\overline{CC'}||$ — mărimile distanțelor punctelor de contact la axa de rotație (Δ).

În urma unui calcul de geometrie analitică elementar rezultă:

$$||\overline{AA'}|| = \frac{R\sqrt{1-\lambda^2}}{1+\lambda^2}\,|\lambda \cos\alpha + \sin\alpha|,$$

$$||\overline{BB'}|| = \frac{R\sqrt{1-\lambda^2}}{1+\lambda^2}|\sin\beta - \lambda\cos\beta|, \quad (5)$$

$$||\overline{CC'}|| = \frac{R\sqrt{1-\lambda^2}}{1+\lambda^2}|\sin\gamma - \lambda\cos\beta|.$$

Din relaţiile (4) şi (5) rezultă :

$$\frac{V_{A3}}{V_{B3}} = \frac{||\overline{AA'}||}{||\overline{BB'}||},$$

de unde se poate determina poziţia dreptei (Δ), respectiv panta λ. În ipoteza rostogolirii pure, în punctele de contact vitezele de alunecare relativă sînt nule, deci

$$\bar{V}_{A3} = \bar{V}_{A2}\,;\ \bar{V}_{B3} = \bar{V}_{B1}\,;\ \bar{V}_{C3} = \bar{V}_{C5}.$$

Înlocuind, se obţine

$$\frac{\lambda\cos\alpha + \sin\alpha}{\sin\beta - \lambda\cos\beta} = \frac{r(\alpha) - R\sin\alpha}{r(\alpha) - R\sin\beta},$$

rezultă panta dreptei (Δ) exprimată prin relaţia :

$$\lambda = \frac{r(\alpha)(\sin\beta - \sin\alpha)}{r(\alpha)(\cos\alpha + \cos\beta) - R\sin(\alpha+\beta)}. \quad (6)$$

Se obţine astfel expresia raportului de transmitere :

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_5} = \frac{||\overline{AA'}||}{||\overline{CC'}||}\frac{R_C}{R_A} = \frac{|\lambda\cos\alpha + \sin\alpha|}{|\lambda\cos\gamma - \sin\gamma|}\frac{r(\alpha) + R\sin\gamma}{r(\alpha) - R\sin\alpha}, \quad (7)$$

unde $r(\alpha)$ depinde de poziţia bilei faţă de cele trei discuri.

În vederea determinării funcţiei $r(\alpha)$ se apelează la figura 3, care reprezintă bila în două poziţii : o poziţie reprezentată cu linie continuă cînd unghiul α este nul şi a doua poziţie reprezentată cu linie întreruptă cînd unghiul α are o valoare oarecare.

S-a ţinut seama de imobilitatea axială a discului conic *1*, astfel încît generatoarea de contact poate fi considerată fixă, iar centrul bilei se deplasează după o paralelă la această generatoare.

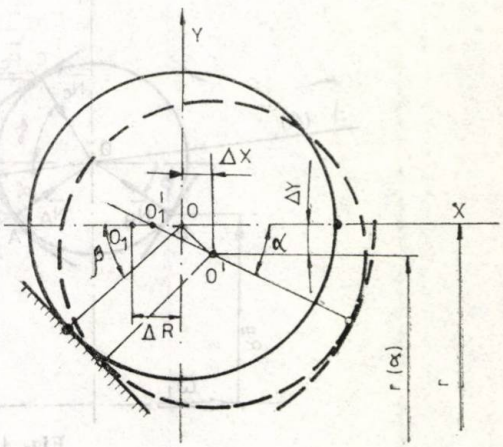


Fig. 3

Notaţiile din figură reprezintă : O_1 — centrul de curbură a suprafeţei toroidale pentru $\alpha = 0$; O_1' — centrul de curbură a suprafeţei toroidale pentru α oarecare ; O — centrul bilei pentru $\alpha = 0$;

O' — centrul bilei pentru α oarecare; $||\overline{OO'}||$ — mărimea deplasării centrului bilei între cele două poziții; ΔX — deplasarea axială a bilei; ΔY — deplasarea radială a bilei; $||\overline{OO_1}|| = ||\overline{O'O_1'}|| = \Delta R$ — diferența dintre raza suprafeței toroidale și a bilei;

$$\Delta R = R_1 - R = R\left(\frac{1}{K_f} - 1\right),$$

unde R_1 — raza suprafeței toroidale; K_f — conformitatea $\left(K_f = \frac{R}{R_1}\right)$; r — raza de dispunere a axei torului.

Din figură se observă

$$r(\alpha) = r - \Delta R \sin \alpha. \tag{8}$$

Introducînd relația (8) în (7) se obține expresia raportului de transmitere funcție de unghiul α,

$$i = \frac{|\lambda \cos \alpha + \sin \alpha|}{|\lambda \cos \gamma - \sin \gamma|} \cdot \frac{r - \Delta R \sin \alpha + R \sin \gamma}{r - \Delta R \sin \alpha - R \sin \alpha}. \tag{9}$$

4. STATICA CORPULUI SFERIC

Deoarece raportul de transmitere depinde de unghiul de contact α, se determină în continuare dependența dintre momentul rezistent la arborele condus și valoarea unghiului α. Pentru aceasta se apelează la figurile 1 și 4.

În figura 4 se reprezintă o bilă în contact cu cele trei discuri punîndu-se în evidență forțele care acționează asupra acesteia în ipoteza neglijării frecărilor. Poziția bilei este reprezentată pentru un unghi α, oarecare. S-au mai reprezentat și forțele axiale cu care discul toroidal și discul de ieșire acționează asupra bilei.

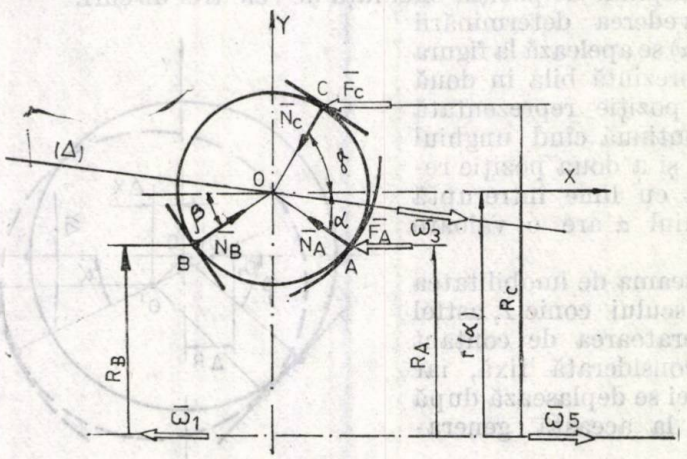


Fig. 4

Din condiția de echilibru scrisă pentru bila *3*, se obțin următoarele două ecuații :

$$-F_C - F_A + N_B \cos\beta = 0, \tag{10}$$

$$-F_C \operatorname{tg}\gamma + F_A \operatorname{tg}\alpha + N_B \sin\beta = 0,$$

de unde

$$F_A = F_C \frac{\operatorname{tg}\gamma \cos\beta - \sin\beta}{\operatorname{tg}\alpha \cos\beta + \sin\beta}, \tag{11}$$

în care F_A reprezintă forța dezvoltată de resortul *7*, F_C — forța dezvoltată de cuplajul cu autoapăsare *6* (conform figurii 1).

Ținînd seama de forța de pretensionare a resortului *7*, se obține relația :

$$F_A = F_{AO} + \Delta F_A, \tag{12}$$

unde F_{AO} reprezintă valoarea forței de pretensionare dezvoltată de resortul *7* (pentru unghiul $\alpha = 0$) cînd se consideră momentul rezistent nul; în acest caz, forța F_C, devine F_{CO}, obținută prin limitarea deplasării discului *5*, la dreapta ; ΔF_A — variația forței ce acționează asupra discului toroidal datorită variației unghiului de contact α.

Relația dintre forțele de pretensionare este :

$$F_{AO} = F_{CO}(\operatorname{tg}\gamma \operatorname{ctg}\beta - 1), \tag{13}$$

obținută prin rezolvarea sistemului (10) la care s-a făcut $\alpha = 0$.

Forța dezvoltată de cuplajul cu autoapăsare (cuplaj elicoidal) depinde de valoarea cuplului transmis de acesta prin expresia :

$$F_C = \frac{2M_t}{D\operatorname{tg}(\theta + \varphi)}, \tag{14}$$

în care M_t este momentul transmis prin cuplaj (momentul rezistent); D — diametrul mediu al cuplei elicoidale ; θ — unghiul de înclinare a spirei filetului ; φ — unghiul de frecare din cuplă.

Din relațiile (11), (12) și (14) rezultă :

$$F_A = \frac{2M_t}{D\operatorname{tg}(\theta + \varphi)} \cdot \frac{\operatorname{tg}\gamma \cos\beta - \sin\beta}{\operatorname{tg}\alpha \cos\beta + \sin\beta} - F_{AO}. \tag{15}$$

O deplasare a discului toroidal comprimînd suplimentar resortul de constantă elastică K, cu cantitatea ΔX, rezultă

$$F_A = K\,\Delta X. \tag{16}$$

Din figura 3 rezultă, aplicînd calcule geometrice elementare,

$$\Delta X = \Delta R \left[1 - \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos\beta}\right]. \tag{17}$$

Din relațiile (13), (15), (16) și (17) se obține :

$$\frac{2M_t}{D\operatorname{tg}(\theta+\varphi)}\cdot\frac{\operatorname{tg}\gamma\cos\beta-\sin\beta}{\operatorname{tg}\alpha\cos\beta+\sin\beta}-F_{co}\frac{\operatorname{tg}\gamma\cos\beta-\sin\beta}{\sin\beta}=$$

$$=K\,\Delta R\left[1-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}\right], \tag{18}$$

care exprimă implicit legătura dintre valoarea unghiului α și a momentului rezistent.

5. CARACTERISTICILE TEORETICE ALE TRANSMISIEI

Puterea transmisă de dispozitiv este dată prin relația :

$$P=M_t\,\omega_5=M_t\frac{\omega_1}{i}, \tag{19}$$

în care M_t reprezintă cuplul transmis de dispozitiv, iar celelalte elemente sînt cunoscute.

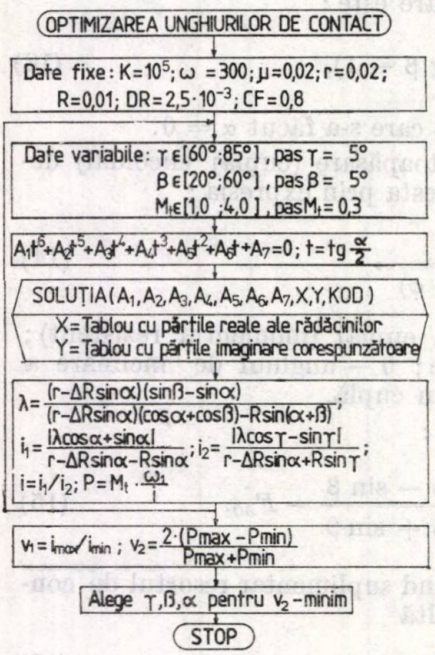


Fig. 5

Pentru determinarea puterii funcție de cuplul transmis s-a întocmit, folosind schema bloc din figura 5, un program de calcul în limbaj FORTRAN IV, constituit din două subrutine „VALORI" și „SOLUTIA".

Programul s-a realizat pentru un variator de mică putere impunîndu-se unghiurilor β, γ și α un domeniu de variație care rezultă din figura 5.

Pentru determinarea unghiului α, la diferite combinații de valori ai parametrilor modelului, s-a utilizat metoda înjumătățirii intervalului, aplicată unei ecuații de gradul al VI-lea, ai cărei coeficienți sînt dați de expresii matematice complicate, ceea ce a impus cu necesitate utilizarea calculatorului electronic.

Din analiza rezultatelor obținute în urma rulării programului s-au desprins următoarele concluzii sintetizate în figurile 6—9.

Din diagrame se observă clar efectul pozitiv al micșorării unghiului β, atît asupra puterii maxime transmise, cît și asupra puterii minime. Creșterea unghiului γ conduce la o creștere a puterii minime transmise dar și la o scădere lentă a puterii maxime transmise.

În figura 8 se prezintă variația de putere prezisă variatorului.

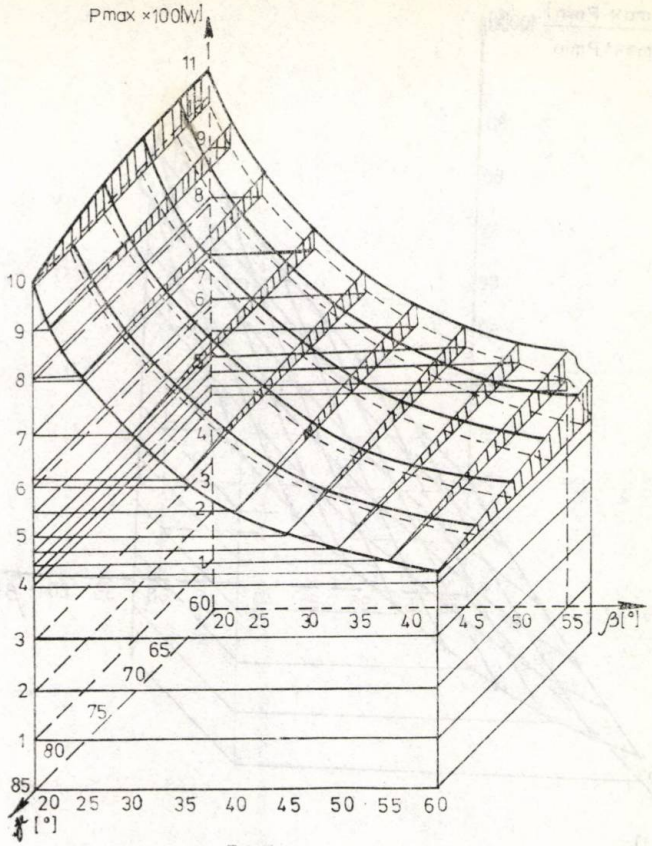

Pmax ×100[W]
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
60
65
70
75
80
85
20 25 30 35 40 45 50 55 60
β[°]
γ[°]

Fig. 6

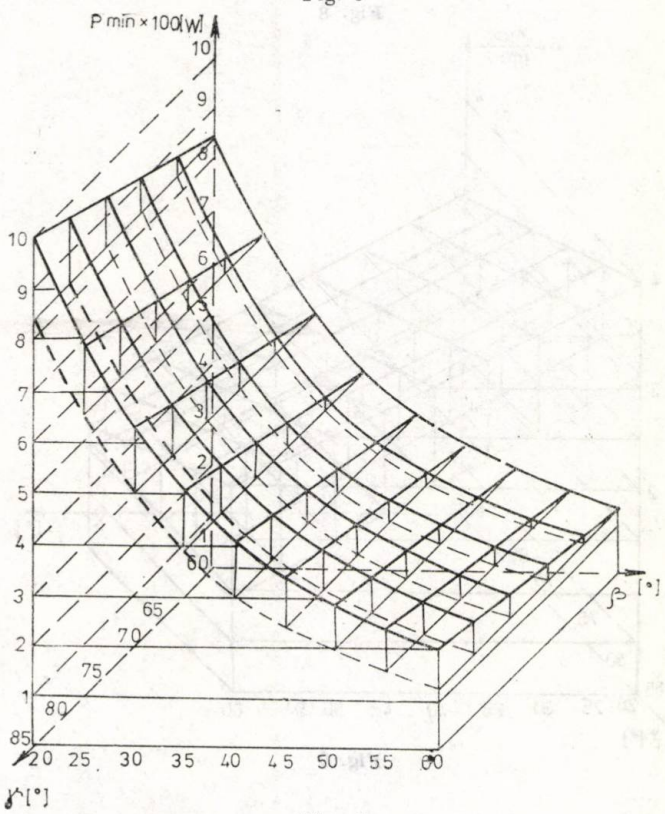

P min ×100[W]
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
60
65
70
75
80
85
20 25 30 35 40 45 50 55 60
β [°]
γ[°]

Fig. 7

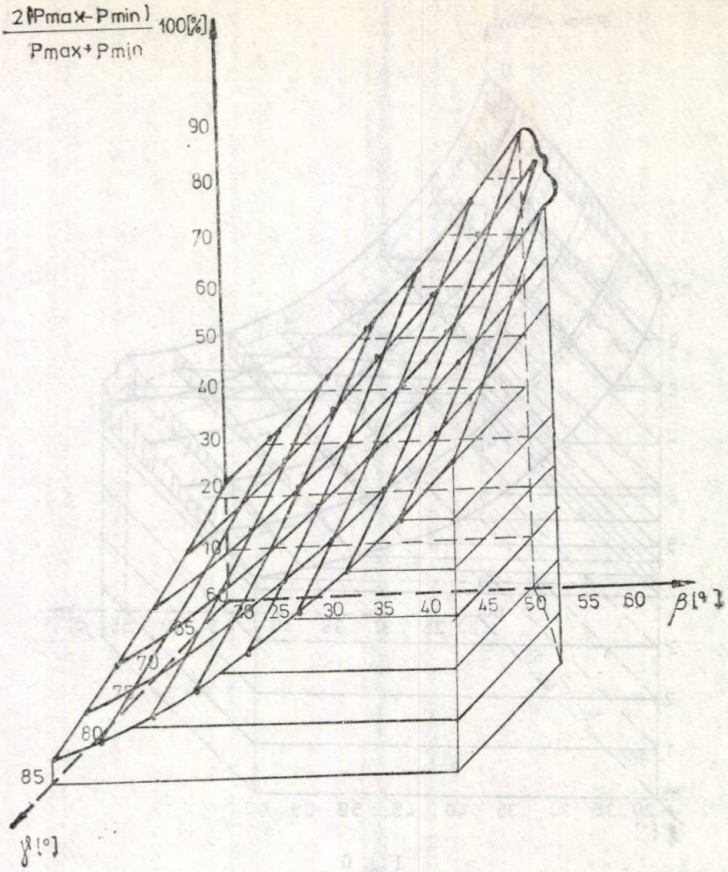

2(Pmax-Pmin)/(Pmax+Pmin) 100[%]
90
80
70
60
50
40
30
20
10
60
65
70
80
85
20 25 30 35 40 45 50 55 60 β[°]
γ[°]

Fig. 8

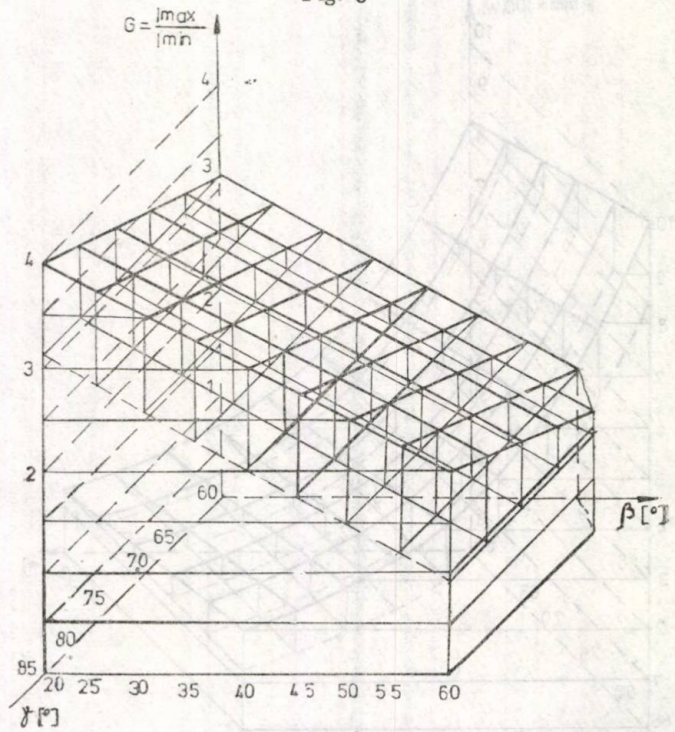

G = Imax/Imin
4
3
2
1
60
65
70
75
80
85
20 25 30 35 40 45 50 55 60 β[°]
γ[°]

Fig. 9

Se observă clar efectul pozitiv al micşorării unghiului β şi al măririi unghiului γ asupra caracteristicii de transmisie de putere constantă. Există domenii pentru care variaţia de putere este sub 10% din puterea medie transmisă de variator.

În figura 9 se prezintă influenţa valorilor unghiurilir β şi γ asupra gamei de reglaj a variatorului. Din figură reiese că micşorarea unghiului β şi creşterea unghiului γ conduc la mărirea gamei de reglaj a variatorului.

Analiza figurilor 6—9 permite alegerea cel puţin teoretică a valorilor unghiurilor de contact γ şi β, pentru o anumită aplicaţie.

Din cele prezentate se poate afirma că transmisia propusă asigură în anumite condiţii menţinerea constantă a puterii transmise.

Programul întocmit a vizat numai optimizarea valorilor unghiulare, nu şi a dimensiunilor pieselor active. Se poate uşor constata că şi acestea au o influenţă asupra performanţelor transmisiei, ele putînd fi reprezentate prin raza bilelor R, raza circumferinţei torului r, şi conformitatea contactului bilă pe tor,

$$K_f = \frac{R}{R_1}.$$

6. VARIATOR DE PUTERE CONSTANTĂ

În vederea verificării rezultatelor teoretice s-a conceput, proiectat şi realizat un variator mecanic de turaţie de putere constantă (P=0,5 KW) reprezentat în figura 10.

Variatorul are ca elemente principale de transmitere a mişcării două discuri de intrare, unul tronconic la interior *1*, şi celălalt toroidal *2*, bilele *3*, amplasate într-un separator nerotitor *4*, şi discul de ieşire *5*, cu suprafaţa tronconică la interior.

Presiunea de contact dintre discuri şi corpurile de rulare este asigurată de un cuplaj cu apăsare automată tip elicoidal *a*, care dezvoltă o forţă axială proporţională cu momentul rezistent. Acest cuplaj asigură şi variaţia raportului de transmitere prin deplasarea axială a corpului *5*, obligînd bilele *3*, să se deplaseze radial.

Discul *5*, este adus în contact cu bilele *3*, cu ajutorul tijei filetate *6*, coaxială cu arborele de ieşire *7*, prevăzută cu pastilele *8*.

Forţa de pretensionare este asigurată de arcul disc *8*, ce este tensionat prin intermediul unui sistem de arbori concentrici *9* şi *10*.

Sprijinirea arborelui de intrare se face pe un lagăr format dintr-un rulment radial-axial *11*, şi radial *12*. Arborele de ieşire este sprijinit pe un lagăr asemănător format dintr-un rulment radial-axial *13* şi radial *14*.

Ungerea se realizează pentru încercări, prin recircularea uleiului folosind un sistem exterior clasic.

Descrierea pe larg a variatorului este realizată în [4].

7. STAND PENTRU TESTAT VARIATOARE

În vederea determinării capacităţii portante şi a gamei de reglaj a variatorului realizat s-a conceput, proiectat şi realizat un stand pentru testat variatoare reprezentat în figura 11.

Variatorul *1* este antrenat de la un motor electric asincron *2*, de care este legat printr-un cuplaj elastic *3*. Arborele de ieșire al variatorului este legat la arborele unui generator electric *4* (folosit drept frînă), cu ajutorul unui ambreiaj *5*.

Atît motorul electric *1*, cît și generatorul *4*, au carcasele sprijinite la batiu prin intermediul unor rulmenți, așa încît prin împiedicarea rotirii să poată măsura momentul de antrenare și momentul rezistent. De aseme-

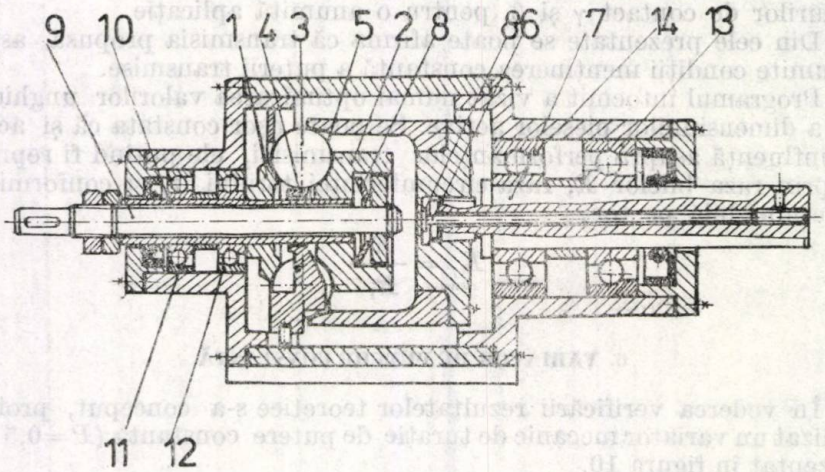


Fig. 10

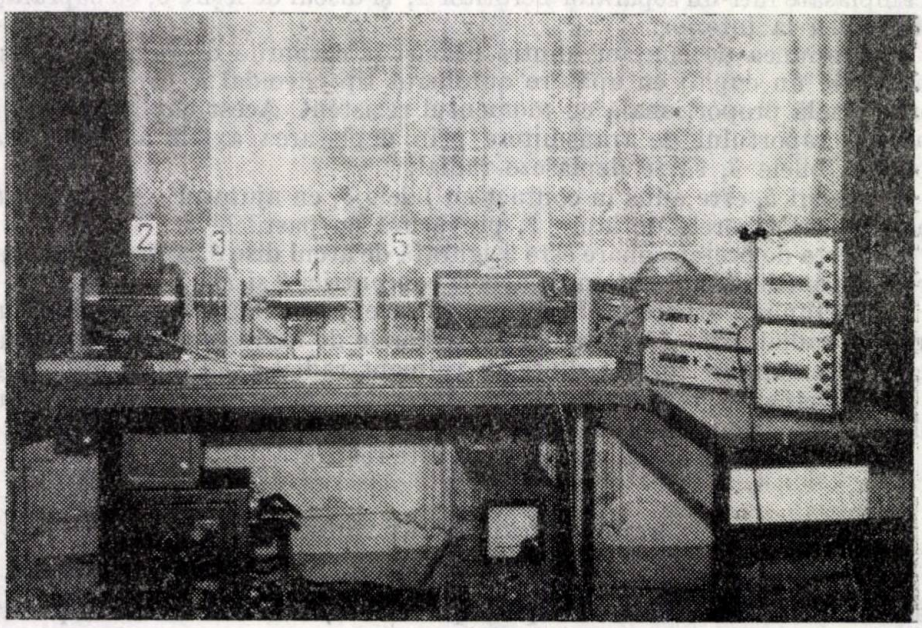


Fig 11

nea, turaţiile de intrare şi ieşire din variator se pot măsura cu ajutorul unor traductoare inductive de turaţie, conectate la cîte un frecvenţmetru.

Variind sarcina generatorului electric şi curentul de excitaţie se obţine o variaţie a momentului rezistent şi deci şi a raportului de transmitere al variatorului.

Standul permite măsurarea puterii de intrare şi a puterii de ieşire din variator pentru diverse condiţii de funcţionare.

8. REZULTATE EXPERIMENTALE. CONCLUZII

S-au efectuat încercări experimentale asupra variatorului prezentat, pe standul realizat. Au fost determinate valorile cuplului de antrenare şi ale cuplului rezistent, măsurînd turaţiile de intrare şi ieşire, după care, folosind relaţia $P = M\omega$ s-a determinat puterea de intrare şi ieşire din variator.

Rezultatele încercărilor sînt sintetizate în figura 12, care reprezintă variaţia puterii de ieşire şi a randamentului funcţie de cuplul rezistent.

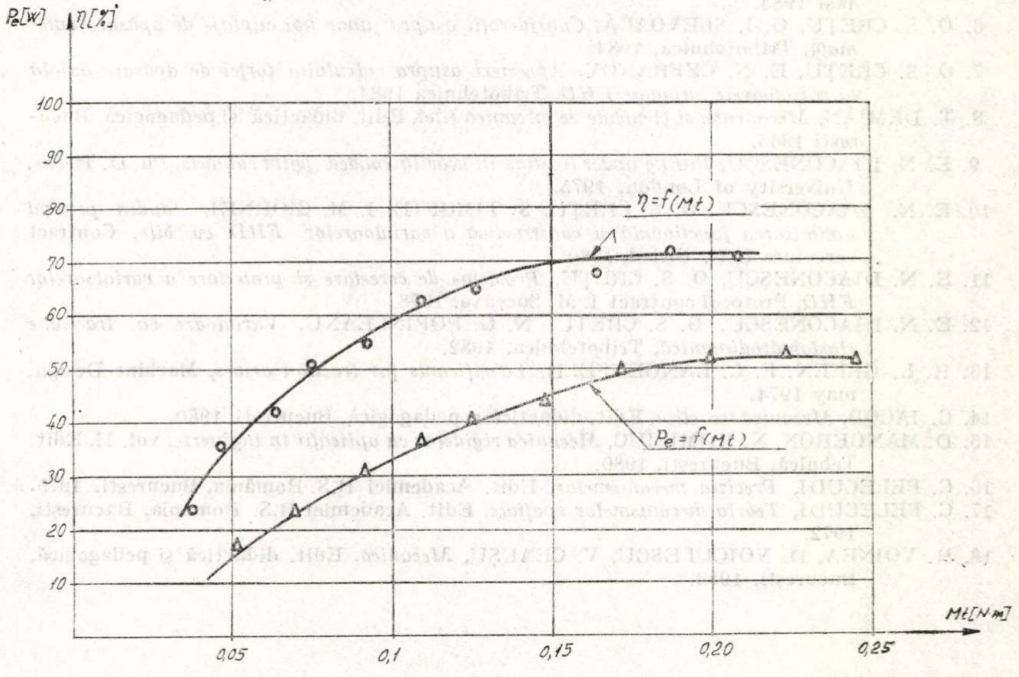


Fig. 12

Se observă că apare o variaţie a puterii de ieşire, pentru valori mici ale cuplului, fenomen ce poate fi explicat datorită pierderilor mari care apar în variator în timpul funcţionării acestuia ca multiplicator de turaţie. Aceste pierderi explică şi forma curbei randamentului.

Gama de reglaj realizată pe acest variator este de 2,47.

Rezultatele modeste obținute pe cale experimentală nu sînt de natură să descurajeze în perfecționarea acestui tip de transmisie deoarece se cunosc cauzele care le-au determinat.

În prezent se fac cercetări teoretice și experimentale menite să îmbunătățească substanțial performanțele transmisiei insistîndu-se în special la reducerea frecărilor din lagărul de sprijin al bilei intermediare.

Primit la redacție la 30 ianuarie 1986

BIBLIOGRAFIE

1. ȘT. BĂLAN, E. BEIU PALADI, [*Curs de mecanică teoretică*, Tipografia învățămîntului, vol. II, 1960.
2. R. W. CARSON, *New and better traction an here*, Machine Design, april 1974.
3. O. S. CREȚU, *Cercetări privina capacitatea portantă și durabilitatea variatoarelor cu role toroidale cu aplicații la mașini — unelte*, Teză de doctorat, I. P. Iași, 1982.
4. O. S. CREȚU, D. DUMITRESCU, GH. FRUNZĂ, G. DUMITRU, *Varaiator de putere constantă*, Brevet de invenție R.S.R. 86731.
5. O. S. CREȚU, D. GHEORGHIU, GH. FRUNZĂ, D. GRĂDINARU, *Variator de putere constantă*, Creația tehnică și fiabilitatea în construcția de mașini, ed. IV-a, Iași 1983.
6. O. S. CREȚU, G. I. SLEVOACĂ, *Considerații asupra unor noi cuplaje de apăsare automată*, Tribotehnica, 1984.
7. O. S. CREȚU, E. N. CEFRANOV, *Aprecieri asupra calculului forței de apăsare axială la variatoarele toroidale EHD*, Tribotehnica 1984.
8. T. DEMIAN, *Mecanisme și elemente de mecanică fină*, Edit. didactică și pedagogică, București 1965.
9. E. N. DIACONESCU, *Pitting under traction in heavily loaded point contacts*, Ph. D. Thesis, University of London, 1975.
10. E. N. DIACONESCU, O. S. CREȚU, S. TIMOFTE, I. M. CIORNEI, *Studiu privind optimizarea funcțională și constructivă a variatoarelor EHD cu bile*, Contract cercetare I. R. Bîrlad, 1980.
11. E. N. DIACONESCU, O. S. CREȚU, *Probleme de cercetare și proiectare a variatoarelor EHD*, Protocol contract I. M. Suceava, 1978.
12. E. N. DIACONESCU, O. S. CREȚU, N. G. POPINCEANU, *Variatoare cu tracțiune elastohidrodinamică*, Tribotehnica, 1982.
13. R. L. GREEN, F. L. LANGENFELD, *Lubrificants for traction drives*, Machine Design, may 1974.
14. C. IACOB, *Mecanică teoretică*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1980.
15. D. MANGERON, N. IRIMICIUC, *Mecanica rigidelor cu aplicații în inginerie*, vol. II, Edit. Tehnică, București, 1980.
16. C. PELECUDI, *Precizia mecanismelor*, Edit. Academiei R.S. România, București, 1975.
17. C. PELECUDI, *Teoria mecanismelor spațiale*, Edit. Academiei R.S. România, București, 1972.
18. R. VOINEA, D. VOICULESCU, V. CEAUȘU, *Mecanică*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1983.

DETERMINAREA UNOR PARAMETRI HIDRAULICI, CINEMATICI ŞI DINAMICI LA POMPELE (MOTOARELE) HIDRAULICE CU PERFORMANŢE RIDICATE

de A. OPREAN şi D. PRODAN

Institutul Politehnic din Bucureşti

Lucrarea prezintă o metodă de calcul generalizată, valabilă pentru orice tip de maşină hidraulică cu piston, care permite determinarea principalilor parametri hidraulici, cinematici şi dinamici, precum şi legea ce defineşte traiectoria de mişcare a pistoanelor, în vederea realizării unor debite şi momente constante, deci cu performanţe superioare.

NOTAŢII GENERALE FOLOSITE

φ — coordonată unghiulară ce defineşte legea de variaţie în planul xoy; rad,

β — coordonată unghiulară ce defineşte legea de variaţie (unghiul razei vectoare cu axa oz); rad,

ρ — raza vectoare a legii de variaţie; m,

α — unghiul de înclinare al direcţiei tijei pistonului i faţă de axa oy în planul yoz; rad,

d — direcţia tijei pistonului;

K — camă;

S — aria secţiunii pistonului; m^2,

d — diametrul pistonului; m,

ω — viteza unghiulară de rotire a camei (pe direcţia oz); rad/s,

V_i — viteza pistonului i; m/s,

Q_i — debitul teoretic al pistonului i; m^3/s,

Q_{iR} — debitul real pentru pistonul i; m^3/s,

a_1 — gradientul pierderilor statice de debit (linearizat); $m^3/\frac{N}{m^2}$,

p — presiunea; N/m^2,

V_{OM} — volumul mediu mort din spatele pistonului i; m^3,

V_{x_i} — volumul instantaneu din spatele pistonului i; m^3,

E — modulul de elasticitate al fluidului; N/m^2,

F — forţa datorată presiunii lichidului pe pistonul i; N,

F_y, F_z — componentele lui F; N,

M_i — momentul teoretic dat de pistonul i; Nm,

M_T — momentul teoretic total; Nm,

M_{TR} — momentul real total; Nm,

J — momentul de inerţie al elementelor aflate în rotaţie; Nms^2,

b_m — gradientul pierderilor de cuplu (linearizat); Nm/rad/s,

p_0 — presiunea la ieşirea din motor; N/m^2,

V_m — capacitatea teoretică medie a motorului; m^3,

P — puterea absorbită; W,

Z_p — numărul de lobi la cama K;

Z_B — numărul de pistoane.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 46, NR. 2, 1987, P. 163—173

1. CALCULUL DEBITULUI INSTANTANEU ȘI TOTAL LA POMPE CU PISTOANE CU ACȚIUNE MULTIPLĂ

În ultimii ani a crescut ponderea mașinilor hidraulice (pompe și motoare) cu acțiune multiplă (sau polilobate), acestea avînd o serie de avantaje tehnico-economice ca : masă redusă pe unitatea de putere, o bună stabilitate a mișcării la turații joase, randament total ridicat etc.

Pentru determinarea debitului instantaneu se consideră o pompă cu Z_B pistoane, acționată de o camă K, a cărei suprafață activă este profilată după o anumită lege $\rho(\varphi, \beta)$ (fig. 1).

Legea $\rho(\varphi, \beta)$, din considerente de funcționare și tehnologice, trebuie să fie periodică $\left(\text{de perioadă } \frac{2\pi}{Z_p}\right)$, continuă, derivabilă cu derivata I continuă.

În figura 1 s-a notat cu D distribuitorul selector, care poate fi rotitor sau fix.

În lucrare s-a considerat cazul cu pistoanele montate în stator, fiind cazul cel mai avantajos, datorită maselor mici aflate în rotație și a unei tehnologii mai simple de execuție.

Pentru a facilita exprimarea soluțiilor matemaitce, se consideră cazul pistonului i aflat în zona de refulare chiar în planul yoz (fig. 2), iar tija pistonului formînd cu axa oy unghiul α = constant.

Prin rotirea camei K din poziția 1 în poziția 2, pistonul se deplasează cu cantitatea $\mathrm{d}\rho$.

Vectorial se poate scrie :

$$\overline{\rho}_1 + \Delta\overline{\rho} = \overline{\rho}_2. \tag{1}$$

Dacă rotirea se execută pe unghiul $\mathrm{d}\varphi \to 0$ se poate scrie :

$$Q_i = SV_i = \frac{\pi \mathrm{d}^2}{4} \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi d^2}{4} \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi} \omega. \tag{2}$$

În relația (2) se consideră variația lui ρ, $(\mathrm{d}\rho)$ pe direcția d a pistonului.

Debitul real, în regim dinamic pentru pistonul i, se poate exprima cu relația [2] :

$$Q_{iR} = \frac{\pi d^2}{4} \omega \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi} - a_1 p - \frac{V_{OM}}{E} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}. \tag{3}$$

Dacă din Z_B pistoane refulează Z, rezultă că

$$Q_{TR} = \frac{\pi d^2}{4} \omega \sum_1^z \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \frac{1}{E} \sum_1^z V_x - Z a_1 p - \frac{ZV_0}{E} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}. \tag{4}$$

Însumarea se face condiționată de $\mathrm{d}\rho > 0$ pe direcția d (pistonul refulează).

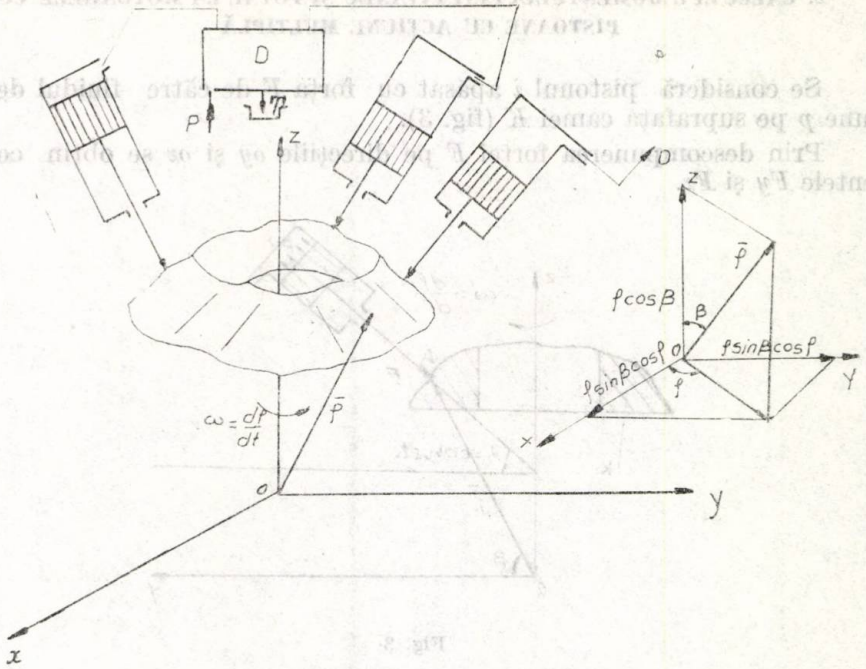

D
P
z
D
z
$\bar{p}$
$p\cos\beta$
β
$p\sin\beta\cos\beta$
$p\sin\beta\cos\beta$
o
β
Y
x
$\omega = \frac{d\beta}{dt}$
$\bar{p}$
o
y
x

Fig. 1

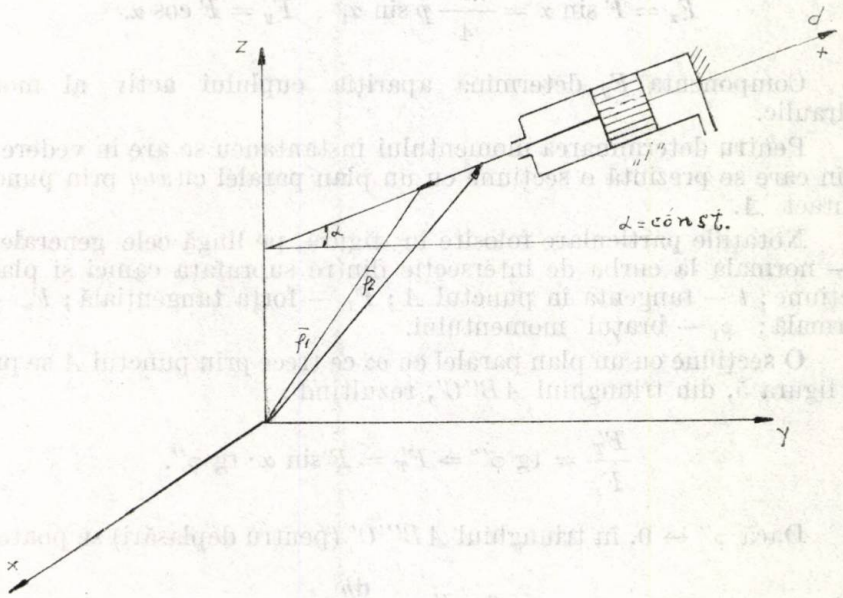

d
z
"i"
α = const.
α
$\bar{p}_2$
$\bar{p}_1$
y
x

Fig. 2

2. CALCULUL MOMENTULUI INSTANTANEU ŞI TOTAL LA MOTOARELE CU PISTOANE CU ACŢIUNE MULTIPLĂ

Se consideră pistonul i apăsat cu forţa F de către fluidul de presiune p pe suprafaţa camei K (fig. 3).

Prin descompunerea forţei F pe direcţiile oy şi oz se obţin componentele Fy şi Fz.

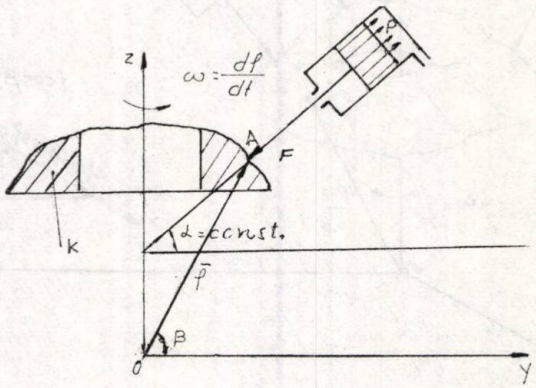


Fig. 3

Componenta Fz este anulată de reacţiunile din lagărele camei. Acestea au expresia :

$$F_z = F \sin \alpha = \frac{\pi d^2}{4} p \sin \alpha, \qquad F_y = F \cos \alpha. \tag{5}$$

Componenta F_y determină apariţia cuplului activ al motorului hidraulic.

Pentru determinarea momentului instantaneu se are în vedere figura 4, în care se prezintă o secţiune cu un plan paralel cu xoy prin punctul de contact A.

Notaţiile particulare folosite în figură, pe lîngă cele generale, sînt : n — normala la curba de intersecţie dintre suprafaţa camei şi planul de secţiune ; t — tangenta în punctul A ; F_T — forţa tangenţială ; F_n — forţa normală ; ρ_1 — braţul momentului.

O secţiune cu un plan paralel cu oz ce trece prin punctul A se prezintă în figura 5, din triunghiul $AB''C'$, rezultînd :

$$\frac{F'_T}{F_z} = \operatorname{tg} \varphi'' \Rightarrow F'_T = F \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi''. \tag{6}$$

Dacă $\varphi'' \to 0$, în triunghiul $AB'''C'$ (pentru deplasări) se poate scrie :

$$\operatorname{tg} \varphi'' = \frac{\mathrm{d}h}{\rho_1 \mathrm{d}\varphi}. \tag{7}$$

În relația (7) s-a notat dh variația lui ρ pe direcția lui oz.
Momentul dat de pistonul i se obține sub forma:

$$\bar{M}_i = \bar{\rho}_1 \times (\bar{F}_T + \bar{F}'_T). \tag{8}$$

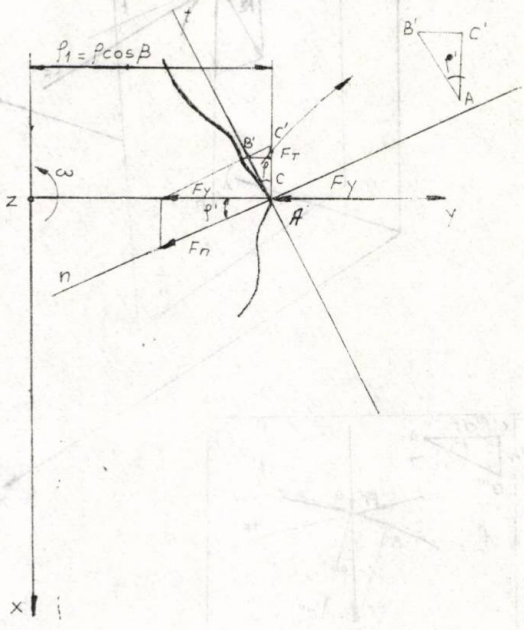


Fig. 4

Făcîndu-se înlocuirile în (8) se obține:

$$M_i = \frac{\pi d^2}{4} p \left(\cos\alpha \frac{\mathrm{d}\rho_1}{\mathrm{d}\varphi} + \sin\alpha \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\varphi} \right). \tag{9}$$

Interdependența geometrică dintre $d\rho_1$, dh, dρ este prezentată în figura 6. Relațiile ce definesc această interdependență sînt:

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}\rho_1}{\mathrm{d}\varphi}, \quad \sin\alpha = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\varphi}. \tag{10}$$

Înlocuindu-se expresiile lui dρ_1 și dh în relația (9) se obține:

$$M_i = \frac{\pi d^2}{4} p \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}. \tag{11}$$

Momentul total teoretic se obține cu relația:

$$M_T = \frac{\pi d^2}{4} p \sum_1^z \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}. \tag{12}$$

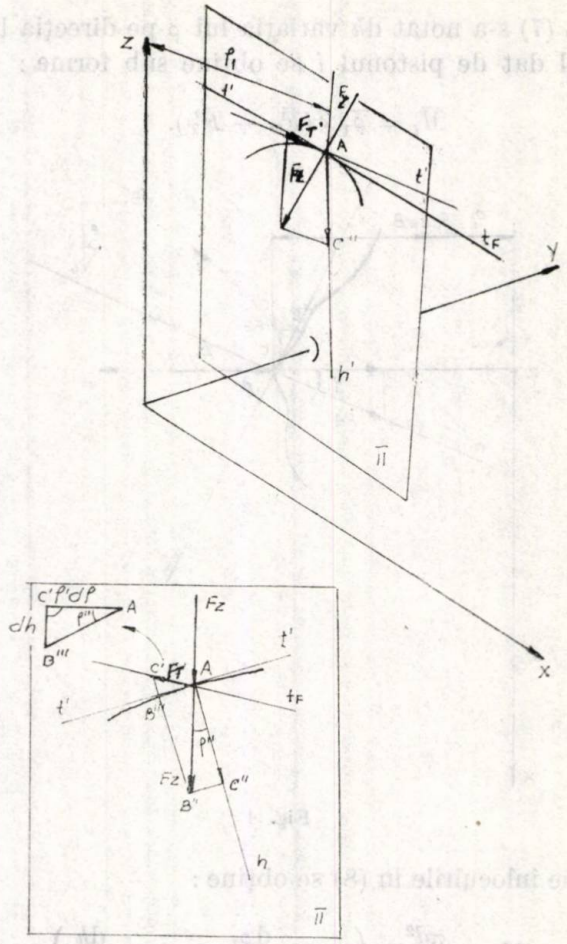

Z
ρ_1
t'
F_T'
A
F_Z
t'
t_F
C''
Y
h'
II
X
C'ρ'dρ
dh
A
ρ'''
B'''
F_Z
t'
C'
F_T'
A
t_F
t'
B'''
ρ''
F_Z
C''
B''
h
II

Fig. 5

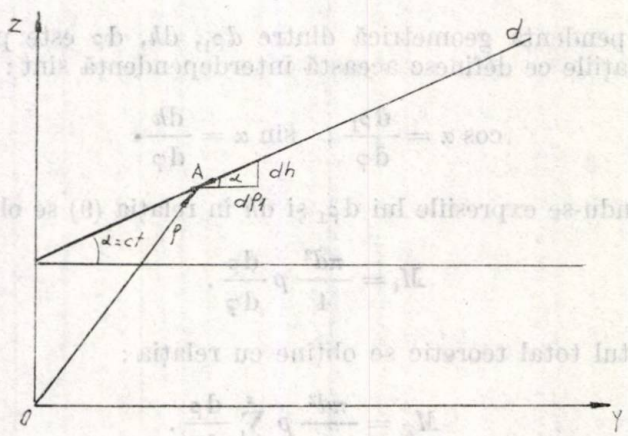

Z
d
A
α
dh
$d\rho_1$
α=ct
ρ
O
Y

Fig. 6

În relația (12) se însumează numai termenii $\frac{d\rho}{d\varphi}$ ce îndeplinesc condiția $\frac{d\rho}{d\varphi} < 0$ pe direcția d.

Momentul total real în regim dinamic are expresia [2]

$$M_{TR} = M_T - J\frac{d\omega}{dt} - b_m\omega - \frac{\omega}{|\bar{\omega}|} c_{fu} \frac{V_M}{2\pi}(p - p_0). \tag{13}$$

3. CALCULUL DEBITELOR ȘI MOMENTELOR INSTANTANEE PENTRU POMPELE (MOTOARELE) CU ACȚIUNE MULTIPLĂ CU PISTOANE RADIALE SAU AXIALE

Aceste două cazuri reprezintă particularizări ale cazului general studiat anterior. Astfel, pentru mașinile cu pistoane radiale $\alpha = 0$, deci, dacă se consideră cama K în planul xoy ca în figura 7, debitul instantaneu este de forma:

$$Q_i = \frac{\pi d^2}{4}\frac{d\rho}{d\varphi}\omega. \tag{14}$$

În acest caz, $\rho(\varphi)$ este funcția ce descrie cama K în planul xoy, (Dependența $\rho(\varphi)$ este în coordonate polare).

De asemenea, pentru momentul instantaneu se obține:

$$M_i = \frac{\pi d^2}{4} p \frac{d\rho}{d\varphi}. \tag{15}$$

Pentru pompele și motoarele cu pistoane axiale, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, iar după înlocuiri se obține

$$Q_i = \frac{\pi d^2}{4}\cdot\frac{d\rho}{d\varphi}\omega = \frac{\pi d^2}{4}\frac{dh}{d\varphi}\omega. \tag{16}$$

În acest caz interesează numai funcția $h(\varphi)$, după cum se poate vedea în figura 8.

Pentru determinarea momentului instantaneu se are în vedere relația (11) din care rezultă:

$$M_i = \frac{\pi d^2}{4} p \frac{dh}{d\varphi}. \tag{17}$$

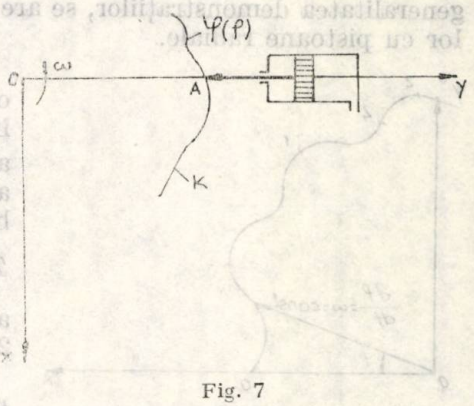


Fig. 7

În ambele cazuri obținerea unor debite, respectiv momente constante, este dificilă, avînd în vedere multitudinea de factori ce influențează aceste mașini. Realizarea unor astfel de mașini, cu caracteristici ridicate (din punct de vedere al pulsațiilor de debit sau moment) este posibilă.

Proiectantul poate acționa, cu rezultate bune, asupra funcției ce descrie cama K, în așa fel încît, în orice poziție a acesteia, sumele de forma

$$S_1 = \sum_1^z \frac{d\rho}{d\varphi} \text{ și } S_2 = \sum_1^z \frac{dh}{d\varphi}$$ să fie constante.

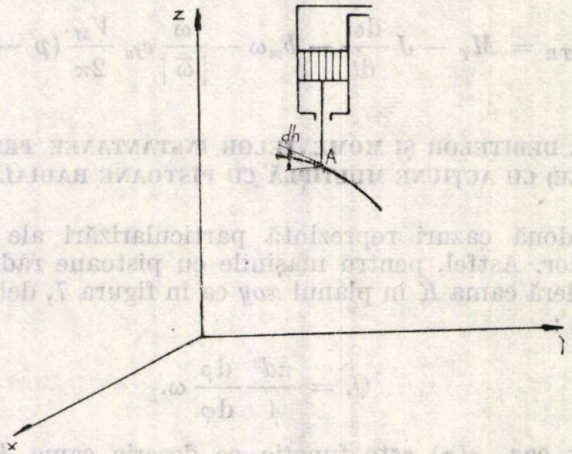


Fig. 8

4. DETERMINAREA UNEI FUNCȚII DE PROFILARE A CAMEI K CE ASIGURĂ DEBIT ȘI MOMENT TEORETIC CONSTANTE

În unele lucrări de specialitate se recomandă diferite forme pentru $\rho(\varphi)$. Pe baza cercetărilor proprii ale autorilor s-a demonstrat că Z_B trebuie să fie multiplu de 4, numărul de lobi Z_p multiplu de 3, iar $Z_B > Z_p$ [6].

Pentru a ușura calculul matematic, fără ca aceasta să restrîngă generalitatea demonstrațiilor, se are în vedere în continuare cazul mașinilor cu pistoane radiale.

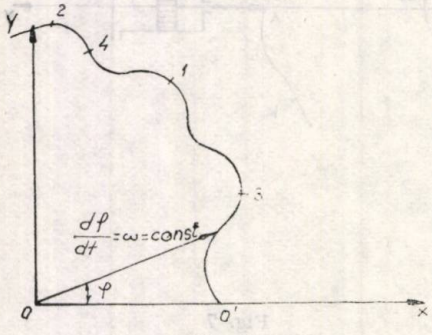


Fig. 9

Se consideră funcția $\rho(\varphi)$, în coordonate polare (figura 9) determinată în următoarele condiții:

a) ω = const — turația motorului de antrenare a pompei este constantă; b) profilul este periodic, de perioada $T = \frac{2\pi}{Z_p}$; c) între O' și 1 se face aspirația (pe unghiul φ_1); d) între 1 și 2 se face refularea (pe unghiul φ_2).

Dacă între O' și 2 se face o aspirație și o refulare se poate scrie:

$$\rho_{(0)} = \rho_{(2)} = A = \text{const.} \tag{18}$$

$\rho_{(1)} = A + h$; h-supraînălțarea.

În momentul în care pistonul ajunge în punctul *1* își schimbă viteza relativă, ca sens, deci în punctul *1* viteza este nulă:

$$\left.\frac{d\rho}{dt}\right|_{(1)} = 0. \tag{19}$$

Din aceleași considerente și în punctul *2* se poate scrie:

$$\left.\frac{d\rho}{dt}\right|_{(2)} = 0. \tag{20}$$

Între *0'* și *1* există un punct în care viteza este maximă, de exemplu, punctul *3*. De asemenea, între *1* și *2* există punctul *4* în care viteza este maximă și de sens contrar celei din punctul *3*. Deci se poate scrie:

$$\left.\frac{d^2\rho}{dt^2}\right|_{(3)} = 0, \qquad \left.\frac{d^2\rho}{dt^2}\right|_{(4)} = 0. \tag{21}$$

De la *0'* la *2* viteza este crescătoare $\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} > 0$; de la *2* la *1* viteza este descrescătoare $\left(\frac{d^2\rho}{dt^2} < 0\right)$; de la *1* la *4* viteza este descrescătoare $\left(\frac{d^2\rho}{dt^2} < 0\right)$, iar de la *4* la *2* viteza este crescătoare $\left(\frac{d^2\rho}{dt^2} > 0\right)$.

Deoarece se presupune $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \text{constant}$, se poate scrie:

$$\frac{d\rho}{dt} = \omega \frac{d\rho}{d\varphi} \text{ și } \frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\omega\right) = \omega^2 \frac{d^2\rho}{d\varphi^2}. \tag{22}$$

Recapitulînd, se poate spune despre curba $\rho(\varphi)$, care unește punctele *0'* și *2*, că verifică condițiile de mai sus și deasemenea: a) este continuă, b) trece prin punctele 0, *3*, *1*, *4* și *2*, c) este derivabilă, d) derivata este continuă, e) $\max \rho(\varphi) = A + h$, f) $\min \rho(\varphi) = A$.

Notînd unghiurile $\widehat{0'03} = \beta/2$, $\widehat{301} = \alpha/2$ și $\widehat{104} = \alpha/2$ și $\widehat{402} = \beta/2$, rezultă dispunerea simetrică a curbei *0'3142* față de *01*, iar $\alpha + \beta = \frac{2\pi}{Z_p} = T$ (*T* fiind perioada).

În urma integrărilor succesive și ținînd cont de condițiile de mai sus, se obțin ecuațiile ce descriu curba $\rho(\varphi)$ funcție de coeficienții determinați din condițiile inițiale de integrare.

Funcția $\rho(\varphi)$ are în final forma:

$$\rho = \begin{cases} \text{de la } 0' \text{ la } 3 \\ \dfrac{8h}{\alpha+\beta}\dfrac{\varphi^2}{2} + A \qquad \varphi \in [0,\ \beta/2), \\ \text{de la } 3 \text{ la } 1 \\ -\dfrac{8h}{\alpha+\beta}\dfrac{\varphi^2}{2} + \dfrac{4h}{\alpha} + \dfrac{\alpha A - h\beta}{\alpha} \qquad \alpha \in [\beta/2,\ \beta + \alpha/2) \end{cases} \tag{23}$$

Pentru $\varphi \in [\beta + \alpha/2, 2\pi)$ se ține cont de periodicitatea funcției $\rho(\varphi)$.

5. CONCLUZII

Metoda de calcul propusă permite determinarea cu ușurință a principalilor parametri hidraulici și mecanici ai oricărei mașini hidraulice cu piston prin simple particularizări ale cazului general cu pistonul i oarecare în spațiu.

În orice moment expresiile pQ_i și $M_i\omega$ sînt egale conform legii conservării energiei; într-adevăr:

$$pQ_i = p\,\frac{\pi d^2}{4}\,\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}\,\omega = \frac{\pi d^2}{4}\,p\,\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}\,\omega = M_i\omega.$$

Nu este posibilă obținerea unor mașini hidraulice cu piston cu pulsații de debit și moment reale nule (în regim dinamic), dar este posibil a se realiza astfel de mașini cu debite și momente teoretice constante, ceea ce ameliorează substanțial performanțele acestora atît în regim staționar cît și dinamic.

Alegîndu-se convenabil numărul de pistoane și de lobi la mașinile hidraulice cu acțiune multiplă se pot obține sume de forma $S = \sum_1^z \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi} =$ = constante.

Încercările de laborator pe modele reale realizate de autori, confirmă valabilitatea teoriei expuse precum și posibilitățile tehnologice de execuție a camelor profilate după funcția $\rho(\varphi)$. În figura 10 se prezintă un motor

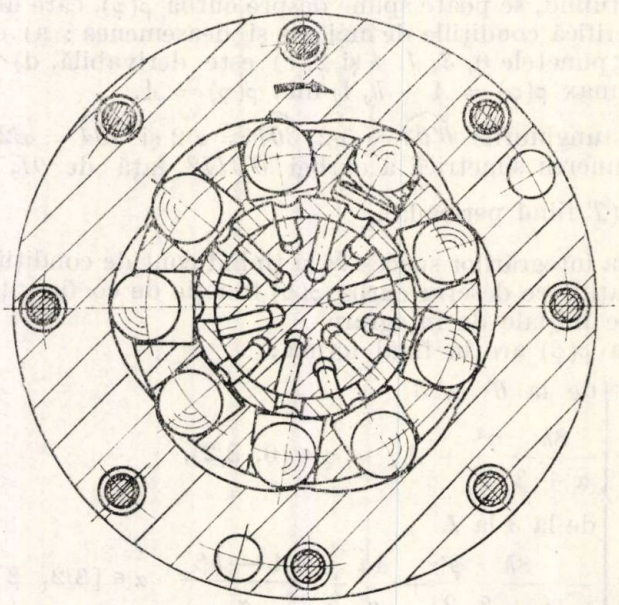


Fig. 10

cu pistoane radiale montate în rotor, iar în figura 11 o pompă cu pistoane radiale montate în stator. Ambele au fost executate de către autori în cadrul Catedrei Mașini-Unelte și Scule din Institutul Politehnic București.

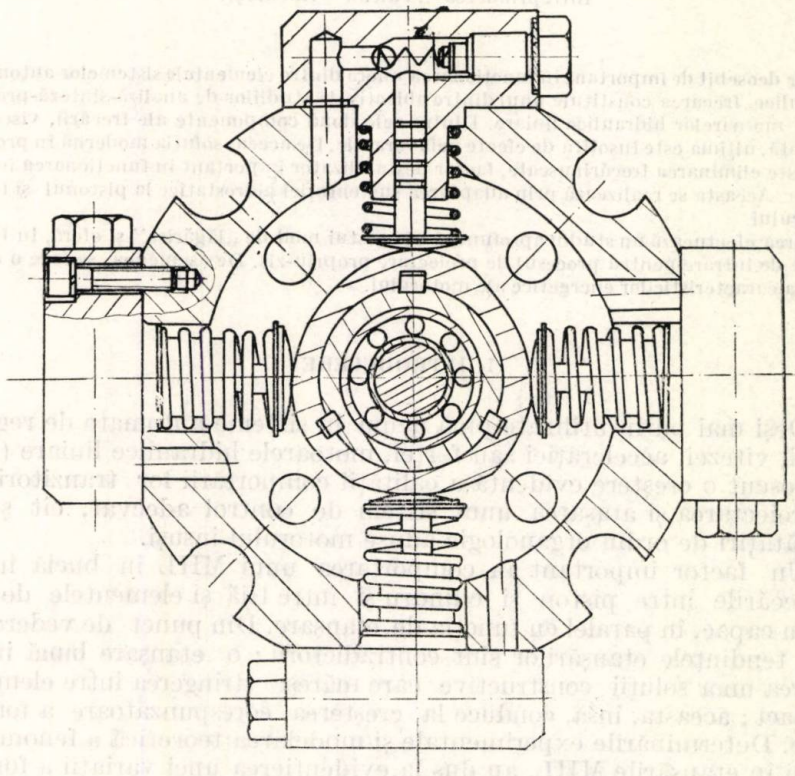


Fig. 11

Primit la redacție la 17 iulie 1985

BIBLIOGRAFIE

1. A. OPREAN, *Hidraulica mașinilor-unelte*, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1983.
2. A. OPREAN, F. IONESCU, A. DORIN, *Acționări hidraulice. Elemente și sisteme*, Edit. Tehnică, București, 1982.
3. JULIETA FLOREA, N. VASILIU, *Acționări și comenzi hidropneumatice*, I.P.B., 1984.
4. G. BARBU, Contribuții la studiul pompelor și motoarelor hidrostatice cu pulsații reduse, Teză de doctorat, I.P.B., 1983.
5. M. ATANASIU, *Mecanica*, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1973.
6. A. OPREAN, D. PRODAN, *Cercetări privind realizarea unor generatoare (motoare) hidraulice cu pistoane radiale polilobare cu pulsații reduse*, A V-a Conferință Națională de Mașini-Unelte, I.P.B., 1984.

MOTOARE HIDRAULICE LINIARE CU SUSTENTAȚIE HIDROSTATICĂ. ANALIZA, SINTEZA ȘI PROIECTAREA

de FL. IONESCU și M. IOSIP
Institutul Politehnic din București
Întreprinderea „Vulcan" București

Factor deosebit de important în funcționarea unora dintre elementele sistemelor automate hidraulice, frecarea constituie unul dintre obiectivele studiilor de analiză-sinteză-proiectare a motoarelor hidraulice liniare. Dintre cele două componente ale frecării, vîscoasă și uscată, ultima este însoțită de efecte nefavorabile. De aceea, soluția modernă în proiectare este eliminarea frecării uscate, factor destabilizator important în funcționarea instalațiilor. Aceasta se realizează prin adaptarea sustentației hidrostatice la pistonul și tijele motorului.
Lucrarea efectuează un studiu aprofundat al acestui mod de „lăgărire" și oferă, în final, datele de intrare pentru procesul de proiectare propriu-zis. De asemenea, se face o estimare a caracteristicilor energetice ale motorului.

1. INTRODUCERE

Deși mai puțin utilizate pînă acum în sisteme automate de reglare a poziției, vitezei, accelerației sau forței, motoarele hidraulice liniare (MHL) au cunoscut o creștere evidentă a calității comportării lor tranzitorii, atît prin proiectarea și atașarea unui sistem de control adecvat, cît și prin îmbunătățiri de ordin organologic aduse motorului însuși.

Un factor important în comportarea unui MHL în buclă închisă, sînt frecările între piston și cilindru și între tijă și elementele de etanșare din capac, în paralel cu funcția de etanșare. Din punct de vedere funcțional, tendințele etanșărilor sînt contradictorii : o etanșare bună implică utilizarea unor soluții constructive care măresc strîngerea între elementele în contact ; aceasta, însă, conduce la creșterea corespunzătoare a forței de frecare. Determinările experimentale și modelarea teoretică a fenomenului frecării în etanșările MHL, au dus la evidențierea unei variații a forței de frecare cu viteza, așa cum este prezentată în figura 1*a*. Se observă că, la viteze mici sau foarte mici, apare un gradient negativ al pierderilor prin frecare, iar în origine se produce salt. Se constată, de asemenea, o variație de tip hysterezis față de semnul vitezei, adică forța de frecare este mai mică în cazul reducerii vitezei decît în cazul creșterii acesteia.

Dat fiind faptul că viteza critică (la care forța de frecare este minimă) este foarte mică, în practică se consideră o aproximare a acestei variații, prin două componente, ca în figura 1*b*, și anume : forța de frecare uscată, independentă de viteză, rezultată din legea frecării uscate, a lui Coulomb și forța de frecare vîscoasă, proporțională cu viteza, conform legii lui Newton, de curgere a unui fluid vîscos. Expresiile analitice ale acestor legi sînt :

$$F_{fu} = (\text{sign}\ (\dot{x}))\ KF_{act} + F_{fo}, \tag{1}$$

$$F_{fv} = \tau \cdot S = -\mu \frac{dv}{dr} S = c_{fv}(\text{sign}\ (\dot{x}))\ \dot{x}, \tag{2}$$

în care F_{fu} [N] este forţa de frecare uscată; F_{act} [N] — forţa de acţionare a MHL; K [—] — factor de proporţionalitate; F_{fo} [N] — forţa de frecare uscată în absenţa sarcinii; F_{fv} [N] — forţa de frecare vîscoasă;

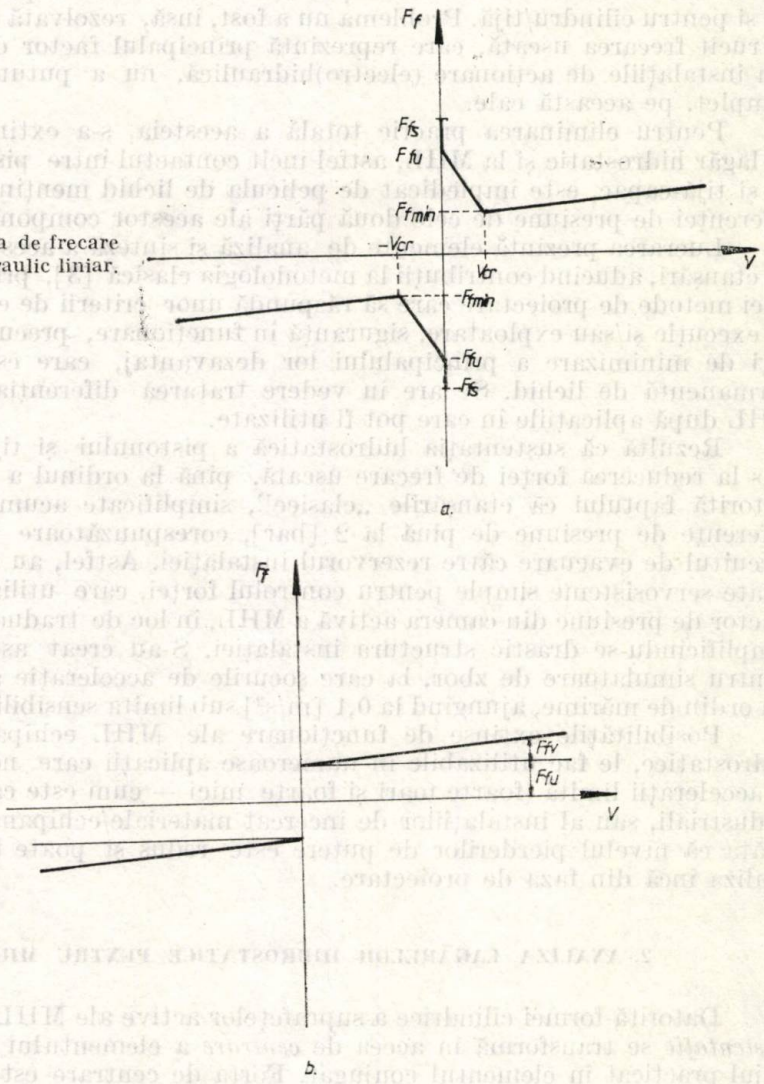


Fig. 1. — Forţa de frecare în motorul hidraulic liniar.

μ [Ns/m^2] — coeficientul de vîscozitate dinamică a mediului hidraulic; v, $\dot{x}$ [m/s] — viteza organului mobil al MHL; c_{fv} (sign $(\dot{x})$)[N/(m/s)] — coeficientul de frecare vîscoasă, variabil funcţie de semnul vitezei $\dot{x}$.

Dacă, pînă la anumite valori, pentru mărirea stabilităţii sistemului automat, creşterea componentei vîscoase a forţei de frecare este de dorit, întrucît reprezintă componenta principală a amortizării, forţa de frecare uscată trebuie redusă la minimum posibil.

În construcțiile clasice de MHL, s-a obținut reducerea frecării printr-o finisare deosebită a suprafețelor în contact și prin utilizarea unor cupluri de materiale pentru elementele de etanșare (PTFE-teflon, care are un coeficient de frecare redus și relativ constant în raport cu viteza), cît și pentru cilindru/tijă. Problema nu a fost, însă, rezolvată decît parțial, întrucît frecarea uscată, care reprezintă principalul factor destabilizator din instalațiile de acționare (electro)hidraulică, nu a putut fi eliminată complet, pe această cale.

Pentru eliminarea practic totală a acesteia, s-a extins conceptul de lagăr hidrostatic și la MHL, astfel încît contactul între piston-cilindru, ca și tijă-capac, este împiedicat de pelicula de lichid menținută datorită diferenței de presiune de cele două părți ale acestor componente.

Lucrarea prezintă elemente de analiză și sinteză a acestor tipuri noi de etanșări, aducînd contribuții la metodologia clasică [3], prin analizarea unei metode de proiectare care să răspundă unor criterii de economicitate în execuție și/sau exploatare, siguranță în funcționare, precum și posibilități de minimizare a principalului lor dezavantaj, care este scurgerea permanentă de lichid. Se are în vedere tratarea diferențiată a acestor MHL după aplicațiile în care pot fi utilizate.

Rezultă că sustentația hidrostatică a pistonului și tijelor MHL a dus la reducerea forței de frecare uscată, pînă la ordinul a cîtorva [N], datorită faptului că etanșările „clasice", simplificate acum, lucrează la diferențe de presiune de pînă la 2 [bar], corespunzătoare presiunii din circuitul de evacuare către rezervorul instalației. Astfel, au putut fi realizate servosisteme simple pentru controlul forței, care utilizează un traductor de presiune din camera activă a MHL, în loc de traductor de forță, simplificîndu-se drastic structura instalației. S-au creat astfel de MHL pentru simulatoare de zbor, la care șocurile de accelerație au scăzut cu un ordin de mărime, ajungînd la 0,1 [m/s^2] sub limita sensibilității umane.

Posibilitățile extinse de funcționare ale MHL echipate cu lagăre hidrostatice, le fac utilizabile în numeroase aplicații care necesită viteze și accelerații limită (foarte mari și foarte mici — cum este cazul roboților industriali, sau al instalațiilor de încercat materiale/echipamente). Se va arăta că nivelul pierderilor de putere este redus și poate fi impus a se realiza încă din faza de proiectare.

2. ANALIZA LAGĂRELOR HIDROSTATICE PENTRU MHL

Datorită formei cilindrice a suprafețelor active ale MHL, noțiunea de *sustentație* se transformă în aceea de *centrare* a elementului mobil în alezajul practicat în elementul conjugat. Forța de centrare este creată de o pană de fluid, iar aceasta este realizată prin conjugarea coaxială a unui cilindru cu un con.

2.1. ANALIZA LAGĂRULUI SIMPLU CONIC

Elementul funcțional al unui lagăr hidrostatic este cuplul de suprafețe con-cilindru, care se numește *lagăr simplu conic*. În figura 2 sînt prezentate dimensiunile și mărimile caracteristice ale acestui lagăr.

Lagărul simplu conic este considerat drept element structural de bază întrucît, prin combinarea mai multor asemenea lagăre, se obțin diferite construcții de MHL cu sustentație hidrostatică, ca în figura 3.

Analiza lagărului simplu conic pornește de la ecuația Reynolds, pentru un model de curgere bidimensional, în interstițiul con-cilindru. Se scrie:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{12}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{v\cdot h}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h^3}{12}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}\right)=0, \tag{3}$$

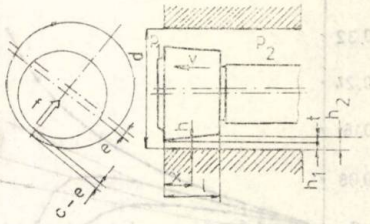


Fig. 2. — Lagăr hidrostatic simplu-conic.

în care coordonatele x și y sînt în direcțiile axială și, respectiv, tangențială; h [m] este grosimea penei de fluid (interstițiul con-cilindru) la distanța x de capătul îngustat; v[m/s] este viteza elementului mobil; p [N/m^2] este presiunea în interstițiu.

Date fiind grosimea foarte mică, uzuală, a peliculei de lichid și diametrele relativ mici ale lagărelor hidrostatice utilizate la MHL, se poate considera drept satisfăcător un model de curgere unidimensional, în direcție axială. Cercetări experimentale și calcule teoretice [3] arată că această aproximare este acceptabilă în general și acoperitoare în domeniul uzual de dimensiuni ale MHL.

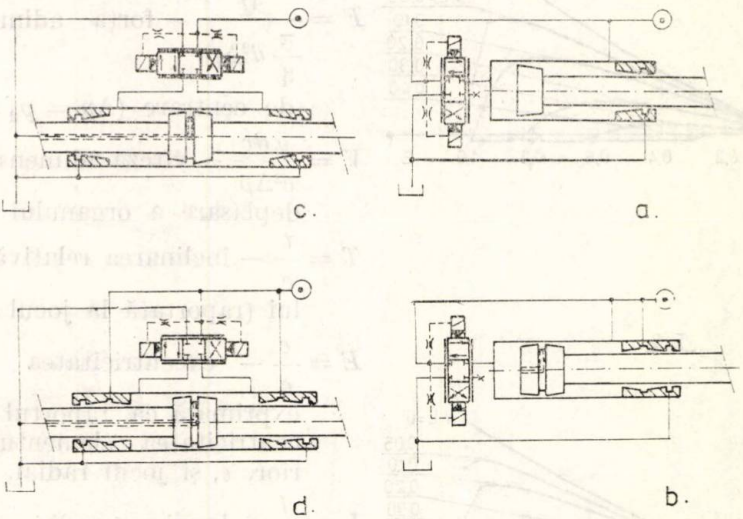


Fig. 3. — Posibilități de utilizare a lagărelor hidrostatice.

Notînd cu $h=h_1+t\cdot x/l$ (deci $h_2=h_1+t$) și introducînd în ecuația (3), ajustată pentru modelul unidimensional, se obține, prin integrare analitică, distribuția presiunii în direcție paralelă cu axa lagărului conic simplu:

$$p=p_1+\frac{\dfrac{1}{h^2}-\dfrac{1}{h_1^2}}{\dfrac{1}{h_2^2}-\dfrac{1}{h_1^2}}\Delta p+\frac{\left(\dfrac{1}{h}-\dfrac{1}{h_1}\right)\left(\dfrac{1}{h}-\dfrac{1}{h_2}\right)}{\dfrac{1}{h_1}+\dfrac{1}{h_2}}\cdot\frac{6\mu l v}{t}. \tag{4}$$

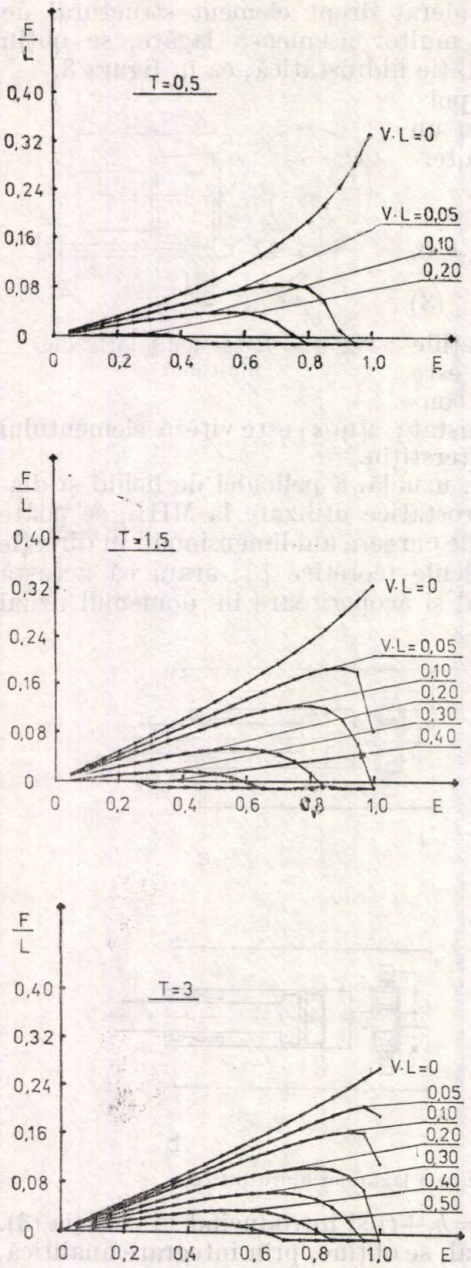


Fig. 4. — Caracteristica forță adimensională-excentricitate relativă.

Forța de centrare în lagăr rezultă din integrarea în direcțiile axială și tangențială, a expresiei presiunii:

$$f = \int_{h_1}^{h_2} \int_{0}^{2\pi} p \, dh \, d\varphi. \qquad (5)$$

Expresia adimensională a acestei mărimi este:

$$\frac{F}{L} = \frac{T}{E}\left[\frac{2+T}{\sqrt{(2+T)^2 - 4E^2}} - 1\right] - \frac{24VL}{TE}\left[\frac{\sqrt{(1+T^2)-E^2} - \sqrt{1-E^2}}{T} - \frac{(2+T)^2}{\sqrt{(2+T)^2 - 4E^2}}\right], \qquad (6)$$

în care au fost definite următoarele mărimi adimensionale:

$F = \dfrac{4f}{\dfrac{\pi}{4} d^2 \Delta p}$ — forța adimensională de centrare ($\Delta p = p_2 - p_1$);

$V = \dfrac{\mu \, dv}{c^2 \Delta p}$ — viteza adimensională de deplasare a organului mobil;

$T = \dfrac{t}{c}$ — înclinarea relativă a conului (raportată la jocul radial);

$E = \dfrac{e}{c}$ — excentricitatea relativă, exprimată ca raportul între excentricitatea elementului interior, e, și jocul radial, c;

$L = \dfrac{l}{d}$ — lungimea adimensională a lagărului simplu conic.

În figura 4 sînt prezentate caracteristicile forță adimensională-excentricitate relativă pentru cîteva valori ale lui T și ale produsului (VL) în domeniul utilizabil pentru proiectare. Se constată creșterea forței adimensionale de centrare odată cu creșterea excentricității lagărului și influența vitezei elementului mobil asupra acesteia; forța scade ușor odată cu creșterea

conicității, dar se reduce evident influența vitezei asupra sa. De remarcat că forța, exprimată adimensional, este proporțională cu lungimea adimensională, dacă se reduce influența vitezei.

Cu ajutorul relației debitului scurs prin interstițiul con-cilindru, scrisă în formă diferențială:

$$dq = \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} dy \tag{7}$$

și, folosind ecuația (4), se obține, prin integrare la x constant, ecuația debitului de scurgere de lichid. În formă adimensională, aceasta se scrie:

$$QL = \frac{2(1+T)^2}{2+T} + \frac{3}{4}(2+T)E^2 + \frac{T^4}{8(T+2)}\left[\frac{2+T}{\sqrt{(2+T)^2 - 4E^2}} - 1\right], \tag{8}$$

în care s-a mai notat cu $Q = \frac{12\mu q}{c^3 \Delta p}$ — debitul adimensional de scurgere; q — debitul de scurgere prin lagărul conic simplu.

În stabilirea ecuației adimensionale a debitului, s-a neglijat influența vitezei de deplasare a MHL, întrucît debitul scurs prin lagăr este de ordinul a cîtorva procente din debitul corespunzător mișcării motorului. Figura 5

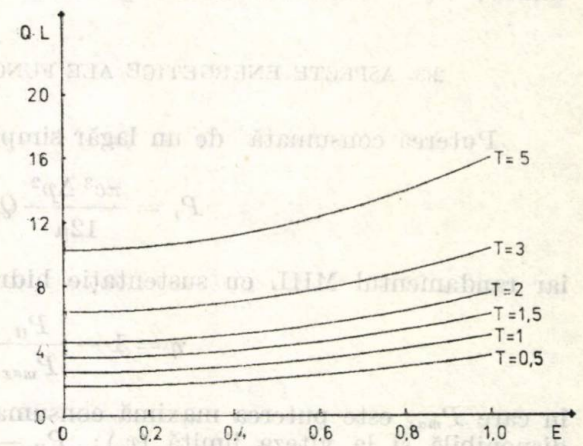


Fig. 5. — Caracteristica debit-excentricitate relativă.

prezintă caracteristica funcțională debit-adimensional-excentricitate relativă, care evidențiază dependența puternică a caracteristicii de înclinarea conului lagărului, exprimată prin $T = t/c$.

Din cele prezentate mai sus, se poate trage concluzia că lagărul simplu conic este foarte sensibil la viteză, pînă acolo încît forța radială schimbă de semn, fapt care conduce la descentrarea lagărului și la pierderea funcționalității sale.

Inconvenientul lagărului simplu conic se poate depăși prin utilizarea sa numai în aplicații cu viteze reduse.

2.2. ANALIZA LAGĂRULUI DUBLU CONIC

Pentru MHL rapide este necesară cuplarea a două lagăre simple identice, avînd conicităţile opuse, într-un nou tip de lagăr hidrostatic, numit lagăr dublu conic. Astfel, reducerea forţei de centrare, datorită vitezei, într-un semilagăr, este compensată de creşterea forţei în celălalt semilagăr. Se pune, evident, condiţia ca lagărele să fie riguros identice.

Cu toate că viteza axială nu mai influenţează direct funcţionarea lagărului, ea trebuie, totuşi să fie limitată pentru a se evita apariţia cavitaţiei. Apare, aşadar, o viteză limită, pentru care presiunea în interstiţiul con-cilindru nu se anulează. Aplicînd această condiţie în regiunea cu grosime minimă a interstiţiului, unde $h_1 = c - e$ şi $h_2 = c + t - e$, în ecuaţia (4), se obţine :

$$V_c L = \frac{(1-E)(1+T-E)^2}{3T}\left[1+\frac{2+T-2E}{1+T-E}\left(\frac{p_1}{\Delta p}+\sqrt{\frac{p_1}{\Delta p}\left(1+\frac{p_1}{\Delta p}\right)}\right)\right], \tag{9}$$

în care $V_c = \dfrac{\mu d v_c}{c^2 \Delta p}$ este viteza adimensională limită cu care se poate deplasa MHL, pentru a evita cavitaţia. În figura 6 este prezentată influenţa factorilor constructivi (T) şi funcţionali (E, $p_1/\Delta p$) asupra mărimii vitezei limită ; v_c — viteza limită de deplasare, de la care se produce cavitaţia.

2.3. ASPECTE ENERGETICE ALE FUNCŢIONĂRII LAGĂRULUI

Puterea consumată de un lagăr simplu conic este dată de relaţia :

$$P_1 = \frac{\pi c^3 \Delta p^2}{12\mu} Q, \tag{10}$$

iar randamentul MHL cu sustentaţie hidrostatică este

$$\eta = 1 - \frac{P_{lt}}{P_{max}}, \tag{11}$$

în care P_{max} este puterea maximă consumată de MHL, la forţa maximă disponibilă şi la viteza limită (v_c) ; P_{lt} — puterea consumată de toate lagărele MHL.

Înlocuind expresia debitului de scurgere, care dă puterea consumată de lagăr, şi expresia vitezei limită, care dă puterea maximă a motorului, se obţine :

$$\eta = 1 - \frac{4\pi cd}{3A_M p_s \Delta p}\frac{T}{T+4}\left(\frac{2(1+T)^2}{2+T}+\frac{3}{4}(2+T)E^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{T^4}{8(2+T)}\left(\frac{2+T}{\sqrt{(2+T)^2-4E^2}}-1\right)\right)\Sigma\Delta p_i. \tag{12}$$

De obicei, viteza maximă impusă motorului este mai mică decît viteza limită, ceea ce face ca expresia randamentului să aibă forma debitului de scurgere, dar simetrică față de o dreaptă paralelă cu axa absciselor. Rezultă randamentul maxim în zona debitului de scurgere minim, adică pentru conicități mici.

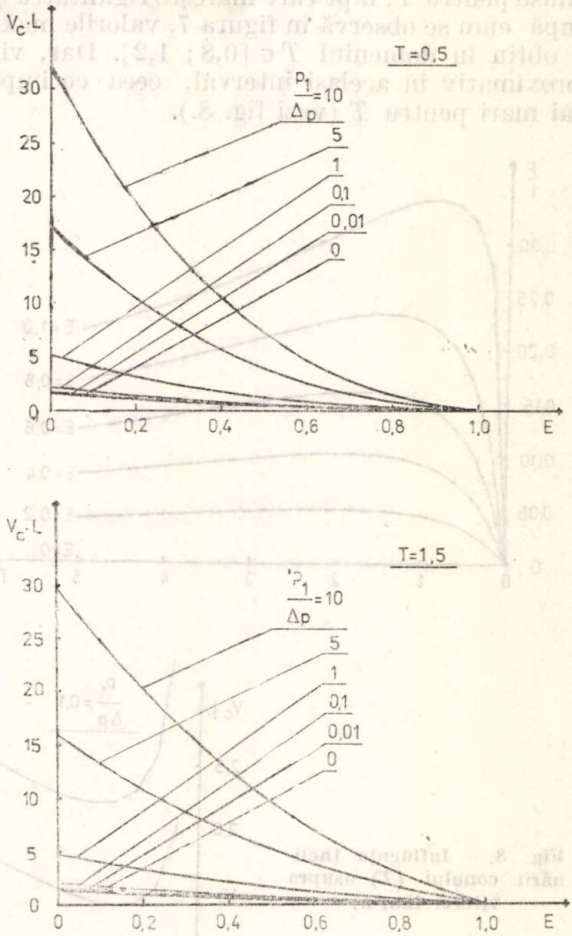


Fig. 6. — Caracteristica viteză limită—excentricitate relativă.

3. SINTEZA LAGĂRELOR HIDROSTATICE PENTRU MHL

Condițiile principale pe care trebuie să le îndeplinească lagărele hidrostatice ale unui MHL sînt : forța de centrare cît mai puțin dependentă de viteză; rigiditatea, exprimată prin raportul $\Delta f/\Delta e$ (sau, adimensional, $\Delta F/\Delta E$), cît mai mare; viteză limită ridicată, în special la MHL rapide debit de scurgere cît mai mic; randament cît mai ridicat.

Analizînd caracteristicile anterior prezentate, se poate constat în general, aceste condiții sînt contradictorii. Astfel, un lagăr

conic în repaus este cu atît mai rigid, cu cît T este mai mic. Dar viteza îi reduce atît de mult forţa de centrare, încît devine preferabilă adoptarea unor valori mai mari pentru T, care duc la scăderea rigidităţii şi la creşterea debitului de scurgere.

Pentru un lagăr dublu conic, este preferabilă alegerea unor valori reduse pentru T, fapt care măreşte rigiditatea şi reduce debitul de scurgere. După cum se observă în figura 7, valorile maxime pentru forţa de centrare se obţin în domeniul $T \in [0{,}8;\ 1{,}2]$. Dar, viteza limită scade puternic, aproximativ în acelaşi interval, ceea ce impune adoptarea unor valori mai mari pentru T (vezi fig. 8.).

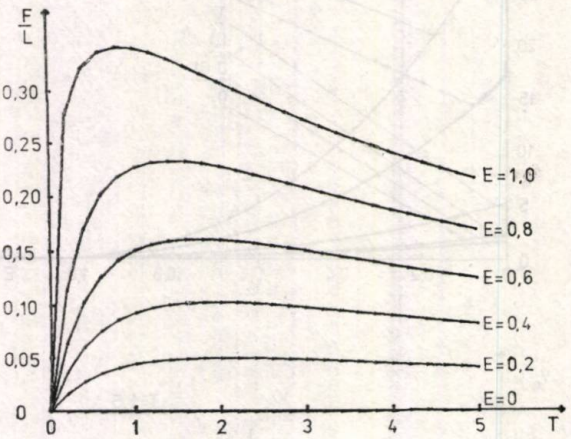


Fig. 7. — Influenţa înclinării conului (T) asupra forţei adimensionale.

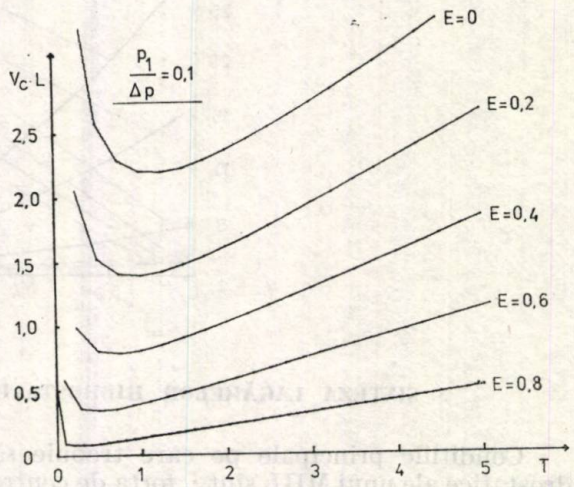


Fig. 8. — Influenţa înclinării conului (T) asupra vitezei limită.

Mărimile rezultate din etapa sintezei sînt adimensionale şi furnizează o soluţie optimizată pentru proiectare, soluţie care poate fi ameliorată în sensul creşterii performanţelor sau al scăderii costului execuţiei, în funcţie de criteriile de proiectare adoptate.

4. CONCLUZII

În funcționarea sistemelor automate hidraulice frecarea constituie unul dintre obiectivele studiilor de analiză-sinteză proiectare a MHL. Soluția/alternativa modernă este aceea prin care se elimină inconvenientele frecării uscate, a cărei prezență introduce pericolul de instabilitate. Aceasta se realizează prin adoptarea unor lagăre de tip hidrostatic la piston și tijă, care să înlocuiască etanșarea clasică.

Această soluție conduce, în plus, la realizarea unui motor capabil să asigure execuția cu viteze și accelerații limită, necesare în numeroase aplicații industriale. Analiza comportării acestui tip de lagăr arată factorii care influențează rigiditatea sa și capacitatea de a centra elementul mobil. Datele furnizate în lucrare, constituie elemente de analiză, sinteză și alegere a soluției finale de proiectare.

În cadrul lucrării, se arată căile pentru proiectarea optimizată a acestor MHL, care să realizeze parametrii funcționali doriți, sub aspectul siguranței în exploatare și al consumului energetic, reducîndu-se la minim costul execuției.

În lucrare se arată, totodată, și dezvoltări corespunzătoare proiectării diferențiate a tipurilor de MHL utilizabile în servosisteme de reglare a poziției, vitezei, sau forței, ca și în direcția analizei influenței sustentației hidrostatice asupra dinamicii motorului, considerat ca element al unui sistem automat.

Primit la redacție la 17 ianuarie 1986

BIBLIOGRAFIE

1. FL. IONESCU, M. IOSIP, *Contribuții la analiza și sinteza amplificatoarelor electrohidraulice digitale*, Conferința Națională de Energetică, 23–25 nov. 1983, București.
2. A. OPREAN, FL. IONESCU, AL. DORIN, *Acționări hidraulice. Elemente și sisteme*, Edit. Tehnică, București, 1982.
3. T. J. VIERSMA, *Analysis, Synthesis and Design of Hydrostatic Servosystems and Pipelines*, Elsevier, Amsterdam, 1980.

SUPAPA DE LIMITARE A PRESIUNII – SURSA DE VIBRAȚII ȘI ZGOMOTE ÎN INSTALAȚIILE HIDRAULICE

de S. T. CHIRIACESCU*), N. POPESCU**), M. DANGAȘIU*),
I. BALCU*) și RODICA MUNTEANU*)

*) Universitatea din Brașov, **) Întreprinderea de piese auto din Sibiu

În lucrare se analizează influența supapelor de limitare a presiunii asupra nivelurilor de vibrații și zgomote din instalațiile hidraulice. Pe baza ecuațiilor care le descriu dinamica, au fost determinate regimurile de stabilitate parametrică ale acestor supape. Noua soluție constructivă de supapă și măsurările de vibrații și zgomote efectuate asupra caseteloor de direcție ale autovehiculelor confirmă rezultatele studiilor teoretice.

1. INTRODUCERE

În literatura de specialitate [1], [10], [21], [28] etc sînt prezentate o serie de surse posibile ale vibrațiilor și zgomotelor care însoțesc funcționarea diverselor instalații hidraulice. În rîndul acestora, supapele de limitare a presiunii ocupă un loc important.

În vederea investigării influenței pe care supapele de limitare a presiunii o au asupra nivelurilor de vibrații și zgomote din sistemele hidraulice este necesar să se elimine cît mai multe din sursele perturbatoare externe acestora, iar pentru elementele absolut necesare funcționării supapelor (pompe, conducte etc.) să se dispună de informații cît mai complete asupra comportării lor dinamice.

Bazată pe o serie de cercetări teoretice și experimentale efectuate în vederea ridicării performanțelor dinamice ale transmisiilor hidraulice ce echipează autovehiculele grele, lucrarea de față prezintă o modalitate concretă de cercetare a vibrațiilor și zgomotelor generate de supapele de limitare a presiunii. Cel puțin rezultatele inedite referitoare la influența pulsațiilor presiunii uleiului asupra stabilității parametrice a supapei de limitare a presiunii și la dependența nivelurilor de vibrații și zgomote de forma constructivă a acestor supape oferă un material prețios pentru proiectanți și pentru utilizatorii diverselor tipuri de instalații hidraulice.

2. CAUZE ALE VIBRAȚIILOR ȘI ZGOMOTELOR DIN INSTALAȚIILE HIDRAULICE

Vibrațiile și zgomotele care însoțesc funcționarea instalațiilor hidraulice sînt legate, pe de o parte, de principiul de funcționare a generatoarelor și mașinilor hidraulice și, pe de altă parte, de particularitățile funcționale ale robinetelor, supapelor etc. și ale circulației uleiului prin conducte, așa cum rezultă din tabelul 1.

3. COMPORTAREA DINAMICĂ A SUPAPELOR DE LIMITARE A PRESIUNII

Bogata literatură de specialitate [17], [23], [26] etc. și, în mod deosebit, lucrarea [26] prezintă numeroase elemente constructiv-funcționale în legătură cu supapele de limitare a presiunii, iar într-o serie

Tabelul 1

Nr.	Sursa de vibraţii şi zgomote	Cauze	Moduri de manifestare
1	— Mecanică.	— Funcţionarea mecanismelor, rotorilor, arborilor cotiţi.	— Vibraţiile sînt transmise de fluid (care are un rol pasiv).
2	— Fluidul (uleiul).	— Turbulenţa	— Zgomote cu frecvenţa $\leqslant$ 1kHz şi presiunea acustică $\leqslant$ 50 dB.
		— Cavitaţia	— Zgomote cu frecvenţa de pînă la cîteva sute de Hz — Fenomen de scurtă durată şi deosebit de intens.
		— Desprinderea periodică a turbioanelor (de tip Kármán) cu frecvenţa : $f_t = S_t \frac{v}{D_e}$, unde s-a notat : v — viteza relativă a fluidului la trecerea peste un obstacol ; D_e — dimensiunea transversală echivalentă ; S_t = 0,2-coeficientul lui Strouhal [28].	— Rezonanţa cu structurile mecanice ale elementelor hidraulice.
		— Variaţia presiunii fluidului vehiculat în sistemul hidraulic.	— Influenţe puternice asupra nivelurilor de vibraţii şi zgomote.
3	— Pompele (generatorii hidraulici).	— Variaţia presiunii fluidului debitat, cu frecvenţele $f_{Pi} = n z i$, unde s-a notat : n — frecvenţa de rotaţie a arborelui de antrenare a pompei ; z — numărul camerelor de presiune a pompei ; $i = 1, 2, \ldots$	— Zgomote cu presiunea minimă de 1,45 10^{-2} MPa şi nivelul minim de 90 dB.
4	— Supapele de limitare a presiunii.	— Vibraţiile arcurilor, deplasările maselor mobile, procesele hidrodinamice de curgere a fluidului.	— Influenţe mari asupra nivelurilor de vibraţii şi zgomote
5	— Conductele	— Proprietăţile fizico-mecanice ale materialului din care sînt confecţionate şi procesele hidrodinamice de curgere a fluidului prin ele.	— Influenţe puternice asupra nivelurilor de vibraţii şi zgomote.

de lucrări, cum ar fi [10], [12], [14], [17], [25] se analizează şi unele aspecte ale comportării lor dinamice. În cele ce urmează se abordează numai dinamica supapelor nepilotate de limitare a presiunii în ipotezele:

(I) — conducta dintre pompă şi supapă este scurtă şi rigidă;

(II) — variaţiile presiunii p_1 ale uleiului care intră în supapă sînt pur armonice;

(III) — presiunea p_2 a uleiului care iese din supapă este mult mai mică decît presiunea p_1;

(IV) — secţiunea transversală a conductei de alimentare a supapei este comparabilă cu secţiunea transversală a conductei de evacuare.

3.1. ECUAŢIA DE MIŞCARE A MASEI MOBILE A SUPAPEI

Elementele constructive de bază ale supapelor de limitare a presiunii pot fi urmărite în figura 1*a*, care reprezintă o secţiune transversală prin supapa care echipează casetele hidraulice tip I.P.A. Sibiu.

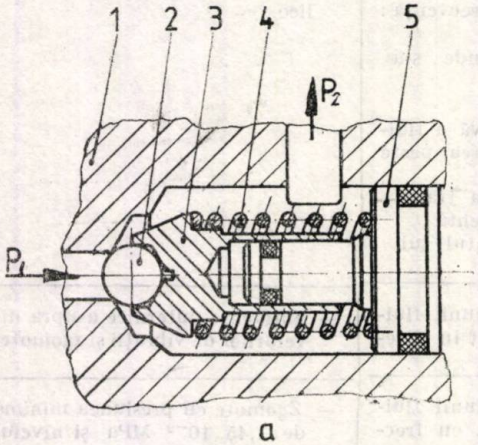


Fig. 1

Ţinînd seama de figura 1*b*, ecuaţia de mişcare a masei mobile a supapei se scrie:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F, \qquad (3.1)$$

unde derivatele $\dot{y}$ şi $\ddot{y}$ sînt calculate în raport cu timpul t, iar [10], [14], [17]:

$$m = m_{23} + (0{,}33 \div 0{,}5)m_4, \qquad (3.2)$$

$$F = A_1 p_1 - A_2 p_2 - k y_0 - F_h, \qquad (3.3)$$

$$A_1 = \pi d_1^2/4, \quad A_2 = \pi d_2^2/4, \qquad (3.4)$$

$$F_h = A_1 v_1 v_2 \rho \cos \alpha. \qquad (3.5)$$

În relaţiile de mai sus, m_{23} este masa elementelor *2* şi *3* din figura 1*a*; m_4 masa arcului elicoidal *4*; c coeficientul de amortizare; k-constanta elastică (rigiditatea statică) a arcului; y_0 comprimarea iniţială a arcului; F_h forţa de rezistenţă (hidraulică) datorată curgerii uleiului prin supapă; A_1 aria secţiunii transversale a conductei de alimentare (a supapei); A_2 aria transversală a conductei de evacuare; v_1 viteza de curgere a uleiului prin conducta de alimentare; v_2 viteza de curgere a uleiului prin conducta de evacuare; ρ densitatea uleiului, iar α semiunghiul conului scaunului supapei.

Pentru valori nu prea mari ale deplasării $|y| < y_0$ se poate considera că debitul uleiului care trece prin supapă este :

$$\Delta Q = A_1 v_1 = \pi d_1 y v_2 c_p \sin \alpha, \tag{3.6}$$

în care c_p este un coeficient care ține seama de destinderea (descărcarea) uleiului la curgerea lui turbulentă prin interstițiul creat de deschiderea pompei. În conformitate cu lucrarea [10],

$$v_2 = c_v \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_1 - p_2)}, \tag{3.7}$$

unde c_v poartă numele de coeficient al vitezei de evacuare.

Notînd

$$\lambda_1 = \pi d_1 c_p c_v^2 \sin 2\alpha, \tag{3.8}$$

prin combinarea relațiilor (3.5.) ÷ (3.7.) rezultă :

$$F_h = \lambda_1 (p_1 - p_2) y. \tag{3.9}$$

Ținînd seama de (3.3.) și (3.9.) ecuația de mișcare (3.1.) capătă forma :

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = A_1 p_1(t) - A_2 p_2(t) - \lambda_1 [p_1(t) - p_2(t)] y - k y_0. \tag{3.10}$$

În cazul general, p_2 este funcție de y și t, iar p_1 variază în timp ca urmare, mai ales, a principiului de funcționare a pompei de alimentare. Funcționarea supapei de limitare a presiunii în regim dinamic este descrisă de o ecuație diferențială neliniară destul de complicată.

3.2. INFLUENȚA POMPEI DE ALIMENTARE ASUPRA STABILITĂȚII PARAMETRICE A SUPAPEI

În primă aproximație, prin acceptarea ipotezelor (I) ÷ (IV) ecuația (3.10) se consideră în forma particulară

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = A_1 p_1(t) - \lambda_1 p_1(t) y - k y_0, \tag{3.11}$$

în care

$$p_1(t) = p_{10} + \Delta p_1 \cos(\omega_1 t), \tag{3.12}$$

prin ω_1 notîndu-se pulsația uleiului debitat de pompa de alimentare a supapei.

Notînd :

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= k + \lambda_1 p_{10}, \qquad \lambda_3 = \lambda_1 \Delta p_{10}, \\ F_0 &= A_1 p_{10} - k y_0, \qquad \Delta F_0 = A_1 \Delta p_{10}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

din (11) şi (12) rezultă :

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + (\lambda_2 + \lambda_3 \cos \omega_1 t)y = F_0 + \Delta F_0 \cos \omega_1 t. \tag{3.14}$$

Cu schimbarea de variabilă

$$y = z \exp\left(-\frac{c}{2m} t\right) \tag{3.15}$$

ecuaţia (3.14) devine :

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + f(t)\, z = f_1(t), \tag{3.16}$$

unde

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\lambda_2}{m} + \frac{\lambda_3}{m} \cos(\omega_1 t) - \frac{c^2}{4m^2}, \\ f_1(t) &= \left[\frac{F_0}{m} + \frac{\Delta F_0}{m} \cos(\omega_1 t)\right] \exp\left(\frac{c}{2m} t\right). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Prin schimbarea de variabilă

$$t = \frac{2\psi}{\omega_1} \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{2}{\omega_1} \mathrm{d}\psi \tag{3.18}$$

ecuaţia (3.16) capătă forma :

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\psi^2} + (a + 2q \cos 2\psi)\, z = f_2(\psi), \tag{3.19}$$

în care coeficienţii a şi q ai ecuaţiei Mathieu *),

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\psi^2} + (a + 2q \cos 2\psi) = 0, \tag{3.20}$$

sînt daţi de relaţiile :

$$a = \frac{1}{m^2 \omega_1^2} (4m\lambda_2 - c^2), \quad q = \frac{2\lambda_3}{m\omega_1^2}, \tag{3.21}$$

iar $f_2(t)$ are expresia :

$$f_2(t) = \frac{4}{\omega_1^2} f_1(t). \tag{3.22}$$

Ecuaţia (3.20) permite a analiza stabilitatea asimptotică a supapei de limitare a presiunii pentru care sînt satisfăcute ipotezele (I)÷(IV). (În condiţiile instabilităţii supapa intră într-un regim necontrolat de funcţio-

*) Într-un caz mai general, considerînd pentru $p_1 = p_1(t)$ o variaţie periodică, se obţine o ecuaţie de tip Hill.

nare, vibrațiile puternice care apar influențînd și nivelul de zgomot. Apariția fenomenului este posibilă la deschiderea și închiderea supapei, în condițiile unei variații bruște a presiunii uleiului etc.)

Pentru analiza stabilității soluției ecuației Mathieu (3.20) poate fi folosită diagrama Ince-Strutt descrisă în lucrările de specialitate. În această diagramă, limitele (granițele) zonelor de instabilitate corespund soluțiilor periodice ale ecuației (3.20) și au ca descrieri analitice așa numitele funcții Mathieu. În lucrarea [6] se arată că, dacă parametrul q este suficient de mic, atunci, în planul $q-a$, zonele de instabilitate se reduc la șirul de puncte (0,1), (0,4), (0,9), (0,16) etc. În cazul general, însă, decizia asupra stabilității sau instabilității sistemului descris de ecuația (3.20) trebuie să se ia în funcție de localizarea punctului (q, a) în diagrama Ince-Strutt.

Eliminînd unul din parametrii m și ω_1, din (3.21) rezultă ecuația dreptei $a = a(q)$. Intersecția acesteia cu limitele domeniilor de instabilitate ale diagramei Ince-Strutt permite a preciza valorile critice ale lui a și q. Apoi , cu aceste mărimi și folosind relațiile (3.21) se obțin valorile critice pentru doi dintre parametrii m, c, λ_2, ω_1 etc. în funcție de ceilalți parametri considerați dați (impuși). De exemplu, prin eliminarea lui ω_1, din (3.21) rezultă :

$$a = \left(2\frac{\lambda_2}{\lambda_3} - \frac{c^2}{2m\lambda_3}\right) q. \tag{3.23}$$

Fie $a_i^{(1)}$, $a_i^{(2)}$, și $q_i^{(1)}$, $q_i^{(2)}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ valorile critice ale lui a și q. Folosind relațiile (3.20) se obțin formulele :

— pentru calculul pulsațiilor critice :

$$\omega_i^{(j)} = \sqrt{\frac{2\lambda_3}{mq_i^{(j)}}} \qquad (j = 1, 2\,;\ i = 0, 1, \ldots), \tag{3.24}$$

— pentru calculul coeficienților critici de amortizare :

$$c_i^{(j)} = \sqrt{4m\lambda_2 - m^2\,\omega_1^2\,a_i^{(j)}} \qquad (j = 1, 2\,;\ i = 0, 1, \ldots), \tag{3.25}$$

— pentru calculul maselor mobile critice :

$$m_i^{(j)} = \frac{2\lambda_3}{q_i^{(j)}\omega_1^2} \qquad (j = 1, 2\,;\ i = 0, 1, \ldots). \tag{3.26}$$

De asemenea, dacă se combină (3.13) cu (3.21) pot fi precizate și valorile critice ale lui k :

$$k_i^{(j)} = \frac{a_i^{(j)} m^2\,\omega_1^2 + c^2}{4m} - \lambda_1 p_{10} \qquad (j = 1, 2\,;\ i = 0, 1, \ldots). \tag{3.27}$$

Dacă q este suficient de mic, se poate considera :

$$a_i^{(1)} \cong a_i^{(2)}, \quad q_i^{(1)} \cong q_i^{(2)}. \tag{3.28}$$

Cu scopul de a obține o serie de informații utile pentru interpretarea măsurătorilor prezentate în capitolul al 4-lea, se consideră : $m = 0{,}1$ kg,

$k = 2{,}2 \cdot 10^4 \text{N/m}$, $c = 94\text{N} \cdot \text{s/m}$, $p_{10} = 1\text{MPa}$, $d_1 = 10^{-2}\text{m}$, $c_p = 0{,}7$, $c_v = 1$, $\alpha = \pi/6$. În acest caz, din relaţiile (3.8) şi (3.13) rezultă: $\lambda_1 \cong$ $\cong 10^{-2}\text{m}$, $\lambda_2 \cong 2{,}22 \cdot 10^5\ \text{N/m}^2$, $\lambda_3 = 2.10^4\ \text{N/m}^2$, ceea ce permite a scrie ecuaţia (3.23) în forma

$$a \cong 20q.$$

Întrucît $a \gg q$, în formulele (3.24)÷(3.27) se poate considera $j = 1$. Ca urmare, dînd lui a valorile 1,4,9,16 etc., din (3.24) rezultă pulsaţiile critice ale uleiului debitat de pompa de alimentare: $\omega_{11} \cong 623{,}45\ \text{s}^{-1}$, $\omega_{12} = 317{,}23\ \text{s}^{-1}$ etc.

4. INFLUENŢA SUPAPEI DE LIMITARE A PRESIUNII ASUPRA NIVELURILOR DE VIBRAŢII ŞI ZGOMOTE ALE TRANSMISIILOR HIDRAULICE

Constatîndu-se influenţa determinată a comportării dinamice a supapei de limitare a presiunii asupra nivelurilor de vibraţii şi zgomote ale transmisiilor hidraulice ale autovehiculelor, au fost efectuate o serie de măsurări de vibraţii şi zgomote asupra casetelor hidraulice (subansamblurile transmisiilor hidraulice care încorporează supapele de limitare a presiunii) tip IPA Sibiu, montate pe standul de probă.

4.1. APARATURA FOLOSITĂ LA MĂSURAREA VIBRAŢIILOR ŞI ZGOMOTELOR

Schema de conexiuni a aparatelor folosite la măsurarea vibraţiilor casetei hidraulice este prezentată în figura 2, în care s-a notat: *1*-captor piezoelectric (acelorometru) Brüel and Kjaer tip 2633; *2*-amplificator de sarcină Brüel and Kjaer tip 2635; *3*-analizor în timp real Brüel and Kjaer tip 2031; *4*-înregistrator pe două axe rectangulare Brüel and Kjaer tip

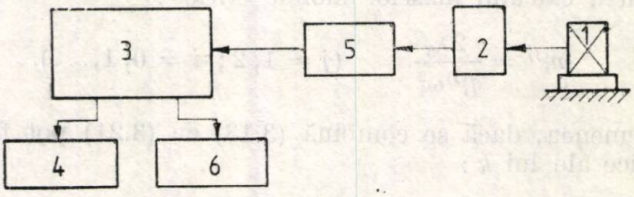


Fig. 2

2308; *5*-osciloscop digital cu două spoturi Philips tip OS4100; *6*-înregistrator pe două axe rectangulare Philips tip PM 8041. Ca aparate auxiliare s-au mai folosit: un generator de funcţii Brüel and Kjaer tip 189 şi un multimetru digital Fluke tip 8020 A.

Măsurarea nivelului presiunii acustice a fost efectuată cu sonometrul Brüel and Kjaer tip 2203, ţinîndu-se seama de recomandările din STAS 7150-77.

4.2. METODICA MĂSURĂRII VIBRAȚIILOR ȘI ZGOMOTELOR

a) Măsurarea nivelului de vibrații al casetei hidraulice (de direcție), montată pe standul de probă, a vizat punctele *A*, *B* și *C* (fig. (3).

Aceste puncte sînt plasate în imediata vecinătate a supapei, axa longitudinală a acceleratorului ocupînd, succesiv, pozițiile axelor unui sistem triortogonal de referință.

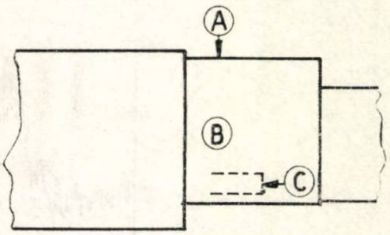


Fig. 3

b) Cu ajutorul osciloscopului s-au urmărit modificările, din spectrul de vibrații, datorate schimbării regimului de funcționare a casetei, analiza în timp real și înregistrările efectuîndu-se, de regulă, în poziția complet deschisă a supapei.

c) Cu scopul de a putea compara diversele casete de același tip și *pentru a evidenția influența modificării constructive a supapei* au fost efectuate măsurări asupra unor casete furnizate de firma Zahnradfabrik Friedrichshafen AG din R.F.G.

d) Întrucît standurile de probă ale casetelor au fost plasate într-o încăpere separată de atelierele mecanice, influența vibrațiilor și zgomotelor transmise casetelor hidraulice din mediul ambiant a fost neglijabilă.

e) În conformitate cu STAS 7150-77, pentru cîteva din casetele testate a fost măsurat nivelul de zgomot global ponderat L_A și nivelul de presiune acustică totală (globală) în benzi de frecvență de 1/1 octavă. De asemenea, pentru a putea evalua încadrarea zgomotului emis de caseta aflată pe standul de probă în limita admisă, a fost măsurat și nivelul de zgomot de fond pertorbator L_F.

f) Plasarea microfonului piezoelectric a fost efectuată în plan orizontal, la circa 1,5 m de caseta hidraulică, pe direcția axei supapei de limitare a presiunii.

4.3. REZULTATELE MĂSURĂRILOR ȘI INTERPRETAREA LOR

Măsurarea nivelurilor de vibrații și zgomote a fost efectuată la cîteva casete hidraulice tip IPA Sibiu și la două casete originale (executate la firma Zahnradfabrik Friedrichshafen AG). Parte din rezultatele obținute sînt prezentate în tabelul nr. 2, în figurile 4 ÷ 9 putînd fi urmărite spectrele amplitudinilor vibrațiilor corespunzătoare, iar în figura 10 nivelul de zgomot L_A pentru caseta V.

După cum se constată, caseta notată cu II (vezi tab. 2) este, din punct de vedere al nivelurilor de vibrații și zgomote, comparabilă cu casetele produse de firma din R.F.G., menționată mai sus. În schimb caseta V este total necorespunzătoare bunei funcționări a transmisiei hidraulice (așa cum a rezultat în urma montării casetei pe autovehiculul căreia-i era destinată).

În varianta inițială, toate supapele casetelor testate aveau cele două elemente de bază-corpul și ghidajul-executate în conformitate cu desenele IPA Sibiu. Deși recomandată de firma deținătoare a licenței casetei,

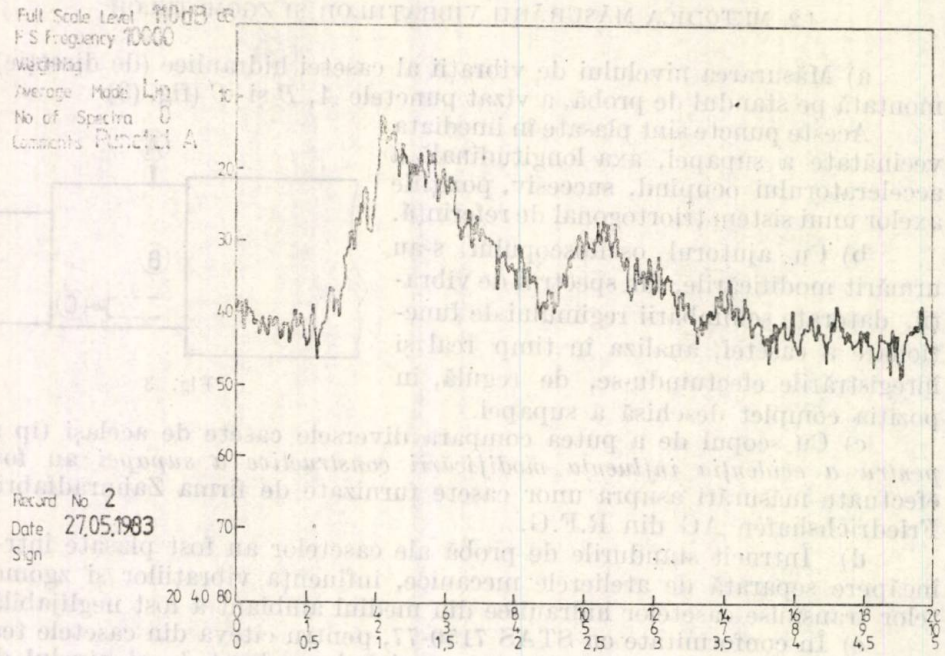

Full Scale Level 110dB
F S Freguency 10000
Weighting
Average Mode Lin
No of Spectra 8
Comments Punctul A
dB
10
20
30
40
50
60
70
Record No 2
Date 27.05.1983
Sign
20 40 80
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0 0,5 1 1,5 2 2,5 3 3,5 4 4,5 5

Fig. 4

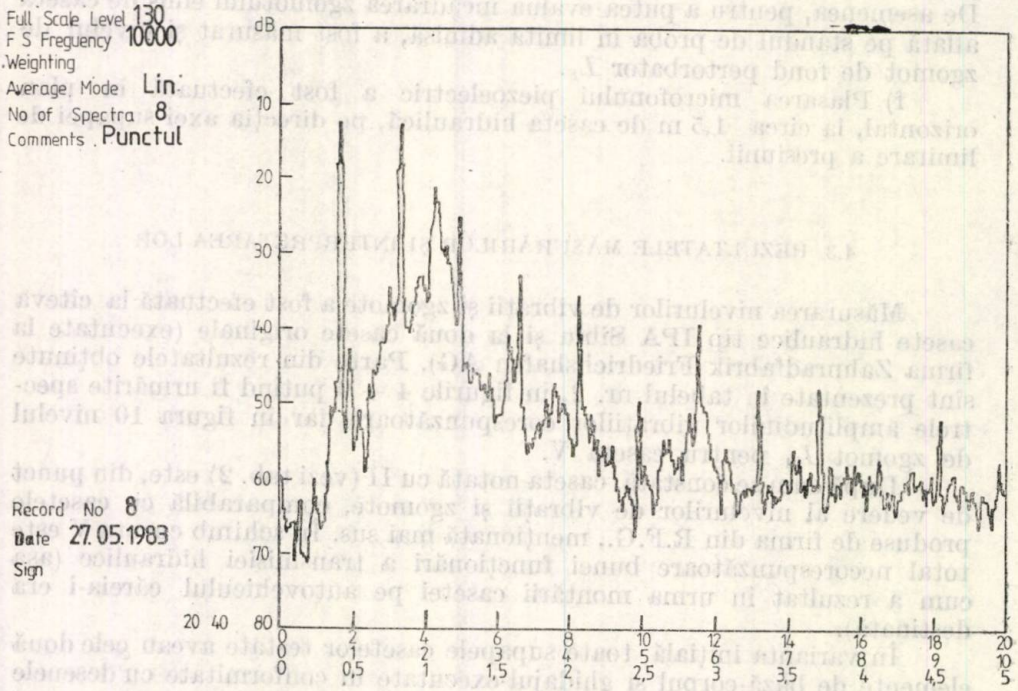

Full Scale Level 130
F S Freguency 10000
Weighting
Average Mode Lin
No of Spectra 8
Comments Punctul
dB
10
20
30
40
50
60
70
Record No 8
Date 27.05.1983
Sign
20 40 80
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0 0,5 1 1,5 2 2,5 3 3,5 4 4,5 5

Fig. 5

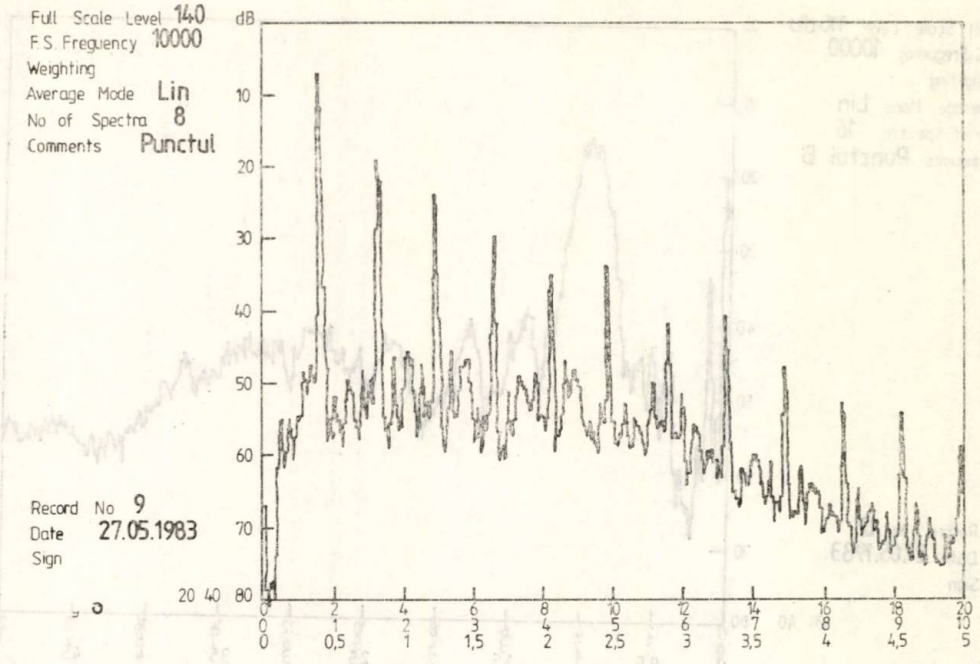

Full Scale Level 140
F.S. Freguency 10000
Weighting
Average Mode Lin
No of Spectra 8
Comments Punctul
Record No 9
Date 27.05.1983
Sign
dB
10
20
30
40
50
60
70
80
20 40
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0 0,5 1 1,5 2 2,5 3 3,5 4 4,5 5

Fig. 6

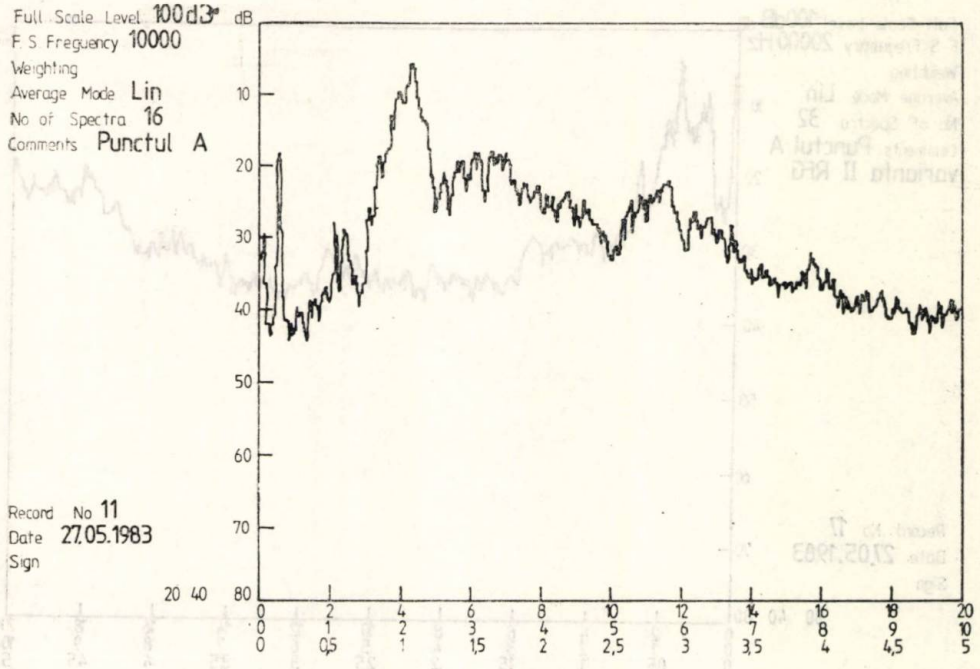

Full Scale Level 100 dB
F.S. Freguency 10000
Weighting
Average Mode Lin
No of Spectra 16
Comments Punctul A
Record No 11
Date 27.05.1983
Sign
dB
10
20
30
40
50
60
70
80
20 40
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0 0,5 1 1,5 2 2,5 3 3,5 4 4,5 5

Fig. 7

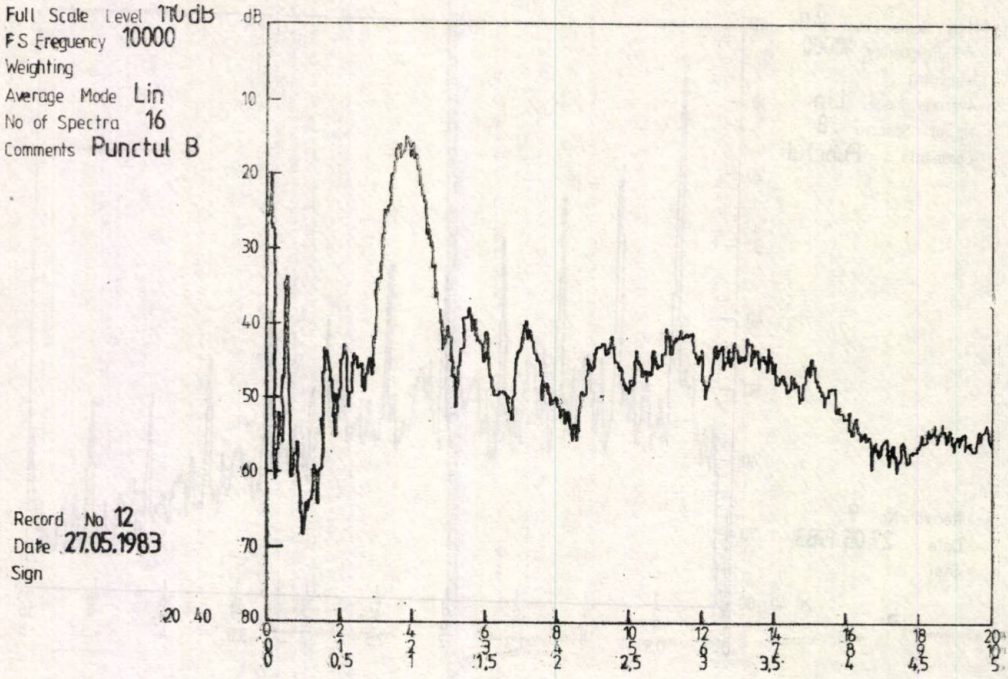
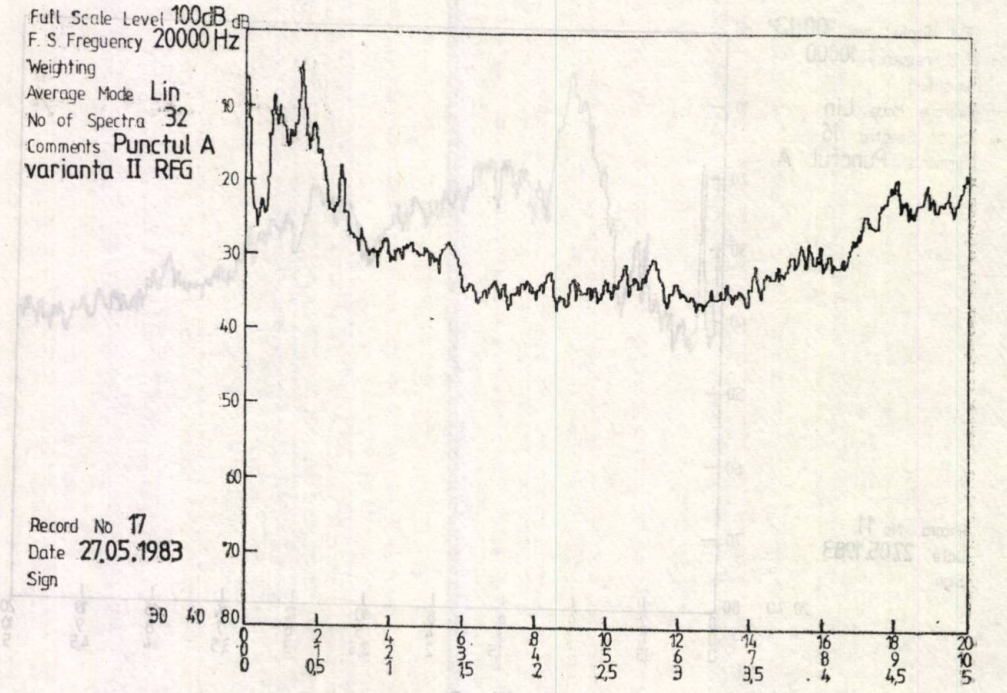

Full Scale Level 110 dB
F.S Freguency 10000
Weighting
Average Mode Lin
No of Spectra 16
Comments Punctul B
Record No 12
Date 27.05.1983
Sign
dB
10
20
30
40
50
60
70
80
20 40
0 0,5 1 1,5 2 2,5 3 3,5 4 4,5 5

Fig. 8


Full Scale Level 100dB
F. S. Freguency 20000 Hz
Weighting
Average Mode Lin
No of Spectra 32
Comments Punctul A
varianta II RFG
Record No 17
Date 27.05.1983
Sign
dB
10
20
30
40
50
60
70
80
30 40
0 0,5 1 1,5 2 2,5 3 3,5 4 4,5 5

F ig. 9

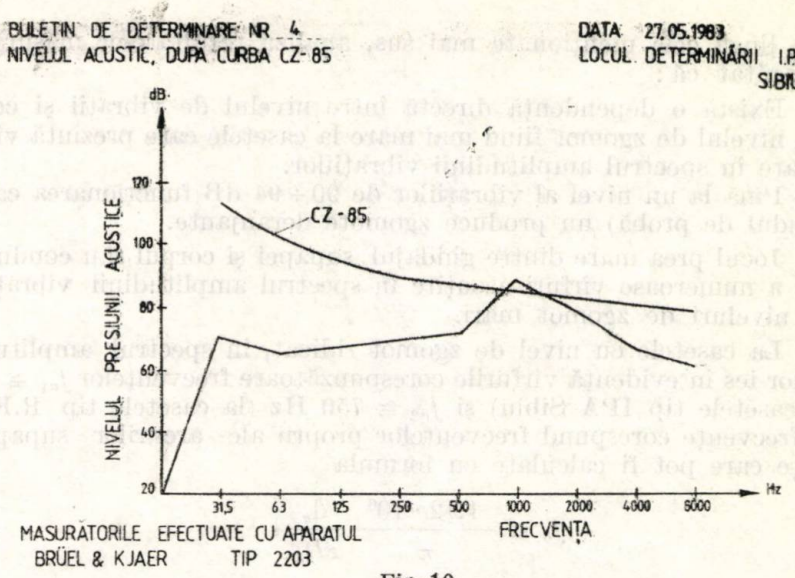


Fig. 10

această supapă de linutare a presiunii s-a dovedit foarte sensibilă (în privința nivelurilor de vibrații și zgomote) la abaterile dimensionale apărute în procesul de prelucrare mecanică a corpului și ghidajului.

Schimbarea ghidajului supapei, care a constat, în principal, în înlocuirea inelului de cauciuc (montat în canalul practic pe ghidaj cu un amortizor hidraulic cu renuri (canale) și micșorarea jocului radial dintre ghidaj și alezajul corpului supapei au condus la creșterea rigidității radiale a acesteia, deci la reducerea posibilității de apariție a vibrațiilor transversale ale arcului supapei. O asemenea supapă, montată în caseta V, a condus la rezultatele din figurile 7 și 8 (corespunzătoare înregistrărilor 11 și 12 din tab. 2).

Tabelul 2

Nr. înregistrării	Caseta	Punctul de măsurare	Nivelul amplitudinii maxime(dB)	Frecvența f corespunzătoare amplitudinii maxime (Hz)	Alte valori ale frecvențelor (Hz) și amplitudinilor (dB)	Aprecieri asupra nivelului de zgomot
2	II	A	96,8	3150	2800—92,4 5350—82,6	Zgomot acceptabil spre mare
8	V	A	127,6	825	1650—127,0 2150—118,0 2450—124,2	Zgomot foarte mare
9	V	B	133,0	825	1650—121 2450—116 3350—110	Zgomot foarte mare
11	V modif.	A	94,0	2150	280—81,8 3300—82,0 5850—78,2	Zgomot foarte mic
12	V modif.	B	94,9	1900	2800—72 3600—70	Zgomot foarte mic
17	VII RFG	A	96,0	1550	700—91,6 950—90,2 2650—88,0	Zgomot acceptabil spre mare

Pe lîngă cele menţionate mai sus, analiza rezultatelor măsurărilor a mai arătat că :

a) Există o dependenţă directă între nivelul de vibraţii şi cel de zgomot, nivelul de zgomot fiind mai mare la casetele care prezintă vîrfuri accentuate în spectrul amplitudinii vibraţiilor.

b) Pînă la un nivel al vibraţiilor de $90 \div 94$ dB funcţionarea casetei (pe standul de probă) nu produce zgomote deranjante.

c) Jocul prea mare dintre ghidajul supapei şi corpul său conduce la apariţia a numeroase vîrfuri ascuţite în spectrul amplitudinii vibraţiilor, deci la niveluri de zgomot mari.

d) La casetele cu nivel de zgomot ridicat, în spectrul amplitudinii vibraţiilor ies în evidenţă vîrfurile corespunzătoare frecvenţelor $f_{a1} \cong 1000$ Hz (la casetele tip IPA Sibiu) şi $f_{a2} \cong 750$ Hz (la casetele tip R.F.G.). Aceste frecvenţe corespund frecvenţelor proprii ale arcurilor supapelor, frecvenţe care pot fi calculate cu formula

$$f_a \cong \frac{1{,}12 \cdot 10^6}{\pi} \frac{d_a}{zD_a},$$

stabilită în conformitate cu monografia [24] şi în care d_a [mm] este diametrul sîrmei din care este executat arcul, D_a[mm] — diametrul de înfăşurare a acesteia, iar z — numărul spirelor arcului.

e) Pulsaţiile presiunii uleiului debitat de pompa de alimentare au o influenţă puternică asupra nivelurilor de vibraţii şi zgomote, în spectrul amplitudinii vibraţiilor regăsindu-se pulsaţiile critice calculate cu relaţiile stabilite în capitolul 3.

f) Aşa cum au arătat măsurările dimensionale efectuate asupra unui număr mare de elemente constructive ale supapelor tip IPA Sibiu, asupra nivelurilor de vibraţii şi zgomote influenţează puternic necoaxialitatea alezajului de intrare a uleiului cu presiune p_1 faţă de alezajul practicat în corpul *1* şi destinat centrării ghidajului *5* al supapei (vezi fig. 1*a*). Abaterile mari de la această condiţie de precizie a dispunerii suprafeţelor, precum şi un joc ridicat al suprafeţelor de ghidare relativă a corpului *3* şi ghidajului *5* conduc la micşorarea rigidităţii radiale a supapei, ceea ce se reflectă în mod direct asupra creşterii nivelurilor de vibraţii şi zgomote ale supapei.

În vederea micşării jocului dintre suprafeţele de ghidare relativă a elementelor *3* şi *5* (vezi fig. 1*a*), la noua variantă de supapă s-a recurs la un ajustaj alunecător, iar pentru a asigura coaxialitatea dintre alezajul de alimentare a supapei şi cel de centrare a elementului *5* (vezi fig. 1*a*) se poate recurge la prelucrarea simultană a acestor alezaje cu o sculă combinată (burghiu cu alezor).

5. CONCLUZII

Deşi analiza influenţei supapei de limitare a presiunii asupra nivelurilor de vibraţii şi zgomote din instalaţiile hidraulice a fost efectuată cu referire la casetele care echipează transmisiile hidraulice ale autovehiculelor, cele prezentate în capitolul precedent prezintă şi un interes general, servind

proiectanților și celor care se ocupă cu exploatarea diverselor tipuri de instalații hidraulice. În plus față de cele arătate, pentru anihilarea surselor de vibrații și zgomote sau, cel puțin, pentru diminuarea influenței acestora asupra nivelurilor de vibrații și zgomote, coroborarea analizei măsurărilor efectuate cu datele din literatura de specialitate recomandă :

— alegerea corespunzătoare a elementelor instalației și a regimurilor de funcționare a acestora (debite, viteze, etc.) [12], [26] etc.

— eliminarea condițiilor în care apare cavitația, acționînd în mod corespunzător asupra : turației pompei de alimentare, naturii și temperaturii uleiului, deschiderii supapei în regimul de funcționare cu durata cea mai mare ;

— reducerea turbulenței prin : alegerea unor viteze de curgere cît mai scăzute, trecerea progresivă de la o secțiune de curgere la alta, eliminarea corpurilor care ar putea obtura căile de curgere a uleiului etc. ;

— evitarea intrării aerului în circuitul hidraulic :

— evitarea rezonanțelor cu frecvențele proprii ale structurii mecanice a instalației hidraulice ;

— folosirea unor elemente amortizatoare, care să rupă fluxul de transmitere a energiei vibrațiilor și/sau zgomotelor ;

— să se folosească conducte cît mai flexibile ;

— pompa să fie instalată pe o suspensie elastică independentă (izolată de restul structurii mecanice a sistemului hidraulic) ;

— pompa să fie aleasă sau proiectată urmărindu-se reducerea pulsațiilor de presiune și evitarea pulsațiilor critice (determinate, de exemplu, așa cum s-a arătat în capitolul 3) ;

— să se evite rezonanța acustică, care apare atunci cînd este satisfăcută egalitatea [12] :

$$\lambda = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{E_e}{\rho}},$$

unde λ este lungimea de undă a oscilațiilor presiunii uleiului, f-frecvența acestor oscilații, E_e — densitatea uleiului, iar

$$\frac{1}{E_e} = \frac{1}{E_v} + \frac{d_c}{h_c E_c},$$

prin E_v notîndu-se modulul de elasticitate (volumică) al mediului hidraulic, E_c — modulul de elasticitate al materialului conductelor, iar d_c și h_c reprezintă diametrul, respectiv grosimea peretelui acestor conducte.

— să se țină seama că supapele de limitare a presiunii au o funcționare „liniștită" dacă : masa elementului mobil este mică, rigiditatea arcului este mare, deschiderea supapei este cît mai mare, conducta de legătură dintre pompă și supapă este scurtă, *forța de amortizare creată de amortizorul supapei crește cu creșterea presiunii uleiului* (această ultimă condiție este îndeplinită la supapa care echipează caseta II-modif. din tabelul 2).

Primit la redacție la 24 iulie 1985

BIBLIOGRAFIE

1. T. M. BAŞTA, *Snijenie şuma v ghidrosistemah maşin*, Vestnik maşinostroienie, 2, (1969).
2. J. BECKER, *How to quiet hydraulic systems and components*, Hydraulics and pneumatics, 4, p. 122—132 (1971).
3. GH. BUZDUGAN, E. MIHĂILESCU, M. RADEŞ, *Măsurarea vibraţiilor*, Edit. Academiei, R. S. România, Bucureşti, 1979.
4. S. T. CHIRIACESCU, I. POPESCU, I. BALCU, M. DANCAŞIU, RODICA MUNTEANU, *Cercetări teoretice şi experimentale asupra zgomotelor şi vibraţiilor din transmisiile hidraulice ale autovehiculelor*, Contract de cercetare ştiinţifică, Universitatea din Braşov, 1984.
5. S. T. CHIRIACESCU, *Vibraţiile maşinilor-unelte*, Universitatea din Braşov, 1984.
6. S. T. CHIRIACESCU, *Stabilitatea în dinamica aşchierii metalelor*, Edit. Academiei R.S. Romania, Bucureşti, 1984.
7. S. T. CHIRIACESCU, *Parametric instability of poppet relief hydraulic valves.* (In press), 1985.
8. A. DARABONT, I. IORGA, M. CIODARU, *Măsurarea zgomotelor şi vibraţiilor în tehnică* Edit. tehnică, Bucureşti, 1983.
9. J. B. DAVIS, R. J. GRANGER, *Réduire le bruit des machines-outils*, Machine Moderne, 782, p. 32—35 (1974).
10. A. S. GHELIMAN, F. A. FURMAN, *Rascet kolebanii obiemnîi ghidroperedaci s dlinimi maghistraliami*, Vestnik masinostroienie, 6, p. 39—42 (1971).
11. R. GÖSELE, *Zum Mechanismus der Geräuschentstehung bei Hochdruckpumpen*, *Konstruktion*, **29**, 9, p. 347—354 (1977).
12. W. L. GREEN, *The stability of poppet relief valves. A Sunmary*] Hydraulic Pneumatic Power, 213, p. 410—414 (1972).
13. J. W. HAGEL, *Unterschung des Flatterverhaltens federbelasteter Ventile*, Konstruktion, **20**, H1, 22—27 (1968).
14. FL. IONESCU, *Modelarea matematică şi simularea numerică structurată a supapelor de limitare a presiunii*, St. Cerc. Mec. Apl., **43**, 2, p. 167—188 (1981).
15. E. I. IUDIN, *Izolarea împotriva zgomotelor*. Edit. Tehnică, Bucureşti, 1968.
16. E. LEWIS, S. HANJOERG, *Sisteme automate hidraulice*, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1968.
17. I. MAZILU, V. MARIN, *Sisteme hidraulice automate*, Edit. Academiei R.S. România, Bucureşti, 1982.
18. R. MOLLE, *Ghidropnevmoavtomatika*, Masinostroienie, Moskva, 1975.
19. M. MUREŞAN, *Proiect de diplomă*, Univ. Braşov, 1984.
20. A. OPREAN, V. MARIN, A. DORIN, *Acţionări hidraulice*, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1976.
21. A. OPREAN, S. MEDAR, *Studiu asupra formării undelor staţionare şi influenţa lor asupra zgomotelor sistemelor hidraulice*, Construcţia de maşini, 10, p. 516—519 (1979).
22. A. OPREAN, S. MEDAR, *Studiu privind performanţele dinamice ale atenuatoarelor de zgomot din instalaţiile hidraulice*, Construcţia de maşini, 8—9 , p. 473—477 (1982).
23. A. OPREAN, FL. IONESCU, AL. DORIN, *Acţionări hidraulice. Elemente şi sisteme*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1982.
24. S. D. PONOMARIOV, ş.a., *Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini*, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1964.
25. W. M. J. SCHLOSSER, *A contribution to the analysis of the characteristics of hydraulic valves*, Hydraulic Pneumatic Power, Nov. 1971, p. 538—543.
26. B. T. SITNIKOV, I. B. MATVEEN, *Rascet i issledovanie predohranitelinîh i perelivnîh klapanov*, Izd. Masinostroienia, Moskva, 1972.
27. S. W. TODOROW, *Dynamisches Verhalten von Druckventilen*, Maschinen bautechnik, **23**, H3, p. 137—140 (1974).
28. J. TOURET, *Le bruit des installations industrielles*, Mécanique, materiaux, eléctricité, 361, p. 11—21 (1980).
29. * * * *Metode de măsurare a zgomotelor în industrie*, STAS 7150-77.
30. * * * ZF-Information. Prospecte, 1969—1975.

B. G. KORENEV, A. F. SMIRNOV (sub red.), *Spravocinik proectirovşcika: Dinamiceskii rascet speţialnîh injenernîh soorujenii i construcţii* (Îndrumătorul proiectantului : calculul dinamic al structurilor şi construcţiilor inginereşti speciale), Striizdat, Moscova, 1986

Un mare colectiv de autori publică, sub redacţia cunoscuţilor profesori din domeniul dinamicei construcţiilor, o lucrare monografică menită a umple un mare gol în literatura ştiinţifică asupra vibraţiilor.

De peste un veac, literatura de specialitate se ocupă de domenii tehnice în care vibraţiile au devenit „clasice" : organe de maşini, fundaţii de maşini, construcţii supuse seismelor, poduri etc.

Autorii monografiei ne atrag atenţia că există un mare număr de construcţii inginereşti, asupra cărora vibraţiile pot avea efecte dăunătoare şi care, multă vreme, au fost neglijate din acest punct de vedere.

Monografia cu titlul de mai sus cuprinde următoarele capitole : dinamica structurilor din industria minieră ; sarcinile dinamice din centralele atomo-electrice ; fundaţiile turboagregatelor de mare putere din centrale termoelectrice şi atomo-electrice ; fundaţiile cu izolare antivibratorie ale turboagregatelor ; calculul construcţiilor îngropate, la acţiunea undelor exploziilor ; protecţia construcţiilor industriale pentru procese cu pericol de explozie prin construcţii cu lansare uşoară ; calculul structurilor îngropate în sol ; construcţii hidrotehnice fluviale ; dinamica construcţiilor hidrotehnice portuare, maritime şi fluviale ; calculul structurilor maritime de exploatare a petrolului şi gazelor de mare adîncime, sub acţiunea valurilor ; dinamica conductelor ; calculul structurilor care susţin rezervoare parţial umplute, la acţiunea vîntului şi a seismelor ; calculul dinamic al podurilor de cale ferată cu mai multe deschideri ; dinamica podurilor de autostrăzi ; dinamica estacadelor-galerii ale transportoarelor ; catarge şi structuri de antene-catarg ; dinamica liniilor aeriene de transport de energie şi a instalaţiilor de distribuţie aflate în aer liber ; dinamica radiotelescoapelor ; dinamica turnurilor de răcire ; absorbitori dinamici de vibraţii pentru construcţii speciale.

Enumerarea capitolelor arată domeniile, respectiv grupele de specialişti interesaţi a consulta această monografie.

Sînt convins că procurarea acestei cărţi de către toţi cei care lucrează în domeniile respective — fie în original, fie sub forma unei traduceri în limba română — ar ajuta mult la îmbunătăţirea proiectării a numeroase feluri de construcţii supuse la acţiuni dinamice.

Gh. Buzdugan

R. SZILARD, D. ZIESING, S. PICKHARDT, *BASIC-Programme für Baumechanik und Statik* (Programe în BASIC pentru mecanica construcţiilor), Ernst u. Sohn, Berlin, 1986, 595 pag., 152 fig., 22 tab., 61 indic. bibl.

Industria electronică oferă microcalculatoare tot mai performante, capabile să rezolve probleme complexe rezervate anterior minicalculatoarelor. Programele elaborate pentru acestea din urmă nu pot fi implementate direct pe microcalculatoare datorită diferenţelor de memorie şi limbaj.

Prezenta culegere de programe permite inginerilor proiectanţi să rezolve exact, rapid şi economic majoritatea problemelor privind analiza structurilor chiar la locul lor de muncă, dotat cu un microcalculator. Programele sînt împărţite în trei grupe : programe pentru calculul numeric, programe pentru structuri din bare şi programe pentru structuri din plăci.

Cartea cuprinde şase capitole şi trei anexe. În capitolul introductiv (9 pagini) se precizează că programele scrise în limbajul MS-BASIC au fost testate pe un microcalculator SIRIUS-1 (Victor 9000). Se scot în evidenţă avantajele acestui limbaj faţă de limbajul FORTRAN şi se dau indicaţii privind transpunerea programelor pe orice alt microcalculator cu cel puţin 64 KO. Nu sînt prevăzute reprezentări grafice.

Capitolul doi (132 pagini) descrie biblioteca matematică formată din nouă programe, utilizabile ca subprograme. Primul program se referă la rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare

cu metoda Gauss, iar cel de al doilea la determinarea valorilor şi vectorilor proprii. Celelalte programe servesc la determinarea celei mai mici valori proprii, calculul matricelor inverse, calculul determinanţilor, operaţii cu matrice, dezvoltarea în serie Fourier, înmulţirea hipermatricelor şi rezolvarea pe blocuri a sistemelor mari de ecuaţii. Foarte util este faptul că cele mai multe exemple de aplicare a acestor programe sînt luate din mecanica construcţiilor.

Programele pentru structuri din bare sînt prezentate şi exemplificate în capitolele trei şi patru. Capitolul trei (74 pagini) cuprinde trei programe : pentru calculul grinzii simplu rezemate cu încărcări oarecare, a grinzii continue şi a grinzii pe mediu elastic (cu metoda coeficientului de pat). Cele patru programe pe care se axează capitolul patru (156 pagini) permit analiza majorităţii structurilor din bare. Astfel primul program se referă la structurile plane cu zăbrele, discutîndu-se şi problema numerotării optime a nodurilor şi posibilitatea rezolvării pe substructuri. Programul următor pentru analiza sistemelor plane de bare poate fi utilizat pentru calculul cadrelor, grinzilor Vierendeel, podurilor suspendate respectiv cu tiranţi înclinaţi, luînd în considerare acţiuni directe şi variaţia temperaturii. Un alt program permite calculul reţelelor de grinzi ortogonale sau oblice, iar ultimul din acest capitol rezolvă reţelele de grinzi pe mediu elastic, putînd fi utilizat şi pentru calculul aproximativ al plăcilor rezemate elastic. Capitolul cuprinde multe exemple de calcul : stîlp şi pod cu zăbrele ; are cu două articulaţii ; cadru complex pentru o hală industrială ; pod, planşeu şi radier pe reţea de grinzi.

Capitolul cinci, cel mai voluminos (186 pagini) se ocupă de cele patru programe pentru calculul plăcilor plane şi curbe, utilizîndu-se metoda elementelor finite. Pentru economie de timp s-au programat expresiile analitice ale matricelor rigidităţilor, iar pentru reducerea necesarului de memorie programele din acest capitol sînt împărţite în patru părţi : introducerea datelor, construirea matricei rigidităţilor structurii şi determinarea deplasărilor, afişarea deplasărilor şi calculul eforturilor, tipărirea datelor şi a rezultatelor. Programul pentru calculul şaibelor utilizează elemente triunghiulare, iar programele pentru calculul dalelor — elemente dreptunghiulare, respectiv triunghiulare. Ca exemple se prezintă analiza unei şaibe în consolă şi a unui colţ de cadru respectiv a unor plăci de planşeu izolate şi continue. Programul pentru calculul plăcilor subţiri de rotaţie acţionate axial-simetric utilizează elemente tronconice. Exemplificările se referă la rezervoare şi la mantaua unui turn de răcire hiperbolic.

Aşa cum rezultă din capitolul şase (18 pagini), o parte din programele prezentate anterior poate fi utilizată şi pentru rezolvarea unor probleme de dinamică cum sînt studiul vibraţiilor libere şi forţate respectiv al acţiunii seismice.

În anexe se descriu procedurile de introducere a datelor ce se repetă la programele de matematică respectiv la cele de statică şi sînt listate pe programele pentru alegerea programului dorit din cele trei grupe menţionate. Toate programele din carte sînt disponibile pe dischete pentru microcalculatoare SIRIUS şi pentru cele compatibile cu IBM-PC.

Se remarcă prezentarea unitară a fiecăruia dintre cele 20 programe, cuprinzînd următoarele faze : descrierea procedeului de calcul utilizat şi a performanţelor, indicarea dialogului de introducere a datelor, unul sau mai multe exemple de calcul şi listingul instrucţiunilor programului. Cu toate că statica matriceală inclusiv metoda elementelor finite sînt presupuse cunoscute, acestea sînt prezentate încă odată clar şi concis. Se accentuează asupra faptului că utilizatorul programelor trebuie să cunoască teoria de calcul şi limitele ei în vederea aplicării corecte a acestora. Programele sînt uşor de aplicat datorită faptului că datele se introduc interactiv, fără format, cu posibilităţi repetate de control şi corecţie, iar rezultatele se obţin sub formă de tabele clare.

Datorită ilustraţiilor bogate şi îngrijite şi a naturii materiei prezentate, bariera limbii poate fi uşor învinsă iar cartea celor trei autori din Dortmund poate fi de mare folos atît inginerilor proiectanţi şi cercetători, cît şi studenţilor din anii superiori. Este una din primele cărţi pe plan mondial cu această tematică şi ea mai completă şi apropiată de cerinţele practice ale analizei structurilor. În acelaşi timp oferă idei şi mijloace pentru lărgirea sferei de aplicare a microcalculatoarelor.

R. Friedrich

PHILLIP L. GOULD, *Finite Element Analysis of Shells of Revolution* (Analiza cu elemente finite a plăcilor curbe subţiri de rotaţie), Pitman Advanced Publishing Program, Boston, 1985, 210 pagini, 122 figuri, 21 tabele, 112 indic. bibl.

Structurile formate din plăci curbe subţiri axial-simetrice se utilizează frecvent la construcţiile industriale. Analiza acestora cu metodele analitice clasice este posibilă numai în

anumite condiţii privind geometria şi încărcările şi destul de anevoioasă.Metodele numerice şi în special metoda elementelor finite sînt mult mai eficiente în tratarea acestor structuri, aşa cum rezultă şi din cartea de faţă.

Primele două capitole ale cărţii (25 pagini) introduc elementele de bază necesare dezvoltării calculelor, iar următoarele două (104 pagini) formează partea ei centrală prin prezentarea analizei statice şi dinamice a structurilor din plăci de rotaţie. Urmează două capitole (39 pagini) ce tratează probleme speciale importante cum sînt luarea în considerare a neliniarităţilor geometrice şi a abaterilor dimensionale şi un ultim capitol (31 pagini) referitor la programe de calcul.

În capitolul 1 (6 pagini) se dezvoltă o metodologie unificată pentru calculul unor structuri cu geometrii variate, pe reazeme continue sau discontinue, sub acţiuni statice, dinamice şi termice simetrice şi nesimetrice. Pentru studiul neliniarităţilor fizice şi a deplasărilor mari se fac trimiteri la literatura de specialitate. Elementele de bază pentru calculul cu metoda elementelor finite sînt date în capitolul al 2-lea (19 pagini). După definirea geometrică a structurii şi a elementului finit inelar se pun în evidenţă variabilele cinematice şi statice cît şi dezvoltarea lor în serie Fourier. Urmează prezentarea legilor cinematice şi constitutive, a condiţiilor de margini şi a principalelor principii variaţionale.

Capitolul al 3-lea (51 pagini) se ocupă de analiza statică a structurilor ce fac obiectul cărţii. Funcţiile de formă sînt date atît pentru formularea în deplasări, cît şi pentru cea mixtă, ca şi prezentarea completă a metodei elementelor finite. Se indică soluţii ingenioase pentru tratarea plăcilor rigidizate, a plăcilor ramificate, a plăcilor prevăzute cu goluri (zona stîlpilor înclinaţi ai turnurilor de răcire), cît şi a efectelor locale ale stîlpilor asupra plăcii curbe. Partea teoretică se încheie cu probleme de convergenţă h şi p cu unele criterii de discretizare. Urmează multe exemple de calcul a unor plăci cilindrice, parabolice şi hiperbolice acţionate simetric şi nesimetric, cu punerea în evidenţă a convergenţei h (prin mărirea numărului de elemente finite), respectiv p (prin mărirea gradului polinoamelor de aproximare). Analiza dinamică este tratată în capitolul al 4-lea (53 pagini). După deducerea ecuaţiilor mişcării elementului finit şi a structurii, acestea se extind la diferitele tipuri de plăci prezentate în capitolul anterior. Se dezvoltă soluţiile de suprapunere modală şi se aminteşte de soluţia prin integrare directă. Ca exemple de calcul se tratează vibraţiile libere ale unor plăci cilindrice cu şi fără lichid înmagazinat respectiv comportarea acestora la explozii cît şi analiza unor turnuri de răcire hiperbolice în diferite situaţii de încărcare.

Neliniarităţile geometrice şi instabilitatea fac obiectul capitolului al 5-lea (17 pagini). După definirea termenilor suplimentari neliniari din ecuaţiile deformaţii-deplasări se scriu ecuaţiile de echilibru punîndu-se în evidenţă matricea rigidităţilor geometrice. Valoarea de bifurcaţie se exemplifică pe un turn de răcire hiperbolic în mai multe variante, analiza neliniară incrementală fiind prezentată doar pe scurt. Capitolul al 6-lea (22 pagini) tratează într-un mod original analiza plăcilor local neaxial-simetrice, datorită unor neregularităţi geometrice cum sînt tăieturi, orificii şi imperfecţiuni constructive. Zona respectivă se modelează cu elemente finite obişnuite, iar pentru trecerea la elementele inelare curente se introduc elemente finite de tranziţie. Acestea derivă din elementele finite obişnuite cu noduri punctuale prin definirea unor linii nodale. Datorită deviaţiilor locale, în sistemul global de ecuaţii armonicale sînt cuplate, spre deosebire de cazul obişnuit al armonicelor decuplate. Drept exemple de calcul se prezintă un hiperboloid de rotaţie cu şi fără imperfecţiuni şi o placă cilindrică cu un orificiu circular. Pentru extinderea tehnicii de modelare din acest capitol la probleme dinamice, de stabilitate şi neliniare sînt necesare cercetări suplimentare.

În capitolul al 7-lea (31 pagini) se prezintă posibilităţile oferite de două programe pentru calculul plăcilor curbe subţiri de rotaţie. Cartea se încheie cu un studiu detaliat al unui turn de răcire hiperbolic sub acţiunea greutăţii proprii, a vîntului şi cutremurului.

Prin prezentarea clară într-un spaţiu relativ restrîns a unui material bogat referitor la analiza plăcilor curbe subţiri de rotaţie, lucrarea de faţă este deosebit de valoroasă. Nu dă numai soluţii, dintre care multe originale, ci şi idei pentru continuarea cercetărilor în domeniul important abordat. Interesează nu numai inginerii constructori ci şi cei din specialităţile mecanică şi aeronautică, fiind singura carte cu acest subiect din literatura de specialitate.

R. Friedrich

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 46, nr.3 mai—iunie 19 7

SUMAR

STUDII

E. SOÓS, Condiţii de salt în electrodinamica corpurilor continue, mobile şi deformabile. I 205

V. HANDRA-LUCA, Studiul geometrico-cinematic al angrenajului globoidal neriglat 226

GH. OBLEMENCO, Calculul plăcilor ortotrope utilizîndu-se echivalenţi elastici idealizaţi 239

T. G. REDLOV şi R. LUGOJANU, Aplicarea metodei grinzii asociate în statica firului acţionat de un sistem spaţial de forţe concentrate şi distribuite 250

AL. D. STAN şi M. M. MITROIU, Protecţia imobilelor adiacente conductelor de gaze 260

GH. ZECHERU, GH. DRĂGHICI şi AL. POPA, Simularea numerică a funcţionării cleştilor multidimensionali pentru foraj-extracţie. I 270

RECENZII 287

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Articolele, originale și de înalt nivel științific, vor fi redactate într-un stil concis, evitîndu-se introducerile foarte lungi. Articolele vor fi dactilografiate la două rînduri, pe hîrtie albă de bună calitate, în două exemplare. Prima pagină trebuie să conțină titlul lucrării, numele autorului (autorilor) și locul de muncă precum și un rezumat de cel mult 150 cuvinte. Toate datele științifice și tehnice prezentate trebuie formulate în unități SI. Formulele trebuie dactilografiate sau scrise cu cerneală, clar și indicîndu-se caracterul literelor (aldine, italice etc.). Indicii inferiori și superiori trebuie indicați clar, pentru evitarea confuziilor. Ca semn zecimal se va utiliza virgula. Tabelele vor fi dactilografiate pe foi separate, cu indicarea titlurilor și cu numerotarea în cifre arabe. Desenele și diagramele trebuie executate în tuș, pe hîrtie de calc la dimensiuni aproximativ duble față de de acelea finale și cu litere scrise cu îngrijire și suficient de mari pentru a fi vizibile după reproducere. Referințele bibliografice vor fi menționate, pe cît posibil, în ordine alfabetică, la sfîrșitul articolului. În text vor fi indicate prin numărul din lista referințelor, în paranteze drepte.

Referințele din reviste vor conține inițiala și numele antorului (autorilor), titlul articolului (subliniat cu o linie), numele revistei (prescurtat conform uzanțelor internaționale), numărul volumului (subliniat dublu), numărul fasciculei și anul de apariției în paranteză, de exemplu:

1. S. AIZICOVICI, C. FETECĂU, Existence of Couette flows in second grade fluids Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., 31, 5 (1986).

Referirea la o carte se face indicînd inițiala și numele autorului (autorilor), titlul cărții (subliniat cu o linie), editura, orașul, anul apariției și numerele paginilor, dacă referirea se face la o parte a cărții, de exemplu:

3. W. FLÜGGE, Tensor Analysis and Continuum Mechanics. Springen-Verglag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972, p. 93—99.

Manuscrisele vor fi trimise la adresa: 79717 București 22, Calea Victoriei 125.

CONDIŢII DE SALT ÎN ELECTRODINAMICA CORPURILOR CONTINUE, MOBILE ŞI DEFORMABILE. I

de E. SOÓS
INCREST, Bucureşti

Prin postularea legilor de bilanţ se dă o prezentare unitară a teoriei lui Hertz, Lorentz, respectiv Minkowski. Se obţin atît legile locale diferenţiale de bilanţ, cît şi legile locale finite de bilanţ (relaţiile de salt). Se determină legea relativistă de transformare a densităţi superficiele de sarcină electrică şi a densităţii curentului superficial şi se arată că nu numai legile locale diferenţiale de bilanţ, ci şi cele finite (condiţiile de salt) sînt relativist invariante. Cele trei modele clasice sînt confruntate cu cele trei experimente clasice realizate de Rowland, Roentgen, respectiv Eichenwald şi se accentuează incompletitudinea confruntării, datorită lipsei unor teoreme de unicitate adecvate.

1. INTRODUCERE

Maxwell a prezentat versiunea finală a teoriei sale în anul 1873. În varianta astăzi acceptată, teoria maxwelliană a fost expusă axiomatic de Hertz în anul 1890 *). În principiu, teoria lui Maxwell se referă şi se aplică la corpuri aflate în repaus; deşi nu se specifică limpede reperul în raport cu care se consideră repausul, din aplicaţii rezultă că este vorba despre reperul Pămînt. Pentru eliminarea acestei restricţii, în 1890 Hertz [3] elaborează o electrodinamică a corpurilor mobile, bazată pe ipoteza eterului complet antrenat şi invariantă în raport cu transformarea Galilei-Newton **). Teoria hertziană este logic inconsistentă, deoarece lasă neclarificată natura cîmpului de viteze corespunzătoare eterului complet antrenat în acele domenii în care substanţa ponderabilă este absentă. La puţin timp după apariţia teoriei lui Hertz, Lorentz [17], [18] a edificat o teorie electromagnetică a corpurilor mobile în care este eliminată inconsistenţa logică a modelului hertzian şi care este bazată pe ipoteza eterului complet imobil ([17] §1, [18] cap. I, §7). Teoria lorentziană operează cu cîmpuri microscopice, ecuaţiile de cîmp macroscopice fiind obţinute prin medierea celor microscopice ***). Teoria lorentziană operează cu două tipuri de cîmpuri macroscopice; în acest sens ea constituie un stadiu intermediar între teoria hertziană — operînd cu cîmpuri legate de particulele mobile — şi teoria minkowskiană — operînd cu cîmpuri legate de reperele inerţiale. Într-adevăr, în teoria lui Lorentz cîmpul electric şi cel magnetic sînt legate de eter, cîmpul de polarizare şi cel de magnetizare

*) Pentru detalii vezi [1], [2].

**) Pentru variate expuneri ale teoriei hertziene vezi [4], [5] Cap. II; [6] p. 328-330; [7] Cap. III; [8] Cap. I; [9] p. 328–330; [10] Cap. V; [11], [12] Lecţiile 3, 4; [14] Cap. X; [15] Cap. 10, [16] Cap. IV.

***) Pentru detalii vezi [17] cap. IV, §26–34; [18] cap. IV, §114 şi [19], [20] cap. II.

sînt legate de particule; inducţiile au un caracter mixt şi joacă un rol auxiliar ([17], §31; [19], §114). Din această trăsătură specifică teoriei lorentziene urmează inevitabil că legile fundamentale ale electrodinamicii macroscopice lorentziene nu sînt invariante nici la grupul Galilei-Newton, nici la grupul Lorentz. Teoria este logic inconsistentă, deoarece nu afirmă nimic despre modul în care se poate determina cîmpul de viteze prezent în relaţiile fundamentale ale modelului şi evaluat în raport cu eterul imobil. Exact ca şi în cazul teoriei maxwelliene, la confruntarea teoriei cu experimentul se procedează de obicei ca şi cum cîmpul de viteze specific modelului ar fi cel raportat la reperul Pămînt *). În anul 1905 apare lucrarea lui Einstein [25] dedicată, conform titlului, electrodinamicii corpurilor mobile, dar conţinînd în realitate o nouă teorie a timpului şi spaţiului. Aparatul matematic necesar exprimării noilor idei fizice este rapid elaborat de Minkowski [26], [27]. Noua teorie fizică, îmbinată cu noua teorie matematică, i-a permis lui Minkowski [28] să facă un pas decisiv pentru rezolvarea problemei ce constituie titlul lucrării lui Einstein. Electrodinamica corpurilor mobile a lui Maxwell are la bază negarea existenţei eterului. Noua teorie elimină astfel inconsistenţele logice inerente teoriei hertziene, respectiv lorentziene. Teoria minkowskiană, mai exact acea parte a ei care a fost elaborată axiomatic de Minkowski, se formulează cu ajutorul unor relaţii cvadrivectoriale şi cvadritensoriale. În acest mod legile fundamentale ale noii electrodinamici, mai precis legile locale diferenţiale de bilanţ, satisfac automat cerinţa invarianţei lor la transformările Lorentz, adică au aceeaşi formă în orice reper inerţial. Astfel, rolul special al unor repere privilegiate, specific atît teoriei lui Hertz, cît şi teoriei lui Lorentz, este complet eliminat.

Apariţia celor trei teorii a fost rapid însoţită de confruntarea lor cu rezultatele experimentale privind electrodinamica corpurilor mobile. Dintre experimentele clasice vom aminti doar trei: cel efectuat de Rowland în 1876, de Roentgen în 1888, respectiv de Eichenwald între anii 1901—1903 **). În experimentul lui Rowland se cercetează efectele magnetice produse de sarcini electrice distribuite pe suprafaţa unui conductor mobil (relativ la reperul Pămînt). Analiza efectuată a arătat că sarcinile electrice aflate în repaus faţă de conductorul mobil se comportă asemănător cu un sistem de sarcini electrice care se mişcă relativ la conductorul imobil (faţă de reperul Pămînt). În ambele cazuri se constată apariţia unui cîmp magnetic. Cu alte cuvinte, curentul (superficial) de convecţie — prezent în primul caz — este echivalent, cel puţin calitativ, cu un curent (superficial) de conducţie — prezent în al doilea caz — în privinţa capacităţii celor două sisteme fizice de a produce un cîmp magnetic în vecinătatea lor. În experimentul lui Roentgen se cercetează efectele magnetice produse de sarcini electrice distribuite pe suprafaţa unui izolator mobil. Din punct de vedere calitativ rezultatele obţinute sînt similare celor observate în

*) Pentru variate expuneri ale teoriei lorentziene vezi [5] cap. II; [6] p. 392—404; [7] cap. IV, §1—6; [8] cap. I; [9] p. 264—268; [13] lecţia 5. Pentru teorii de tip Lorentz, vezi, de exemplu, modelele elaborate în [21], [22], secţiunile 266—291, [23], [24].

**) Pentru detalii privind aceste experimente vezi [5] cap. I, §2; cap. II, §4; cap. VI, § 23; [6] p. 305—306, 399—401; [7] cap. III; cap. IX; [8] cap. I; [10] cap. V; [12], [13] p. 103, 128—130, 141—143, [14] p. 206—207; [17] cap. IV, §26—34; [29] cap. IV, §34; [30] cap. VIII, §111; [31] Cap. XIV, §14; [32] p. 64—67.

experimentul lui Rowland. Acordul cantitativ însă nu are loc. Intensitatea cîmpului magnetic — în condiții experimentale de altfel identice — este mai mică în primul decît în al doilea caz. Rezultatele experimentale precedente au fost confirmate de cercetările lui Eichenwald. În plus, Eichenwald a constatat independența intensității cîmpului magnetic produs, de natura izolatorului utilizat, în cazul în care se mișcă simultan atît armăturile metalice ale condensatorului implicat în experiment, cît și dielectricul cuprins între plăci.

Cele trei electrodinamici — reciproc contradictorii — ale corpurilor mobile au fost confruntate cu faptele experimentale amintite.

Confruntarea teoriei cu experimentul presupune modelarea — prin idealizare — a situației experimentale reale. În cercetările efectuate de Rowland, Roentgen și Eichenwald este implicat un condensator plan, format din două plăci metalice avînd formă circulară (armăturile condensatorului) și dintr-un dielectric solid cu formă cilindrică (miezul condensatorului). În afara acestor două corpuri, în experimente este implicat un al treilea corp — aerul ce înconjoară condensatorul — și despre care se presupune (tacit) că este în repaus relativ la reperul Pămînt, este nemărginit și poate fi modelat printr-un dielectric ideal, nepolarizabil. În cadrul confruntării teorie-experiment este necesar să prezentăm explicit toate relațiile matematice care descriu — conform teoriei analizate — modul în care condensatorul încărcat și pus în rotație uniformă în jurul axei sale de simetrie (experimentul Eichenwald) produce cîmpul electromagnetic. Pentru realizarea acestui deziderat este indispensabilă modelarea matematică — din punct de vedere geometric — a corpurilor implicate în experiment. În timp ce în privința modelării geometrice a izolatorului și a aerului (înconjurător) nu apar dificultăți, problema modelării geometrice a armăturilor rămîne complet neelucidată în analizele dedicate acestei probleme (vezi pentru exemplificare lucrările din precedenta notă de subsol). Lipsa de rigoare caracteristică confruntării teorie-experiment își are originea în primul rînd în absența modelului matematic geometric (desigur idealizat) al armăturilor. Absența unui astfel de model în capitolele de electrodinamică a majorității lucrărilor menționate (și a altora, lăsate neamintite) este ciudată, deoarece modelul (idealizat) adecvat este prezentat și utilizat în capitolele de electrostatică a lucrărilor respective. Ca exemplu tipic (dar nu unic !) menționez textul clasic al lui Friș și Timoreva [33]. În paragrafele dedicate condensatorului plan infinit (cap. XIV, §118, 121, 125, 128, 131, 137) se determină cîmpul electrostatic produs de un sistem de sarcini electrice uniform distribuite pe o placă metalică infinită, modelînd matematic placa (armătura unui condensator) printr-o suprafață plană, la traversarea căreia componenta normală a cîmpului electrostatic are un salt proporțional cu densitatea superficială a sarcinilor electrice date. După ce problema matematică este astfel clar formulată, se obține, pe baza unor considerații de simetrie, cîmpul electrostatic căutat. Trebuie reținut ca un fapt esențial că, atît la formularea, cît și la rezolvarea matematică a problemei, pe lîngă ecuațiile diferențiale de cîmp, un rol decisiv revine atît modelării matematice a corpului armăturii printr-o suprafață singulară, cît și exprimării clare a condițiilor de salt ce trebuie să fie satisfăcute la traversarea acestei suprafețe. Prin urmare,

condiţiile de salt (sau principiile locale finite de bilanţ) fac parte integrantă din orice teorie electrodinamică complet formulată. Prezentarea lor se poate face coerent numai prin introducerea prealabilă a conceptului de densitate superficială de sarcină electrică, tratat ca o noţiune primară a teoriei. Strecurarea acestui concept în model prin procedee neriguroase şi nejustificate de trecere la limită produce confuzii şi trebuie să fie evitată la formularea modelului matematic.

Consider că deosebirea în rigoare, existentă în tratarea riguroasă a problemelor de electrostatică, respectiv în tratarea neriguroasă a celor de electrodinamică, poate fi eliminată numai dacă şi în electrodinamică este urmată metodologia schiţată mai sus. Acest deziderat poate fi realizat numai dacă în cadrul teoriei sînt clar formulate condiţiile de salt satisfăcute la traversarea unei suprafeţe singulare (materială, dacă modelează de exemplu armăturile condensatorului, nematerială dacă modelează de exemplu o undă electromagnetică sferică). Formularea relaţiilor de salt impune introducerea prealabilă a mărimilor ce caracterizează distribuţia şi mişcarea sarcinilor electrice distribuite pe suprafeţele singulare. Aceste mărimi trebuie să facă parte din setul conceptelor primare ale teoriei. Totodată, analiza situaţiilor specifice experimentelor clasice arată că principiile locale finite de bilanţ (condiţiile de salt) trebuie să fie suficient de generale ca să permită atît modelarea cazurilor în care cîmpul de viteze este discontinuu la traversarea suprafeţei singulare, cît şi situaţii în care suprafaţa singulară (materială) are viteză nenulă, dar viteza sa de deplasare este nulă *).

Există un număr relativ mare de lucrări în care este discutată mai mult sau mai puţin detaliat problema relaţiilor de salt. Din studiul lucrărilor consultate am ajuns la concluzia că tratările analizate nu îndeplinesc cel puţin unul din dezideratele prezentate mai sus şi din acest motiv pe baza lor nu se poate realiza riguros confruntarea teoriei cu experimentul.

Astfel, în monografia lui Truesdell şi Toupin ([22], secţiunile 278, 284), în tratatul lui Luneburg [34] şi în cartea lui Gründeman [35], condiţiile de salt sînt prezentate numai în cazul în care densitatea superficială a curentului de conducţie este nulă. În studiile elaborate de Skorupski [36], de Costen şi Adamson [37] şi de Homentcovschi [38], distribuţiile superficiale nu sînt tratate ca fiind concepte primare, ci sînt introduse ulterior, prin procedee mai mult sau mai puţin clare de trecere la limită. În lucrarea lui Panaitescu [39] apar, cu statut de concept primar, două distribuţii superficiale de sarcină electrică, dar numai o singură distribuţie superficială de curent electric, în cazul unei singure suprafeţe (materiale) singulare. Cauza acestei asimetrii nu este clarificată de autor. În monografia lui Jaunzemis ([40], secţiunea 13), în forma finală a condiţiilor de salt, apar atît densitatea superficială de sarcină, cît şi cea de curent. Aceste entităţi nu sînt însă prezente în ecuaţiile globale de bilanţ stipulate axiomatic. Din acest motiv, apariţia lor ulterioară în relaţiile locale finite de bilanţ nu rezultă deductiv din legile fundamentale admise ca bază a teoriei.

*) Primul caz apare în experimentul lui Roentgen, al doilea în cel al lui Rowland.

Punctele de pornire ale autorilor de mai sus, împreună cu formele finale în care ei prezintă sistemul ecuațiilor locale (diferențiale și finite) de bilanț au constituit — în această lucrare — baza de plecare pentru obținerea pe o cale logic consistentă a condițiilor de salt. În lucrare mărimile ce caracterizează distribuția sarcinilor electrice pe o suprafață singulară (materială) sînt tratate ca entități primare ale teoriei. Contribuția acestui sistem fizic (particular) la crearea cîmpului este luată în considerație prin includerea sa explicită în legile globale de bilanț axiomatic stipulate.

O readaptare a procedeelor și a formelor finale ale relațiilor de salt expuse în lucrările clasice dedicate subiectului nu este posibilă *). Astfel, Einstein și Laub scriu [41]: „Este remarcabil că pentru vectorii **E**, **D**, **H**, **B** condițiile la limită pe frontiera a două medii sînt aceleași ca și pentru corpuri în repaus. Aceasta urmează nemijlocit din ecuațiile (diferențiale n.m.) de cîmp". Dar această afirmație este falsă dacă cele două medii se află în mișcare relativă. Sesizînd greșeala, autorii reanalizează problema în [42]. Soluția finală oferită de Einstein și Laub este acceptabilă însă numai în cazul în care saltul vitezei la traversarea suprafeței singulare ce separă cele două medii este nul. Această restricție nu este însă menționată de autori și, evident, nu este îndeplinită în cazul experimentelor clasice amintite. Forma particulară a relațiilor de salt din [42] este perpetuată de Laue [5], Sommerfeld [29] și Pauli [43].

Tratarea și rezolvarea defectuoasă a problemei privind forma condițiilor de salt este caracteristică și majorității monografiilor mai noi dedicate electrodinamicii corpurilor mobile **). De asemenea, într-un număr de tratate mai vechi sau mai noi, bine cunoscute, problema relațiilor de salt este amintită prin referiri verbale și observații vagi sau nu este menționată deloc ***). Este evident că o astfel de abordare este incompletă, deoarece legile locale finite de salt fac parte integrantă din teoria matematică a electromagnetismului și modelarea matematică clară a fenomenelor reale nu este posibilă fără ele.

Din analiza experimentelor clasice rezultă că nu este posibilă confruntarea electrodinamicii relativiste a corpurilor mobile cu faptele experimentale fără cunoașterea modului în care se modifică mărimile ce caracterizează distribuția superficială a sarcinilor electrice la o schimbare de reper, descrisă printr-o transformare Lorentz. În ciuda acestui fapt, cu excepția remarcabilă a lucrării lui Skorupski [36], literatura de specialitate consultată de mine nu tratează deloc această problemă.

Este de asemenea evident că nici analiza comparativă a diferitelor electrodinamici ale corpurilor mobile nu este realizabilă fără formularea explicită a condițiilor de salt și a relațiilor de transformare amintite. În acest sens este semnificativ studiul comparativ efectuat în 1985 de Markcev [2]. Autorul analizează relațiile ce există între diferitele variante și generalizări ale teoriei maxwelliene, prezentînd în acest scop 12 alternative dintre cele multe existente. Expunerea alternativelor se rezumă însă numai la indicarea ecuațiilor diferențiale specifice celor 12 modele, formele locale finite ale legilor de bilanț, deci condițiile de salt specifice

*) Vezi [5] cap. VI, §23; [29] cap. IV, §34; [41], [42], [43] cap. III, § 53.

**) Vezi, de exemplu, [20] cap. III, §4; [30], §110; [31] cap. XIV, §14.5; [44] cap. IX, § 57; [45] cap. VII, §5.

***) Vezi [7], [46] — [50].

celor 12 teorii, fiind complet ignorate. Din acest motiv analiza este incompletă și concluziile sale sînt doar parțial justificate.

În prezenta lucrare entitățile ce caracterizează distribuția superficială a sarcinilor electrice care pot exista pe o suprafață singulară (materială) sînt considerate ca fiind concepte primare. În prima parte a lucrării se prezintă o expunere axiomatică a electrodinamicii corpurilor mobile de tip Hertz, Lorentz, respectiv Minkowski. Legile fundamentale de bilanț specifice celor trei modele sînt introduse axiomatic în formă globală și conțin explicit distribuțiile superficiale de sarcină electrică. În acest fel se precizează clar modul în care aceste sisteme fizice particulare, dar esențiale, contribuie la producerea cîmpului. Totodată, pe această cale se obțin într-un mod unitar atît legile locale diferențiale de bilanț, cît și cele finite, deci relațiile de salt. O atenție deosebită se acordă semnificației fizice a cîmpurilor ce apar în cele trei teorii concurente. Acest aspect *semantic* este, de obicei, insuficient clarificat în expunerile existente. Se arată că relațiile de salt specifice electrodinamicii minkowskiene sînt relativist invariante, aspect *complet ignorat* de literatura de specialitate consacrată electromagnetismului relativist. În ultima parte a lucrării cele trei teorii sînt confruntate cu experimentele clasice ale lui Rowland, Roentgen și Eichenwald. Confruntarea este realizată prin formularea precisă a problemelor la limită care modelează matematic condițiile reale (idealizate) ale experimentelor. Armăturile condensatorului implicat în experimente sînt modelate matematic prin suprafețe singulare (materiale), identificate (geometric) cu două plane paralele între ele. O astfel de idealizare corespunde neglijării efectelor de contur și conferă soluției obținute un domeniu limitat de valabilitate *).

Accentuez faptul că în această lucrare pentru fiecare problemă la limită se va da o soluție care satisface atît ecuațiile diferențiale, cît și condițiile de salt. La nivelul actual de elaborare a electrodinamicii nu există teoreme de unicitate suficient de generale și adecvate problemelor reale. În acest sens, în majoritatea cazurilor tratate se poate vorbi despre o soluție posibilă, fără a avea garanția unicității sale. Într-adevăr, teoremele de unicitate existente necesită precizarea apriorică a unor valori limită, a căror cunoaștere devine principial posibilă numai după rezolvarea problemei**). Analiza comparativă critică întreprinsă în lucrarea [57] arată că dificultățile semnalate nu sînt izolate. O expunere coerentă, suficient de completă și generală a electrodinamicii lipsește în prezent, după mai mult de 100 de ani de la apariția clasicului tratat al lui Maxwell. Rezultatele cuprinse în lucrare pot constitui un prim pas posibil în direcția îmbunătățirii situației. Un al doilea pas va fi realizat într-o cercetare viitoare. Punctul de pornire va fi constituit dintr-o prezentare unitară a electrodinamicii, bazată pe formularea globală a legilor fundamentale de bilanț într-o varietate cvadridimensională, fără o structură metrică dinainte dată. În acest cadru general, modelele de tip Hertz, Lorentz, respectiv Minkowski pot fi obținute prin particularizări potrivite, specifice teoriilor menționate.

---

*) Vezi în acest sens [51] cap. VIII, § 87; [52] cap. III, IV; [53] cap. I, § 6; Cap. III, § 3; [54], cap. 9, § 9.1.

**) Vezi, de exemplu, [15] cap. 2, § 8.1.3; [55], [56].

Deoarece la baza considerațiilor ce urmează stau formele tridimensionale ale legilor globale de bilanț, închei acest paragraf cu prezentarea acelor teoreme integrale *) care vor interveni în continuare (fig. 1):

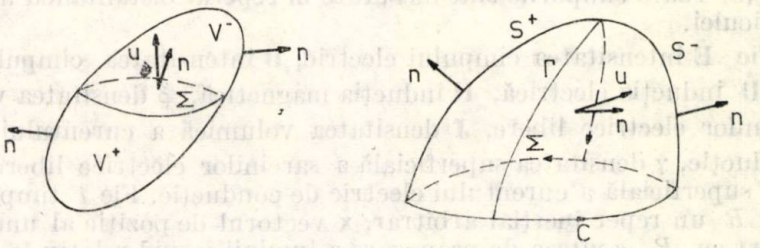


Fig. 1. — Volume, suprafețe și curbe materiale.

$$\iint_S \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{a}\,\mathrm{d}V - \iint_{\Sigma\cap V} [\mathbf{a}]\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S, \tag{1.1}$$

$$\int_C \mathbf{a}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x} = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S - \int_\Gamma [\mathbf{a}]\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}, \quad \Gamma = S\cap\Sigma, \tag{1.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \iint_S \left(\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t} + \mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{a} + \operatorname{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{v})\right)\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S + \tag{1.3}$$

$$+\int_\Gamma [\mathbf{a}\times(\mathbf{u}-\mathbf{v})]\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

În (1.1) V este un volum material, limitat de suprafața închisă S; în (1.2) și (1.3) S este o suprafață materială limitată de curba materială închisă C; $\mathbf{v}$ este un cîmp de viteze dat care caracterizează mișcarea elementelor materiale relativ la un reper presupus a fi inerțial; Σ este o suprafață singulară (materială sau nu), a cărei mișcare este caracterizată de cîmpul de viteze $\mathbf{u}$; $\mathbf{n}$ este versorul normalei la suprafața considerată, avînd orientarea în acord cu relațiile precedente; $\mathbf{a}$ este un cîmp vectorial dat, de clasă C^1 în domeniul său de definiție și avînd un salt finit la traversarea suprafeței singulare Σ, saltul fiind de clasă C^0 pe Σ; în fine (vezi și fig. 1):

$$[\mathbf{a}] = \mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^- \text{ pe } \Sigma, \tag{1.4}$$

semnificația valorilor limită $\mathbf{a}^+$ și $\mathbf{a}^-$ fiind cea uzuală; $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ reprezintă derivata temporală materială.

*) Vezi, de exemplu, [23], [58] cap. II și anexa 14, [59].

2. TEORIA LUI HERTZ

În cadrul teoriei lui Hertz se admite că : (*a*) Eterul este complet antrenat. (*b*) Toate cîmpurile sînt măsurate în reperul instantaneu de repaus al particulei.

Fie $\mathring{\mathbf{E}}$ intensitatea cîmpului electric, $\mathring{\mathbf{B}}$ intensitatea cîmpului magnetic, $\mathring{\mathbf{D}}$ inducţia electrică, $\mathring{\mathbf{H}}$ inducţia magnetică, $\mathring{\rho}$ densitatea volumică a sarcinilor electrice libere, $\mathring{\mathbf{J}}$ densitatea volumică a curentului electric de conducţie, $\mathring{\gamma}$ densitatea superficială a sarcinilor electrice libere, $\mathring{\mathbf{i}}$ densitatea superficială a curentului electric de conducţie. Fie t timpul newtonian, R un reper inerţial arbitrar, $\mathbf{x}$ vectorul de poziţie al unui punct în raport cu R, c viteza de propagare a luminii în vid relativ la R. Cîmpurile introduse mai sus sînt funcţii de $(\mathbf{x}, t)$ şi sînt determinate în reperul instantaneu de repaus al particulei care la momentul t se află în locul $\mathbf{x}$. Vom desemna cu $\mathbf{v}$, funcţie de $(\mathbf{x}, t)$, viteza acestei particule faţă de R. Vom nota cu V, S, C un volum, o suprafaţă, respectiv o curbă materială, iar cu Σ o suprafaţă singulară (materială sau nu) la traversarea căreia cîmpurile pot avea salturi finite. Cu $\mathbf{u}$ notăm viteza unui punct a lui Σ (vezi fig. 1), $u_n = \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}$ reprezentînd viteza de deplasare a lui Σ faţă de reperul ales R.

În teoria lui Hertz postulăm valabilitatea următoarelor legi globale de bilanţ :

$$\iint_S \mathring{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_V \mathring{\rho}\,\mathrm{d}V + \iint_{V\cap\Sigma} \mathring{\gamma}\,\mathrm{d}S, \quad \iint_S \mathring{\mathbf{B}}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = 0, \tag{2.1}$$

$$\int_C \mathring{\mathbf{E}}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x} = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \mathring{\mathbf{B}}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S, \tag{2.2}$$

$$\int_C \mathring{\mathbf{H}}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \mathring{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S + \frac{1}{c}\iint_S \mathring{\mathbf{J}}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S + \frac{1}{c}\int_\Gamma (\mathring{\mathbf{i}}\times\mathbf{n})\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}, \quad \Gamma = S\cap\Sigma, \tag{2.3}$$

cu restricţia

$$\mathring{\mathbf{i}}\cdot\mathbf{n} = 0 \quad \text{pe } \Sigma.$$

În (2.1) V este un volum material arbitrar, limitat de suprafaţa materială închisă S; în (2.2) şi (2.3) C este o curbă materială arbitrară pe care se sprijină suprafaţa materială arbitrară S. Semnificaţia fizică a restricţiei (2.4) rezultă nemijlocit din faptul că $\mathring{\mathbf{i}}$ este densitatea superficială a curentului de conducţie distribuit pe suprafaţa singulară (materială) Σ.

Presupunînd condiţii de regularitate uzual admise în mecanica corpurilor continue deformabile, din postulatul admis rezultă, pe baza formulelor (1.1) — (1.3), valabilitatea următoarelor *legi locale diferenţiale*

de bilanț:

$$\operatorname{div} \mathring{\mathbf{D}} = \mathring{\rho}, \operatorname{div} \mathring{\mathbf{B}} = 0, \tag{2.5}$$

$$\operatorname{rot} \mathring{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathring{\mathbf{B}}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\mathring{\mathbf{B}} \times \mathbf{v})\right) \text{ sau } \operatorname{rot}\left(\mathring{\mathbf{E}} - \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathring{\mathbf{B}}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathring{\mathbf{B}}}{\partial t}, \tag{2.6}$$

$$\operatorname{rot} \mathring{\mathbf{H}} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathring{\mathbf{D}}}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathring{\mathbf{D}} + \operatorname{rot}(\mathring{\mathbf{D}} \times \mathbf{v})\right) + \frac{1}{c}\mathring{\mathbf{J}} \text{ sau} \tag{2.7}$$

$$\operatorname{rot}\left(\mathring{\mathbf{H}} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathring{\mathbf{D}}\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathring{\mathbf{D}}}{\partial t} + \frac{1}{c}\mathring{\mathbf{J}} + \frac{1}{c}\mathring{\rho}\,\mathbf{v}. \tag{2.7'}$$

Analog, folosind (1.1) — (1.3) și (2.4), obținem *relațiile de salt* sau *legile locale finite de bilanț*, specifice teoriei lui Hertz și valabile pe Σ:

$$[\mathring{\mathbf{D}}] \cdot \mathbf{n} = -\mathring{\gamma}, [\mathring{\mathbf{B}}] \cdot \mathbf{n} = 0, \tag{2.8}$$

$$[\mathring{\mathbf{E}} - \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathring{\mathbf{B}}] \times \mathbf{n} = -\frac{1}{c}[\mathring{\mathbf{B}} \times \mathbf{u}] \times \mathbf{n} \text{ sau}$$

$$[\mathring{\mathbf{E}} - \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathring{\mathbf{B}}] \times \mathbf{n} = -\frac{1}{c}[\mathring{\mathbf{B}}]\, u_n, \tag{2.9}$$

$$[\mathring{\mathbf{H}} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathring{\mathbf{D}}] \times \mathbf{n} = -\frac{1}{c}[\mathring{\mathbf{D}} \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n} - \frac{1}{c}(\mathbf{n} \times \mathring{\mathbf{i}}) \times \mathbf{n} \text{ sau} \tag{2.10}$$

$$[\mathring{\mathbf{H}} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathring{\mathbf{D}}] \times \mathbf{n} = \frac{1}{c}[\mathring{\mathbf{D}}]\, u_n + \frac{1}{c}\mathring{\mathbf{i}} + \frac{1}{c}\mathring{\gamma}\,\mathbf{u}. \tag{2.10'}$$

În acord cu ipotezele de bază ale teoriei lui Hertz, admitem că în cazul unui corp electric polarizabil și magnetizabil, conductor de curent, omogen, izotrop și liniar, sînt valabile următoarele *ecuații constitutive*:

$$\mathring{\mathbf{D}} = \varepsilon \mathring{\mathbf{E}}, \quad \mathring{\mathbf{H}} = \mu^{-1} \mathring{\mathbf{B}}, \quad \mathring{\mathbf{J}} = \sigma \mathring{\mathbf{E}}, \tag{2.11}$$

unde ε (coeficientul de polarizare), μ (coeficientul de magnetizare) și σ (coeficientul de conducție) sînt constante de material.

Se constată că ecuațiile (2.11) sînt identice cu cele uzual admise în cazul unui corp aflat în repaus. Această coincidență are la bază semnificația fizică a cîmpurilor implicate în modelul hertzian.

Accentuez faptul că relațiile (2.5) — (2.10) au valabilitate generală în cadrul teoriei lui Hertz, fiind independente de natura corpului considerat. În schimb, relațiile (2.11) sînt specifice unui material particular.

Principalele caracteristici ale teoriei lui Hertz pot fi rezumate astfel: (*a*) Este invariantă la transformarea Galilei-Newton. Acest fapt rezultă nemijlocit din ipotezele de bază sau prin calcul direct. (b) Este în dezacord cu experimentul, chiar în cazul efectelor de ordinul 1. (c) Este incon-

sistentă din punct de vedere logic, deoarece cîmpul de viteze principial nu poate fi definit în acele regiuni în care nu există substanţă ponderabilă.

3. TEORIA LUI LORENTZ

În cadrul teoriei lui Lorentz se admite că : (*a*) Eterul este complet imobil, reprezentînd un reper inerţial privilegiat $\overset{*}{R}$. (*b*) Cîmpul electric $\overset{*}{\mathbf{E}}$ (media lorentziană a cîmpului electric microscopic) şi cîmpul magnetic $\overset{*}{\mathbf{B}}$ (media lorentziană a cîmpului magnetic microscopic) sînt măsurate (prin intermediul forţei Lorentz) în reperul privilegiat $\overset{*}{R}$; polarizarea $\mathring{\mathbf{P}}$, magnetizarea $\mathring{\mathbf{M}}$, densitatea volumică a sarcinilor electrice libere $\mathring{\rho}$, densitatea volumică a curentului electric de conducţie $\mathring{\mathbf{J}}$, densitatea superficială a sarcinilor electrice libere $\mathring{\gamma}$, densitatea superficială a curentului electric superficial $\mathring{\mathbf{i}}$ sînt măsurate în reperul instantaneu de repaus al particulei. Această natură dublă a cîmpurilor implicate în model decurge nemijlocit din modul în care Lorentz obţine, prin mediere şi prin utilizarea regulii clasice de compunere a vitezelor, cîmpurile macroscopice din cele microscopice. Inducţia electrică $\hat{\mathbf{D}}$ şi cea magnetică $\hat{\mathbf{H}}$ au caracter mixt şi secundar, fiind introduse prin următoarele relaţii de definiţie :

$$\hat{\mathbf{D}} = \overset{*}{\mathbf{E}} + \mathring{\mathbf{P}}, \quad \hat{\mathbf{H}} = \overset{*}{\mathbf{B}} - \mathring{\mathbf{M}}. \tag{3.1}$$

Fie t timpul newtonian, $\mathbf{x}$ vectorul de poziţie al unui punct în raport cu $\overset{*}{R}$, iar c viteza de propagare a luminii relativ la reperul privilegiat $\overset{*}{R}$. Cîmpurile introduse mai sus sînt funcţii de $(\mathbf{x}, t)$. Desemnăm cu $\mathbf{v}$, funcţie de $(\mathbf{x}, t)$, viteza unei particule în raport cu reperul $\overset{*}{R}$, iar cu $\mathbf{u}$, funcţie de $(\mathbf{x}, t)$, viteza unui punct al suprafeţei singulare Σ, evaluată de asemenea relativ la $\overset{*}{R}$.

În cadrul teoriei lui Lorentz postulăm valabilitatea următoarelor *legi globale de bilanţ* :

$$\iint_S \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S = \iiint_V \mathring{\rho}\, \mathrm{d}V + \iint_{V \cap \Sigma} \mathring{\gamma}\, \mathrm{d}S, \quad \iint_S \mathring{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S = 0, \tag{3.2}$$

$$\int_C \left(\overset{*}{\mathbf{E}} + \frac{1}{c}\, \mathbf{v} \times \overset{*}{\mathbf{B}} \right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = -\frac{1}{c} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_S \overset{*}{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S, \tag{3.3}$$

$$\int_C \left(\hat{\mathbf{H}} - \frac{1}{c}\, \mathbf{v} \times \overset{*}{\mathbf{E}} \right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{1}{c} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_S \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}S + \frac{1}{c} \iint_S \mathring{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S +$$

$$+ \frac{1}{c} \int_\Gamma (\mathring{\mathbf{i}} \times \mathbf{n}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}, \quad \Gamma = S \cap \Sigma, \tag{3.4}$$

cu restricția

$$\mathring{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ pe } \Sigma .$$

Semnificația lui V, S, C în (3.2)—(3.4), ca și a restricției (3.5), este aceeași ca în cazul precedent.

Ca mai înainte, din (3.2) — (3.4) rezultă valabilitatea următoarelor *legi locale diferențiale de bilanț*:

$$\operatorname{div} \hat{\mathbf{D}} = \mathring{\rho}, \quad \operatorname{div} \overset{*}{\mathbf{B}} = 0, \quad \operatorname{rot} \overset{*}{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overset{*}{\mathbf{B}}}{\partial t}, \tag{3.6}$$

$$\operatorname{rot} \hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \hat{\mathbf{D}}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\mathring{\mathbf{P}} \times \mathbf{v})\right) + \frac{1}{c}\mathring{\mathbf{J}} + \frac{1}{c}\mathring{\rho}\,\mathbf{v} \text{ sau} \tag{3.7}$$

$$\operatorname{rot}\left(\hat{\mathbf{H}} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathring{\mathbf{P}}\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial \hat{\mathbf{D}}}{\partial t} + \frac{1}{c}\mathring{\mathbf{J}} + \frac{1}{c}\mathring{\rho}\,\mathbf{v}. \tag{3.7'}$$

Aceste relații, împreună cu formulele de definiție (3.1), au fost obținute de Lorentz prin medierea ecuațiilor diferențiale de cîmp satisfăcute axiomatic de cîmpurile lorentziene microscopice.

Analog, din (3.2) — (3.5), prin utilizarea formulelor (1.1) — (1.3), rezultă *relațiile de salt specifice* teoriei lui Lorentz:

$$[\hat{\mathbf{D}}] \cdot \mathbf{n} = -\mathring{\gamma}, \quad [\mathring{\mathbf{B}}] \cdot \mathbf{n} = 0, \quad [\overset{*}{\mathbf{E}} + \frac{1}{c}\mathbf{u} \times \overset{*}{\mathbf{B}}] \times \mathbf{n} = 0 \text{ sau}$$

$$[\overset{*}{\mathbf{E}}] \times \mathbf{n} = -\frac{1}{c}[\overset{*}{\mathbf{B}}]\, u_n, \tag{3.8}$$

$$[\hat{\mathbf{H}} - \frac{1}{c}\mathbf{u} \times \hat{\mathbf{D}}] \times \mathbf{n} = \frac{1}{c}[\mathring{\mathbf{P}} \times \mathbf{v}] \times \mathbf{n} - \frac{1}{c}(\mathring{\mathbf{i}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} \quad \text{sau} \tag{3.9}$$

$$[\hat{\mathbf{H}}] \times \mathbf{n} = \frac{1}{c}[\hat{\mathbf{D}}]\, u_n - \frac{1}{c}[\mathring{\mathbf{P}}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})] + \frac{1}{c}[(\mathring{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{n})\ \mathbf{v}] + \frac{1}{c}\mathring{\mathbf{i}} + \frac{1}{c}\mathring{\gamma}\,\mathbf{u}. \tag{3.9'}$$

În acord cu ipotezele de bază ale teoriei lui Lorentz admitem că în cazul unui corp electric polarizabil și magnetizabil, conductor de curent, izotrop, omogen și liniar, sînt valabile următoarele *ecuații constitutive*:

$$\mathring{\mathbf{P}} = (\varepsilon - 1)\,(\overset{*}{\mathbf{E}} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \overset{*}{\mathbf{B}}), \quad \mathring{\mathbf{M}} = (\mu^{-1} - 1)(\hat{\mathbf{H}} - \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{D}}),$$

$$\mathring{\mathbf{J}} = \sigma\left(\overset{*}{\mathbf{E}} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \overset{*}{\mathbf{B}}\right), \tag{3.10}$$

ε, μ, σ fiind constante de material, cu semnificația precizată în paragraful precedent.

Relațiile constitutive (3.10) au fost obținute de Lorentz în parte prin mediere, în parte prin analogie.

Ecuațiile (3.6) — (3.9′) au valabilitate generală în cadrul teoriei lui Lorentz, iar relațiile (3.10) specifică un material particular în cadrul modelului.

Principalele caracteristici ale teoriei lui Lorentz pot fi rezumate astfel: (*a*) Nu este invariantă nici la transformarea Galilei-Newton, nici la transformarea Lorentz. Acest fapt rezultă nemijlocit din ipotezele de bază sau prin calcul direct. (*b*) Este în dezacord cu experimentul în cazul efectelor de ordinul al 2-lea. (*c*) Este inconsistentă din punct de vedere logic, deoarece cîmpul de viteze principal nu poate fi definit în raport cu reperul privilegiat $\overset{*}{R}$ „legat" de eter.

4. TEORIA LUI MINKOWSKI

În cadrul teoriei lui Minkowski se admite că: (*a*) Nu există eter. (*b*) Toate cîmpurile sînt măsurate într-un reper inerțial arbitrar ales, iar legile fundamentale au aceeași formă în orice reper inerțial.

Fie R un reper inerțial, t timpul einsteinian corespunzător lui R, $\mathbf{x}$ vectorul de poziție al unui punct față de R. Fie $\mathbf{E}$ intensitatea cîmpului electric, $\mathbf{B}$ intensitatea cîmpului magnetic, $\mathbf{D}$ inducția electrică, $\mathbf{H}$ inducția magnetică, ρ densitatea volumică a sarcinilor electrice libere, $\mathbf{J}$ densitatea volumică a curentului electric, γ densitatea sarcinilor electrice libere, $\mathbf{i}$ densitatea superficială a curentului electric. Cîmpurile introduse sînt funcții de $(\mathbf{x}, t)$ și sînt determinate în reperul R. Fie $\mathbf{v}$, funcție de $(\mathbf{x}, t)$, viteza unei particule față de R, $\mathbf{u}$, funcție de $(\mathbf{x}, t)$, viteza unui punct al suprafeței singulare Σ relativ la R, iar c viteza de propagare a luminii în vid față de un reper inerțial arbitrar.

În cadrul teoriei lui Minkowski, spre deosebire de cea a lui Hertz și Lorentz, legătura dintre coordonatele spațio-temporale ale unui eveniment raportat la două repere inerțiale diferite nu mai este dată de transformarea Galilei-Newton, ci de cea a lui Lorentz. În plus, principiul einsteinian al relativității impune o legătură bine determinată între proiecțiile cîmpului electromagnetic, ale inducției electromagnetice și ale caracteristicilor distribuțiilor de sarcină, pe două repere inerțiale diferite. Notînd cu accent entitățile corespunzătoare reperului inerțial R' și cu $\mathbf{w}$ viteza lui R' față de R, vom avea:

$$\mathbf{x}' = \beta(\mathbf{x} - \mathbf{w}t) + (1-\beta)\,\mathbf{W}\times(\mathbf{x}\times\mathbf{W}),\quad t' = \beta\left(t - \frac{1}{c^2}\,\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}\right), \tag{4.1}$$

$$\beta = 1/\sqrt{1 - w^2/c^2},\quad w = |\mathbf{w}|,\quad \mathbf{W} = \mathbf{w}/w,$$

$$\mathbf{E}' = \beta\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,\mathbf{w}\times\mathbf{B}\right) + (1-\beta)\,(\mathbf{E}\cdot\mathbf{W})\mathbf{W},$$

$$\mathbf{B}' = \beta\left(\mathbf{B} - \frac{1}{c}\,\mathbf{w}\times\mathbf{E}\right) + (1-\beta)\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{W})\,\mathbf{W}, \tag{4.2}$$

$$\mathbf{D}' = \beta\left(D + \frac{1}{c}\,\mathbf{w}\times\mathbf{H}\right) + (1-\beta)(\mathbf{D}\cdot\mathbf{W})\,\mathbf{W},$$

$$\mathbf{H}' = \beta\left(\mathbf{H} - \frac{1}{c}\,\mathbf{w}\times\mathbf{D}\right) + (1-\beta)\,(\mathbf{H}\cdot\mathbf{W})\,\mathbf{W}, \tag{4.3}$$

$$\mathbf{J}' = \beta(\mathbf{J} - \rho\,\mathbf{w}) + (1-\beta)\,\mathbf{W}\times(\mathbf{J}\times\mathbf{W}),\quad \rho' = \beta\left(\rho - \frac{1}{c^2}\,\mathbf{w}\cdot\mathbf{J}\right). \tag{4.4}$$

În cadrul teoriei lui Minkowski postulăm valabilitatea următoarelor *legi globale de bilanț*:

$$\iint_S \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_V \rho\,\mathrm{d}V + \iint_{V\cap\Sigma} \gamma\,\mathrm{d}S, \qquad \iint_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = 0, \tag{4.5}$$

$$\int_C \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{x} = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S, \tag{4.6}$$

$$\int_C \left(\mathbf{H} - \frac{1}{c}\,\mathbf{v}\times\mathbf{D}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S + \frac{1}{c}\iint_S (\mathbf{J} - \rho\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S +$$

$$+\frac{1}{c}\int_\Gamma ((\mathbf{i} - \gamma\,\mathbf{u})\times\mathbf{n})\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}, \quad \Gamma = S\cap\Sigma, \tag{4.7}$$

cu restricția

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{n} = \gamma\,u_n \text{ pe } \Sigma.$$

Semnificația lui V, S, C este aceeași ca în precedentele două paragrafe.

Restricția (4.8) diferă de restricțiile (2.4) și (3.5) introduse anterior. Această deosebire se datorează faptului că $\mathbf{i}$, spre deosebire de $\mathring{\mathbf{i}}$ (analog raportului existent între $\mathbf{J}$ și $\mathring{\mathbf{J}}$) nu reprezintă densitatea superficială a unui curent de conducție. Ținînd seama de aceasta, semnificația restricției (4.8) devine clară, deoarece $\gamma\,u_n$ caracterizează tocmai partea convectivă a curentului electric superficial.

Observ, de asemenea, faptul că legile globale de bilanț (4.5) — (4.7) sînt *formal* identice cu cele admise în teoria maxwelliană a corpurilor aflate în repaus.

Prin procedeul deja de două ori menționat, din (4.5) — (4.7) rezultă următoarele *legi locale diferențiale de bilanț*:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \frac{1}{c}\,\mathbf{J}, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = \rho, \tag{4.9}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \tag{4.10}$$

Analog, din (4.5) — (4.8), pe baza formulelor (1.1) — (1.3), rezultă următoarele *relații de salt* sau *legi locale finite de bilanț* specifice teoriei Minkowski:

$$[\mathbf{H}]\times\mathbf{n} = \frac{1}{c}\,[\mathbf{D}]\,u_n + \frac{1}{c}\,\mathbf{i}, \quad [\mathbf{D}]\cdot n = -\gamma, \tag{4.11}$$

$$[\mathbf{E}]\times\mathbf{n} = -\frac{1}{c}\,[\mathbf{B}]\,u_n, \quad [\mathbf{B}]\cdot\mathbf{n} = 0, \tag{4.12}$$

În acord cu ipotezele de bază ale teoriei lui Minkowski admitem că în cazul unui corp electric polarizabil și magnetizabil conductor de curent,

1848

izotrop şi omogen, liniar, sînt valabile următoarele *ecuaţii constitutive*:

$$\mathring{\mathbf{D}} = \varepsilon \mathring{\mathbf{E}}, \quad \mathring{\mathbf{H}} = \mu^{-1} \mathring{\mathbf{B}}, \quad \mathring{\mathbf{J}} = \sigma \mathring{\mathbf{E}}. \tag{4.13}$$

În (4.13) cîmpurile cu indicele zero sînt determinate în reperul instantaneu de repaus al particulei, ca în teoria lui Hertz; ε, μ, σ sînt constante de material avînd semnificaţia deja precizată.

Prin utilizarea formulelor de transformare (4.1) — (4.4), din (4.13), după un calcul elementar, rezultă ecuaţiile constitutive specifice teoriei lui Minkowski, exprimate cu ajutorul mărimilor corespunzătoare reperului inerţial considerat:

$$\mathbf{D} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H} = \varepsilon\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right),$$

$$\mathbf{H} - \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{D} = \mu^{-1}\left(\mathbf{B} - \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{E}\right), \tag{4.14}$$

$$\mathbf{J} - \rho\mathbf{v} = \sigma\beta\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{E}\right)\frac{\mathbf{v}}{c}\right). \tag{4.15}$$

Ecuaţiile (4.9) — (4.12) au valabilitate generală în cadrul teoriei lui Minkowski; în schimb relaţiile (4.14), (4.15) specifică un material particular.

În aproximaţia de ordinul 1 ($v/c \ll 1$), ecuaţiile constitutive capătă următoarea formă simplificată:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + (\varepsilon - \mu^{-1})\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{H} = \mu^{-1}\mathbf{B} + (\varepsilon - \mu^{-1})\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}, \tag{4.16}$$

$$\mathbf{J} - \rho\mathbf{v} = \sigma\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right). \tag{4.17}$$

Pentru modelarea matematică a experimentelor de tip Rowland, Roentgen şi Eichenwald pot fi utilizate aceste relaţii în locul celor exacte (4.14), (4.15), deoarece vitezele implicate sînt mult mai mici decît viteza de propagare a luminii în vid. Analog, în aceleaşi condiţii, în locul formulelor de transformare exacte (4.4) pot fi folosite relaţiile aproximative

$$\mathbf{J} = \mathring{\mathbf{J}}, + \mathring{\rho}\,\mathbf{v}; \quad \rho = \mathring{\rho}, \tag{4.18}$$

cîmpurile cu indicele zero fiind determinate în reperul instantaneu de repaus al particulei. În consecinţă, $\mathring{\mathbf{J}}$ reprezintă densitatea volumică a curentului de conducţie, iar $\mathring{\rho}\,\mathbf{v}$ constituie densitatea volumică a curentului de convecţie, evaluată în reperul inerţial considerat.

Principalele caracteristici ale teoriei lui Minkowski pot fi rezumate astfel: (*a*) Este invariantă la transformarea Lorentz. (*b*) Este în acord cu experimentul în cazul tuturor experimentelor clasice, fie că sînt implicate efecte de ordinul 1 (Rowland, Roentgen, Eichenwald), fie că sînt implicate efecte de ordinul al 2-lea (Michelson-Morley). (*c*) Este consistentă din punct de vedere logic, deoarece cîmpul de viteze $\mathbf{v}$ poate fi prin-

cipial determinat prin alegerea prealabilă a reperului, **v** reprezentînd viteza particulelor corpurilor ponderabile.

Accentuez faptul că proprietatea (*a*) a teoriei minkowskiene este cercetată și stabilită în marea majoritate a lucrărilor dedicate electrodinamicii relativiste *numai* în legătură cu legile locale diferențiale de bilanț. Este însă evident că analiza trebuie să fie extinsă și la studiul relațiilor de salt, deoarece și aceste relații locale finite de bilanț fac parte integrantă din teorie. Vom realiza acest studiu începînd cu paragraful următor.

5. RELAȚIILE RELATIVISTE DE TRANSFORMARE ALE NORMALEI ȘI VIZITEI DE DEPLASARE

Fie

$$f(\mathbf{x}, t) = f'(\mathbf{x}', t') = 0 \tag{5.1}$$

ecuațiile suprafeței singulare Σ scrise în reperele R, respectiv R', $(\mathbf{x}, t)$ și $(\mathbf{x}', t')$ fiind legate prin transformarea Lorentz (4.1), (4.2). După un calcul simplu rezultă

$$\operatorname{grad} f = \operatorname{grad}' f' + (\beta - 1)(\operatorname{grad}' f' \cdot \mathbf{W})\,\mathbf{W} - \beta \frac{\mathbf{w}}{c^2} \frac{\partial f'}{\partial t'}, \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\beta \operatorname{grad}' f' \cdot \mathbf{w} + \beta' \frac{\partial f'}{\partial t'}. \tag{6.3}$$

Notînd cu $(\mathbf{n}, u_n)$, $(\mathbf{n}', u'_{n'})$ versorul normalei la Σ și viteza de deplasare a lui Σ în R, respectiv R', avem :

$$\operatorname{grad} f = g\mathbf{n},\ \frac{\partial f}{\partial t} = -g u_n,\ g = |\operatorname{grad} f|,$$

$$\operatorname{grad}' f' = g'\mathbf{n}',\ \frac{\partial f'}{\partial t'} = -g' u'_{n'},\ g' = |\operatorname{grad}' f'|. \tag{5.4}$$

Deoarece $(\partial f/\partial x_i,\ \partial f/\partial t)$ și $(\partial f'/\partial x'_i, \partial f'/\partial t')$ formează componentele covariante ale unui cvadrivector minkowskian, în raport cu metrica diag $(1,1,1,-c^2)$, are loc relația

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 = \frac{\partial f'}{\partial x'_i}\frac{\partial f'}{\partial x'_i} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial f'}{\partial t'}\right)^2,\ i = 1,2,3. \tag{5.5}$$

Cu (5.5), folosind (5.4), deducem :

$$g\sqrt{1 - u_n^2/c^2} = g'\sqrt{1 - (u'_{n'})^2/c^2}. \tag{5.6}$$

Introducînd (5.6) în (5.4) și făcînd apel la (5.2), (5.3), găsim relațiile de transformare căutate :

$$\frac{\mathbf{n}}{\sqrt{1 - u_n^2/c^2}} = \frac{\mathbf{n}'}{\sqrt{1 - (u'_{n'})^2/c^2}} + (\beta - 1)\left(\frac{\mathbf{n}'}{\sqrt{1 - (u'_{n'})^2/c^2}} \cdot \mathbf{W}\right)\mathbf{W} + \frac{\beta}{c^2}\mathbf{w}\frac{u'_{n'}}{\sqrt{1 - (u'_{n'})^2/c^2}}, \tag{5.7}$$

$$\frac{u_n}{\sqrt{1 - u_n^2/c^2}} = \beta \frac{\mathbf{n}'}{\sqrt{1 - (u'_{n'})^2/c^2}} \cdot \mathbf{w} + \beta \frac{u'_{n'}}{\sqrt{1 - (u'_{n'})^2/c^2}}. \tag{5.8}$$

Comparînd aceste relaţii cu inversele formulelor de transformare (4.1), (4.2) :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + (\beta - 1)(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{W})\,\mathbf{W} + \beta \mathbf{w} t', \quad t = \frac{\beta}{c^2}\,\mathbf{x}' \cdot \mathbf{w} + \beta t', \qquad (5.9)$$

conchidem că perechea $(\mathbf{n}/\sqrt{1 - u_n^2/c^2},\ u_n/c^2\sqrt{1 - u_n^2/c^2})$ se transformă ca perechea $(\mathbf{x}, t)$. Cu alte cuvinte mărimile $(n_i/\sqrt{1 - u_n^2/c^2},\ u_n/c^2\sqrt{1 - u_n^2/c^2})$ formează componentele contravariante ale unui cvadrivector minkowskian, în raport cu metrica diag $(1,1,1, -c^2)$.

Prin introducerea variabilei

$$x_4 = ict, \quad \mathrm{i} = \sqrt{-1}, \qquad (5.10)$$

metrica va căpăta forma „euclidiană" diag (1,1,1,1,), iar distincţia între componentele co- şi contravariante dispare. Din consideraţiile de mai sus rezultă că mărimile $(n_i/\sqrt{1 - u_n^2/c^2},\ \mathrm{i}u_n/c\sqrt{1 - u_n^2/c^2})$ sînt componentele unui cvadrivector minkowskian $\mathfrak{M}$. Vom numi pe $\mathfrak{M}$ cvadivectorul normală la suprafaţa Σ. Structura spaţio-temporală a lui $\mathfrak{M}$ corespunzătoare reperului inerţial R este dată de relaţia

$$\mathfrak{M} = (\mathbf{n}/\sqrt{1 - u_n^2/c^2},\ \mathrm{i}u_n/c\sqrt{1 - u_n^2/c^2}). \qquad (5.11)$$

În cele ce urmează vom utiliza metrica „euclidiană" bazată pe introducerea variabilei pur imaginare x_4.

În cazul vitezelor mici, în care $(w/c)^2$ şi $(u_n/c)^2$ pot fi neglijaţi în comparaţie cu 1, relaţiile de transformare (5.7), (5.8) capătă forma simplă

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}', \quad u_n = u'_{n'} + \mathbf{n}' \cdot \mathbf{w}. \qquad (5.12)$$

Egalităţile precedente sînt exact satisfăcute dacă legătura între coordonatele spaţio-temporale ale unui eveniment raportat la reperele inerţiale R şi R' este dată de transformarea Galileo-Newton.

6. FORMA CVADRITENSORIALĂ A LEGILOR LOCALE DIFERENŢIALE DE BILANŢ

În acord cu principiul relativităţii admitem că modelul matematic al inducţiei electromagnetice este un cîmp cvadritensorial de ordinul al doilea antisimetric $\mathcal{G}$, iar modelul matematic al distribuţiei volumice a sarcinilor electrice (libere) este un cîmp cvadrivectorial $\mathcal{J}$. Prin ipoteză, componentele $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ ale lui $\mathcal{G}$ şi componentele $\mathcal{J}_\alpha$ ale lui $\mathcal{J}$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$, corespunzătoare unui reper inerţial R, sînt legate de vectorii de inducţie electrică şi magnetică $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, respectiv de vectorul densitate volumică de curent electric $\mathbf{J}$, şi densitatea volumică de sarcină electrică ρ, ce corespund reperului R prin următoarele relaţii scrise în formă matriceală :

$$\mathcal{G} = [\mathcal{G}_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -\mathrm{i}D_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -\mathrm{i}D_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -\mathrm{i}D_3 \\ \mathrm{i}D_1 & \mathrm{i}D_2 & \mathrm{i}D_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{J} = [\mathcal{J}_\alpha] = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ \mathrm{i}c\rho \end{bmatrix}. \qquad (6.1)$$

O verificare directă arată că sistemul de ecuații (4.9) poate fi scris în următoarea formă cvadritensională

$$\mathrm{Div}\ \mathcal{G} = \frac{1}{c}\mathcal{J}. \tag{6.2}$$

Aici Div este divergența cvadridimensională de tip Minkowski. Relația precedentă fiind o ecuație cvadritensorială, ea satisface automat principiul einsteinian al relativității.

Vom admite analog că modelul matematic al cîmpului electromagnetic este un cîmp cvadritensorial de ordinul al doilea antisimetric $\mathcal{F}$. Prin ipoteză componentele $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ ale lui $\mathcal{F}$ corespunzătoare unui reper inerțial R sînt legate de cîmpul electric și magnetic **E**, **B**, ce corespund reperului R, prin următoarele relații scrise în formă matriceală :

$$\mathcal{F} = [\mathcal{F}_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

Prin calcul direct se constată că sistemul de ecuații (4.10) poate fi scris în următoarea formă cvadritensorială :

$$\mathrm{Rot}\ \mathcal{F} = 0. \tag{6.4}$$

Aici Rot este rotorul cvadridimensional de tip Minkowski. Relația precedentă fiind o ecuație cvadritensorială, satisface automat principiul einsteinian al relativității.

Accentuez faptul că formulele de transformare (4.2) — (4.4) sînt consecințe nemijlocite ale ipotezelor de mai sus, exprimate prin relațiile de legătură (6.1) și (6.3).

Tratatele consacrate electrodinamicii relativiste se limitează la constatarea faptului că prin admiterea ipotezelor precedente, legile locale diferențiale de bilanț satisfac principiul einsteinian al relativității. Stabilirea acestui fapt nu este însă suficientă pentru constatarea caracterului relativist al teoriei. Deoarece și legile locale finite de bilanț fac parte integrantă din model, este necesar să se arate că prin introducerea unor axiome suplimentare și relațiile de salt pot fi exprimate în formă cvadritensorială. Ca și mai sus, parcurgerea acestui drum va furniza în plus formulele de transformare ale perechii (**i**, γ) la o schimbare a reperului. De altfel, cunoașterea acestor relații este indispensabilă în orice studiu consacrat confruntării teoriei minkowskiene cu experimentele clasice.

Înainte de a trece la „relativizarea" relațiilor de salt, menționez că ecuația (6.4) poate fi scrisă într-o formă echivalentă dacă se introduce cîmpul cvadritensorial $\hat{\mathcal{F}}$, dualul cîmpului $\mathcal{F}$. Componentele $\hat{\mathcal{F}}_{\alpha\beta}$ ale lui $\hat{\mathcal{F}}$ sînt definite prin relația

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}\,\partial_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\mathcal{F}_{\gamma\delta},\quad \alpha,\ \gamma,\ \beta,\ \delta = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{6.5}$$

În (6.5) $\vartheta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ sînt componentele tensorului cvadridimensional de tip Ricci. Folosind (6.3) și (6.5) se deducem ușor că

$$\hat{\mathcal{F}} = [\hat{\mathcal{F}}_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & E_3 & -E_2 & iB_1 \\ -E_3 & 0 & E_1 & iB_2 \\ E_2 & -E_1 & 0 & iB_3 \\ -iB_1 & -iB_2 & -iB_3 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.6}$$

Acum ecuația diferențială (6.5) poate fi scrisă în forma echivalentă

$$\operatorname{Div} \hat{\mathcal{F}} = 0. \tag{6.7}$$

7. FORMA CVADRITENSORIALĂ A RELAȚIILOR DE SALT. RELAȚIILE DE TRANSFORMARE ALE DENSITĂȚII ȘI CURENTULUI SUPERFICIAL DE SARCINĂ ELECTRICĂ

Ne concentrăm acum atenția asupra relațiilor de salt (4.11). Prin calcul direct, bazat pe formulele (5.11) și (6.1), conchidem că au loc relațiile

$$[\mathcal{G}_{j\beta}]\mathcal{R}_\beta = -\frac{1}{c}\frac{i_j}{\sqrt{1-u_n^2/c^2}}, \quad [\mathcal{G}_{4\beta}]\mathcal{R}_\beta = -\frac{1}{c}\frac{ic\gamma}{\sqrt{1-u_n^2/c^2}},$$

$$j = 1, 2, 3, \beta = 1, 2, 3, 4. \tag{7.1}$$

Mărimile $\mathcal{G}_{\alpha\beta}\mathcal{R}_\beta$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$, constituie componentele unui cvadrivector minkowskian $\mathcal{G}\mathcal{R}$. Pe baza acestui fapt și avînd în vedere principiul einsteinian al relativității, *vom admite* că și mărimile $(i_j/\sqrt{1-u_n^2/c^2},\ ic\gamma/\sqrt{1-u^2/c^2})$ constituie componentele unui cîmp cvadrivectorial de tip Minkowski $\mathcal{J}$. Numim acest cîmp *cvadrivectorul densitate superficială de curent*. În consecință, structura spațio-temporală a lui $\mathcal{J}$, obținută prin proiectarea distribuției superficiale de sarcină electrică pe un reper inerțial R este dată de relația

$$\mathcal{J} = (\mathbf{i}/\sqrt{1-u^2/c^2},\ ic\gamma/\sqrt{1-u^2/c^2}) \text{ pe } \Sigma. \tag{7.2}$$

Pe baza axiomei admise, *relațiile de salt* (4.11) capătă următoarea *formă cvadritensorială*:

$$[\mathcal{G}]\mathcal{R} = \mathcal{J} \text{ pe } \Sigma. \tag{7.3}$$

Relația precedentă satisface automat principiul einsteinian al relativității. Deoarece $\mathcal{G}$ este un tensor antisimetric, avem $\mathcal{R}\cdot\mathcal{G}\mathcal{R} = 0$, deci din (7.3) urmează $\mathcal{J}\cdot\mathcal{R} = 0$ pe Σ. Se constată ușor că această consecință a relației (7.3) și a axiomelor admise este echivalentă cu restricția (4.8) impusă la formularea principiilor globale de bilanț. În acest mod, în noul cadru — relativist — restricția impusă s-a transformat într-o concluzie dedusă.

Un calcul simplu bazat pe utilizarea formulelor (5.11) și (6.6) arată că *relațiile de salt* (4.12) pot fi exprimate în următoarea *formă cvadritensorială*:

$$[\hat{\mathcal{F}}]\mathcal{R} = 0 \text{ pe } \Sigma. \tag{7.4}$$

Această condiție satisface automat principiul einsteinian al relativității.

Putem astfel conchide că pe baza axiomelor suplimentare admise „relativizarea" totală a electrodinamicii minkowskiene a fost realizată.

În plus, ipoteza exprimată prin relația (7.2) va furniza automat și relațiile de transformare ale entităților care caracterizează distribuția superficială a sarcinilor electrice. Dacă $(\mathbf{i}, \gamma)$ și $(\mathbf{i}', \gamma')$ reprezintă densitatea curentului electric superficial și a sarcinilor electrice superficiale în reperul inerțial R, respectiv R', din (7.2), pe baza relațiilor (5.9) și (5.10), rezultă următoarele *formule de transformare*:

$$\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{1-u_n^2/c^2}} = \frac{\mathbf{i}'}{\sqrt{1-(u'_{n'})^2/c^2}} + (\beta-1)\left(\frac{\mathbf{i}'}{\sqrt{(1-(u'_{n'})^2/c^2}}\cdot\mathbf{W}\right)\mathbf{W} + \\ + \beta\mathbf{W}\frac{\gamma'}{\sqrt{1-(u'_{n'})^2/c^2}}, \tag{7.5}$$

$$\frac{\gamma}{\sqrt{1-u_n^2/c^2}} = \beta\frac{\mathbf{W}}{c^2}\cdot\frac{\mathbf{i}'}{\sqrt{1-(u'_{n'})^2/c^2}} + \beta\frac{\gamma'}{\sqrt{1-(u'_{n'})^2/c^2}}\cdot \tag{7.6}$$

În cazul vitezelor mici, caz în care $(w/c)^2$ și $(u_n/c)^2$ pot fi neglijați față de 1, formulele de transformare (7.5), (7.6) capătă următoarea formă simplificată:

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}' + \gamma'\mathbf{W},\ \gamma = \gamma'. \tag{7.7}$$

În particular, dacă R' coincide cu reperul instantaneu de repaus $\mathring{R}$ al unei particule a suprafeței singulare (materiale) Σ, ce se mișcă cu viteza $\mathbf{u}$ față de reperul R, vom avea

$$\mathbf{i} = \mathring{\mathbf{i}} + \mathring{\gamma}\mathbf{u},\ \gamma = \mathring{\gamma}\cdot \tag{7.8}$$

Aici $\mathring{\gamma}$ este densitatea superficială (proprie) a sarcinilor electrice libere, $\mathring{\mathbf{i}}$ este densitatea superficială a curentului de conducție, iar $\mathring{\gamma}\mathbf{u}$ reprezintă densitatea superficială a curentului de convecție. Formulele (7.8) sînt indispensabile la analiza experimentelor clasice în lumina electrodinamicii relativiste.

Acordul complet al teoriei minkowskiene cu principiul einsteinian al relativității va fi stabilit dacă se poate arăta că și ecuațiile constitutive pot fi scrise în formă cvadritensorială. Acest pas poate fi ușor realizat *fără* introducerea vreunei ipoteze suplimentare, dacă facem apel la cvadrivectorul viteză de tip Minkowski $\mathcal{V}$. Structura spațio-temporală a lui $\mathcal{V}$ este dată de relația

$$\mathcal{V} = (\mathbf{v}/\sqrt{1-v^2/c^2},\ ic/\sqrt{1-v^2/c^2}). \tag{7.9}$$

Un calcul simplu, bazat pe utilizarea formulelor (6.1) și (6.3), arată că ecuațiile constitutive (4.14) și (4.15) sînt echivalente cu următoarele relații constitutive cuadritensoriale:

$$\mathcal{G}\mathcal{V} = \varepsilon\mathcal{F}\mathcal{V},\ \hat{\mathcal{G}}\mathcal{V} = \mu^{-1}\hat{\mathcal{F}}\mathcal{V},\ \mathcal{J} + \frac{1}{c^2}(\mathcal{J}\mathcal{V})\mathcal{V} = \frac{\sigma}{c}\mathcal{F}\mathcal{V} \tag{7.10}$$

BIBLIOGRAFIE

1. CHEN-TO TAI, *On the presentation of Maxwell's theory*, Proc. I.E.E.E., **60**, 936—945 (1972).
2. Н. Т. МАРКЧЕЬ *Сравненне различных форм системы уравнений Максвелла*, în: *Максвелл и развитие физики* IXI-XX *веков* ред. Л.С. Полак, Наука, Москва. 1985, p. 84—96.
3. H. HERTZ, *Über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegten Körper*, Wiedmans Ann. Phys. Chem., **41**, 369—399, (1890).
4. P. FRANK, *Das Relativitätsprinzip der Mechanik und die Gleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern*, Ann. Phys., **27**, (1908) 897—902.
5. M. von LAUE, *La théorie de la rélativité, I. Le principe de la rélativité de la transformation de Lorentz*, Gauthier-Villars, Paris, 1924.
6. E. WHITTAKER, *A history of the theories of aether and electricity. The classical theories*, Tomas Nelson and Sons Ltd., London, Edinburgh, Paris, Melbourne, Toronto, New York, 1951.
7. M. A. TONNELAT, *Les principes de la théorie électromagnetique et de la rélativité*, Masson et Cie, Paris, 1959.
8. У. И. ФРАНКФУРТ, *Очерки по истории специальной теории относительности*, Изд Акад. Наук С.С.С. Р., Москва, 1961.
9. E. BAUER., *Electricité et magnetisme* (1790—1895), în : *Histoire générale des sciences*, tome III, *La science contemporaine*, vol. I. *Le XIXe siècle*, Red. R. Taton, Presses Universitaires de France, 1961, p. 209—268.
10. M. BORN, W. BIEM, *Die Relativitätstheorie Einsteins*, Springer, Berlin. Göttingen, 1964.
11. A. TIMOTIN, A. ŢUGULEA, *Asupra interpretării electrodinamicii Maxwell-Hertz în lumina teoriei relativităţii*, Bul. Inst. Politehnic Bucureşti, **26**, 127—145 (1964).
12. A. TIMOTIN, *Electrodinamica mediilor în mişcare. Electrodinamica relativităţii restrinse* în : *Fizica*, vol. I, I.E.D.P., Bucureşti, 1964, p. 483—531.
13. Л. И. МАНДЕЛЬШТАМ, *Лекций по фисическим основам теории относительности*, în: И. И. Мандельштам : *Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике, Изд. Наука, Москва*, (1972), p. 83—285.
14. В. М. ДУКОВ, *Элекртодинамика* (*История и методология макроскопической электродинамики*), Высшая школа, Москва, 1975.
15. C. I. MOCANU, *Electrodinamica hertziană a corpurilor în mişcare* (*la viteze relativiste*), Edit. Academiei., Bucureşti, 1985.
16. А.Т. ГРИГОРЯН, А. Н. ВЯЛЬЦЕВ, *Генрих Герц* (1857 -- 1894), Изд. Наука, Моква, 1968.
17. H. A. LORENTZ, *Weiterbildung der maxwellschen Theorie. Elektronentheorie*, în : Enzykl. math. Wiss. Bd. V. Physik, Teil 2, Leipzig, 1904, p. 145—288.
18. H. A. LORENTZ, *The theory of electrons*, Dover, New York, 1952.
19. S. R. de GROOT, J. Vilieyer, *On the derivation of Maxwell's equations*, Nuovo Cimento, **33**, 1225—1227 (1964).
20. L. DRAGOŞ, *Magnetodinamica fluidelor*, Edit. Academiei R. S. România, Bucureşti, 1969.
21. R. A. TOUPIN, *A dynamical theory of elastic dielectric*, Int. J. Engng. Sci., **1**, 101—126 (1963).
22. C. TRUESDELL, R. A. TOUPIN, *The classical field theories*, în : *Handbuch der Physik*, **III**/1, Springer, Berlin, Heidelberg. Göttingen, 1960.
23. A. C. ERINGEN, R. C. DIXON, *A dynamical theory of polar elastic dielectric*, I, II, Int. J. Engng. Sci., **3**, 359—398 (1965).
24. E. SOÓS, *Modele discrete şi continue ale solidelor*, Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1972.
25. A. EINSTEIN, *Zur Electrodynamik bewegter Körper*, Ann. Phys., **17**, 891—921 (1905).
26. H. MINKOWSKI, *Raum und Zeit*, Phys. Z., **10**, 104—111 (1909).
27. H. MINKOWSKI, *Relativitätsprinzip*. Ann. Phys., **47**, 927—938 (1915).
28. H. MINKOWSKI, *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten, Körpern*, Nachrichten Ges. Wiss., Göttingen, Math. — Phys. Kl., 54—116, 1908, reprodus în : Math. Ann., **68**, 472—525 (1910).
29. A. SOMMERFELD, *Electrodynamik*. Akad. Verlagsgesellschaft Geest, Leipzig, 1949.
30 И. Е. ТАММ,. *Основы теории элеытричества*, ГИТТЛ, Москва, 1954.
31. V. NOVACU, *Electrodinamica*, Edit. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1966.
32. И.С. САЩИНКЕВИЧ, *Современное экспериментальное подтверждгение сепециальной теории относительности*, Высшаяшкола, Минск, 1979.

33. С.З. ФРИШ, А. Б. ТИМОРЕВА, *Курс общей физики* том II, ГОСТЕХИЗДАТ, Москва, Лениград 1951.
34. R. K. LUNEBURG *Mathematical theory of optics*, Univ. of California Press, Berkeley, Los Angeles, 1966.
35. H. GRÜNDEMANN, *Basic relations in the theory of continua*, FMC— Series Nr. 4, Berlin, Karl Marx Stadt (1982).
36. A. SKORUPSKI, *Boundary conditions for electromagnetic fields in the case of moving media*, Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys., **9**, 391—395 (1962).
37. R. C. COSTEN, D. ADAMSON, *Three dimensional derivation of the electrodynamic jump conditions and momentum-energy laws at a moving boundary*, Proc. I.E.E.E., **53**, 1181—1196 (1965).
38. D. HOMENTCOVSCHI, *Asupra relațiilor de salt din electrodinamică*, St. Cerc. Mat., **21**, 1041—1045 (1969).
39. A. PANAITESCU, *Asupra unor teoreme generale din electrodinamica lui Maxwell și Hertz*, p. 287—298 în Conf. Naț. de Electrotehnică și Electroenergetică, vol. 2, Bazele electrotehnicii II, Timișoara, 1982.
40. W. JAUNZEMIS, *Continuum mechanics*, The Macmillan Comp., New York, London, 1967.
41. A. EINSTEIN, J. LAUB, *Über die elektromagnetischen Grundgleichungen für bewegte Körper*, Ann. Phys., **26**, 532—540 (1908).
42. A. EINSTEIN, J. LAUB, *Bemerkungen zu unserer Arbeit „Über die...''*, Ann. Phys., **28**, 445—447 (1908).
43. B. PAULI, *Теория относительности*, Наука, Москва, 1983.
44. Л. Д. ЛАНДАУ, Л. М. ЛИФШИЦ, *Электродинамика сплошных сред*, ГИТТЛ, Москва, 1957
45. Л. И. СЕДОВ, *Механика сплошной среды*, том I, Изд. Наука, Москва, 1967.
46. M. PLANCK, *Électromagnétisme*, Librairie Félix Alcan, Paris, 1939.
47. T. VESCAN, *Fizică teoretică*, vol. I, Tipografia învățămîntului, București, 1957.
48. R. FEYNMANN, *Lectures on physics, mainly electromagnetism and matter*, Addison — Wesley, Massachusetts, 1963.
49. E. PURCELL, *Electricity and magnetism*, Berkeley Physics Course, vol. 2, Educational Developement Center, 1963.
50. C. MÖLLER, *The theory of relativity*, Clarendon Press, Oxford, 1972.
51. Б. А. ФУКС, Б. В. ШАБАТ, *Функции комплексного переменного и некоторые их приложения*, Наука, Москва, 1964.
52. E. DURANT, *Électrostatique*, II, *Problemes généraux. Conducteurs*, Masson et Cie, Paris, 1966.
53. O. D. KELLOG, *Foundation of potential theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.
54. D. HOMENTCOVSCHI, *Funcții complexe cu aplicații în știință și tehnică*, Ed. Tehnică, București, 1986.
55. R. RĂDULEȚ, A. ȚUGULEA, A. TIMOTIN, *Teoreme de unicitate pentru regimuri variabile ale cîmpului electromagnetic*, St. Cerc. Energetică și Electrotehnică, **21**, 109—128 (1971).
56. A. PANAITESCU, *Unicité des solutions des équations Maxwell-Hertz des milieux lineaires en mouvement connu*, Rev. Roum. Sci. Techn. Sér. Électrotehnique et Énergétique, **20**, 205—210 (1975).
57. ȘT. GHERESI, E. SOÓS, *Tensorul energie-impuls al cîmpului electromagnetic, I. Axiomatizare preliminară, II. Dificultăți specifice în micro- și macroelectrodinamică*, St. Cerc. Mec. Apl., **37**, 1—16 (1978).
58. A. C. ERINGEN, *Mechanics of continua*, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, 1967.
59. E. S. SUHUBI, *Balance laws of continuum physics*, Lett. Appl. Engng. Sci., **21**, 283—288 (1983).

STUDIUL GEOMETRICO-CINEMATIC AL ANGRENAJULUI GLOBOIDAL NERIGLAT

de V. HANDRA-LUCA

Institutul Politehnic, Cluj-Napoca

Angrenajele melcate globoidale prezintă unele avantaje față de cele cilindrice prin faptul că au o capacitate portantă mai ridicată, asigură condițiile existenței ungerii hidrodinamice etc. Se justifică deci studierea și implementarea în construcția de mașini a unor angrenaje melcate globoidale riglate și neriglate. Prezenta lucrare își propune să facă un studiu geometricocinematic al unui tip de angrenaj globoidal neriglat utilizînd calculul matriceal.

Pornind de la faptul că la un angrenaj cu razele de curbură ale profilurilor conjugate de același semn capacitatea portantă crește, în lucrare se studiază un angrenaj melcat neriglat care satisface această cerință.

1. SUPRAFEȚELE SPIRELOR MELCULUI

Suprafața spirei melcului se obține prin așchierea cu o sculă a cărei muchie așchietoare are forma unui arc de cerc ce se află într-un plan paralel cu planul axial, distanța dintre cele două plane fiind e. Pentru studiul geometriei angrenajului se folosesc sistemele de axe de coordonate :

sistemul mobil $O_1x_1y_1z_1$ (fig. 1) legat rigid de corpul melcului, ales astfel, ca axa melcului să fie O_1z_1, iar planul $z_1 = 0$ să conțină normala comună la axele melcului și sculei ;

sistemul mobil $O_2x_2y_2z_2$ legat rigid de corpul sculei, ales astfel ca axa de rotație a sculei să fie O_2y_2, iar planul $y_2 = 0$ să conțină normala comună la axele melcului și sculei ; sistemul fix O_1xyz.

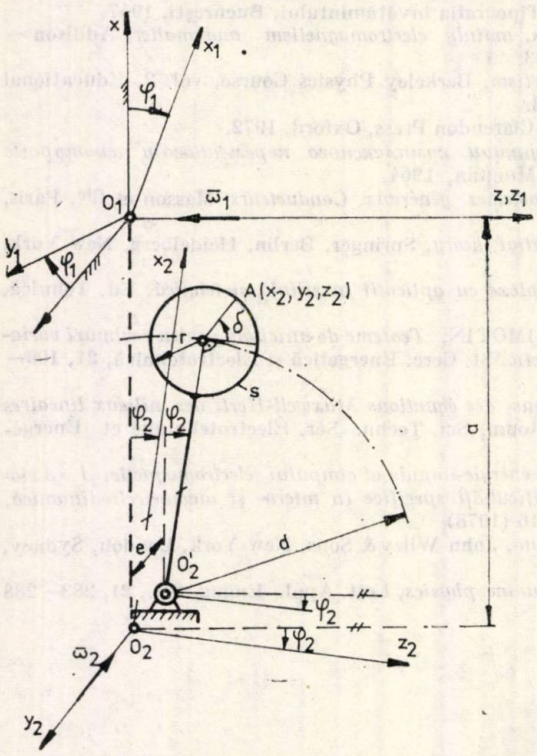


Fig. 1 Volume, suprafețe și curbe materiale.

Prelucrarea spirei melcului (fig. 1) se realizează cu ajutorul sculei cu profil circular concav căreia i se imprimă o mișcare de rotație în jurul axei O_2y_2 cu viteza unghiulară $\omega_2' = d\varphi_2/dt$ (φ_2 este unghiul de rotație a sculei), iar semifabricatului melcului i se imprimă

o mişcare de rotaţie cu viteza unghiulară $\omega_1' = d\varphi_1/dt$ (φ_1 este unghiul de rotaţie al melcului). Deci raportul de transmitere al angrenajului de prelucrare este $i_{12} = \omega_1'/\omega_2'$. Ecuaţiile curbei generatoare a spirei melcului în sistemul $O_2x_2y_2z_2$ sînt :

$$x_2 = d + r \sin \delta, \quad y_2 = -e, \quad z_2 = r\cos \delta, \tag{1}$$

unde : d, r sînt nişte constante ce se aleg la proiectarea angrenajului ; δ — unghiul variabil ce se măsoară de la axa O_2z_2 în sens trigonometric în planul paralel cu planul $y_2 = 0$ ce se află la distanţa e.

Suprafaţa generată de curba (1) în sistemul legat de melc este chiar spira melcului.

Introducînd coordonatele omogene, în vederea facilitării folosirii calculului matriceal, relaţiile de trecere din sistemul O_1xyz în sistemul $O_1x_1y_1z_1$ sînt :

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos \varphi_1 - y \sin \varphi_1, \\ y_1 &= x \sin \varphi_1 + y \cos \varphi_1, \\ z_1 &= z, \quad t_1 = t = 1, \end{aligned} \tag{2}$$

iar cele de trecere din sistemul $O_2x_2y_2z_2$ în sistemul O_1xyz sînt :

$$\begin{aligned} x &= x_2 \cos \varphi_2 - z_2 \sin \varphi_2 - a, \\ y &= y_2, \\ z &= x_2 \sin \varphi_2 + z_2 \cos \varphi_2, \\ t &= t_2 = 1. \end{aligned} \tag{3}$$

Relaţiile (2), (3) scrise sub formă matriceală iau forma :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$(\rho_1) = M_1 \cdot (\rho),$$

respectiv

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & 0 & -\sin \varphi_2 & -a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$(\rho) = M_2 \cdot (\rho_2),$$

unde (ρ), (ρ_1), (ρ_2) sînt vectorii de poziţie, sub formă matriceală, ai unui punct de pe suprafaţa spirei melcului în cele trei sisteme de coordonate.

Din (4) şi (5) rezultă că

$$(\rho_1) = M \cdot (\rho_2), \tag{6}$$

unde

$$M = M_1 \cdot M_2 \tag{7}$$

este matricea obținută prin înmulțirea matricelor M_1 și M_2 și are expresia :

$$M = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_1 & -\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 & -a\cos\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 & -a\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_2 & 0 & \cos\varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Din (8) și (6) se poate scrie că

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_1 & -\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 & -a\cos\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 & -a\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_2 & 0 & \cos\varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

adică

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - y_2 \sin\varphi_1 - z_2 \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - a\cos\varphi_1, \\ y_1 &= x_2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + y_2 \cos\varphi_1 - z_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 - a\sin\varphi_1, \\ z_1 &= x_2 \sin\varphi_2 + z_2 \cos\varphi_2, \\ t_1 &= t_2 = 1. \end{aligned} \tag{10}$$

După înlocuirea sistemului (1) în sistemul (10) se obține :

$$\begin{aligned} x_1 &= [d\cos\varphi_2 + r\sin(\delta - \varphi_2) - a]\cos\varphi_1 + e\sin\varphi_1, \; x_1 = x_1(\varphi_1, \delta), \\ y_1 &= [d\cos\varphi_2 + r\sin(\delta - \varphi_2) - a]\sin\varphi_1 - e\cos\varphi_1, \; y_1 = y_1(\varphi_1, \delta), \\ z_1 &= d\sin\varphi_2 + r\cos(\delta - \varphi_2), \qquad\qquad z_1 = z_1(\varphi_1, \delta). \end{aligned} \tag{11}$$

Sistemul (11) reprezintă ecuațiile suprafeței flancului spirei melcului scrise sub formă parametrică, parametrii fiind unghiurile φ_1, $\delta(\varphi_2/\varphi_1 = i_{12}$, i_{12} este raportul de transmitere, $i_{21} = 1/i_{12})$. Coordonatele φ_1, δ ale suprafeței (11) reprezintă o rețea de coordonate curbilinii. Făcînd $\varphi_1 = \text{const.}$ se obține pe suprafața spirei melcului o curbă, iar făcînd $\delta = \text{const.}$ se obține pe suprafața spirei melcului o altă curbă.

2. SUPRAFAȚA DE ANGRENARE

Determinarea suprafeței de angrenare (locul geometric al liniilor de contact) pornește de la observația că în punctele de contact ale suprafețelor conjugate (suprafețele spirelor melcului și ale dinților roții melcate) viteza relativă se află în planul tangent la cele două suprafețe conjugate. Această observație conduce la necesitatea ca produsul scalar dintre vectorul $\bar{n}$ al normalei vectorul $\bar{v}$ al vitezei relative să fie nul.

Deci ecuaţiile liniilor de contact se obţin prin reunirea sistemului (11) cu această condiţie, adică

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(\varphi_1, \delta), \\ y_1 &= y_1(\varphi_1, \delta), \\ z_1 &= z_1(\varphi_1, \delta), \end{aligned} \tag{12}$$

$$\bar{n} \cdot \bar{v} = 0 \text{ sau } n_{x1} \cdot v_{x1} + n_{y1} \cdot v_{y1} + n_{z1} \cdot v_{z1} = 0,$$

unde n_{x1}, n_{y1}, n_{z1}, v_{x1}, v_{y1}, v_{z1}, reprezintă proiecţiile pe axele de coordonate ale sistemului $O_1 x_1 y_1 z_1$ ale vectorilor $\bar{n}$, respectiv $\bar{v}$.

Normala $\bar{n}$ se determină din produsul vectorial al tangentelor în punctul considerat, la cele două familii de curbe ale suprafeţei spirei melcului definite de $\varphi_1 = \text{const.}$ şi $\delta = \text{const.}$, deci

$$\bar{n} = \left(\bar{i}\frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} + \bar{j}\frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} + \bar{k}\frac{\partial z_1}{\partial \varphi_1}\right) \times \left(\bar{i}\frac{\partial x_1}{\partial \delta} + \bar{j}\frac{\partial y_1}{\partial \delta} + \bar{h}\frac{\partial z_1}{\partial \delta}\right)$$

sau

$$\bar{n} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} & \dfrac{\partial z_1}{\partial \varphi_1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \delta} & \dfrac{\partial y_1}{\partial \delta} & \dfrac{\partial z_1}{\partial \delta} \end{vmatrix}, \tag{13}$$

de unde

$$n_{x1} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} & \dfrac{\partial z_1}{\partial \varphi_1} \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial \delta} & \dfrac{\partial z_1}{\partial \delta} \end{vmatrix}; \quad n_{y1} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial \varphi_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} \\ \dfrac{\partial z_1}{\partial \delta} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \delta} \end{vmatrix}; \quad n_{z1} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \delta} & \dfrac{\delta y_1}{\partial \delta} \end{vmatrix}, \tag{14}$$

unde derivatele parţiale se obţin din (11) şi au expresiile :

$$\frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} = -[d\, i_{21} \sin\varphi_2 + r i_{21} \cos(\delta - \varphi_2) - e]\cos\varphi_1 - [d\cos\varphi_2 + r\sin(\delta - \varphi_2) - a]\sin\varphi_1,$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} = -[di_{21}\sin\varphi_2 + r i_{21}\cos(\delta - \varphi_2) - e]\sin\varphi_1 + [d\cos\varphi_2 + r\sin(\delta - \varphi_2) - a]\cos\varphi_1,$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial \varphi_1} = -di_{21}\cos\varphi_2 + r\, i_{21}\sin(\delta - \varphi_2), \tag{15}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \delta} = r\cos(\delta - \varphi_2)\cos\varphi_1,$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial \delta} = r\cos(\delta - \varphi_2)\sin\varphi_1,$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial \delta} = -r\sin(\delta - \varphi_2).$$

Înlocuind (15) în (14), se obține

$$n_{x1} = [di_{21}\sin\varphi_2 + ri_{21}\cos(\delta - \varphi_2) - e]\,r\sin(\delta - \varphi_2)\sin\varphi_1 -$$
$$- [d\cos\varphi_2 + r\sin(\delta - \varphi_2) - a]\,r\sin(\delta - \varphi_2)\cos\varphi_1 - di_{21}\,r\cos(\delta -$$
$$- \varphi_2)\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - r^2 i_{21}\sin(\delta - \varphi_2)\times\cos(\delta - \varphi_2)\sin\varphi_1,$$
$$n_{y1} = di_{21}\,r\cos(\delta - \varphi_2)\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + r^2 i_{21}\sin(\delta - \varphi_2)\cos(\delta - \varphi_2)\cos\varphi_1 -$$
$$- [di_{21}\sin\varphi_2 + ri_{21}\cos(\delta - \varphi_2) - e]\,r\sin(\delta - \varphi_2)\cos\varphi_1 - [d\cos\varphi_2 +$$
$$+ r\sin(\delta - \varphi_2) - a]\,r\sin(\delta - \varphi_2)\sin\varphi_1, \qquad (16)$$
$$n_{z1} = -[di_{21}\sin\varphi_2 + ri_{21}\cos(\delta - \varphi_2) - e]\,r\cos(\delta - \varphi_2)\sin\varphi_1\cos\varphi_1 -$$
$$- [d\cos\varphi_2 + r\sin(\delta - \varphi_2) - a]\,r\cos(\delta - \varphi_2)\sin^2\varphi_1 + [di_{21}\sin\varphi_2 +$$
$$+ ri_{21}\cos(\delta - \varphi_2) - e]\,r\cos(\delta - \varphi_2)\cos\varphi_1\sin\varphi_1 - [d\cos\varphi_2 + r\sin(\delta -$$
$$- \varphi_2) - a]\,r\cos(\delta - \varphi_2)\cos^2\varphi_1.$$

Luînd în considerare (11), relațiile (16) devin :

$$n_{x1} = -x_1 r\sin(\delta - \varphi_2) + ri_{21}\sin\varphi_1[-d\cos\varphi_2\cos(\delta - \varphi_2) -$$
$$- r\cos(\delta - \varphi_2)\sin(\delta - \varphi_2) + d\sin\varphi_2\sin(\delta - \varphi_2) + r\cos(\delta - \varphi_2)\sin(\delta - \varphi_2)],$$
$$n_{y1} = -y_1\,r\sin(\delta - \varphi_2) + ri_{21}\cos\varphi_1[-d\sin\varphi_2\sin(\delta - \varphi_2) +$$
$$+ r\sin(\delta - \varphi_2)\cos(\delta - \varphi_2) + d\cos\varphi_2\cos(\delta - \varphi_2) - r\sin(\delta - \varphi_2)\cos(\delta - \varphi_2)],$$
$$n_{z1} = r\cos\varphi_1\cos(\delta - \varphi_2)\{-x_1 - \sin\varphi_1[di_{21}\sin\varphi_2 + ri_{21}\cos(\delta - \varphi_2)]\} +$$
$$+ r\sin\varphi_1\cos(\delta - \varphi_2)\{-y_1 + \cos\varphi_1[di_{21}\sin\varphi_2 + ri_{21}\cos(\delta - \varphi_2)]\},$$

sau

$$n_{x1} = -x_1\,r\sin(\delta - \varphi_2) - rdi_{21}\sin\varphi_1\cos\delta,$$
$$n_{y1} = -y_1\,r\sin(\delta - \varphi_2) + rdi_{21}\cos\varphi_1\cos\delta, \qquad (17)$$
$$n_{z1} = -r\cos(\delta - \varphi_2)(x_1\cos\varphi_1 + y_1\sin\varphi_1).$$

Determinarea vitezei relative se face considerînd angrenajul în funcționare. Distanța axială a acestui angrenaj este a.

Considerăm un punct A de contact (fig. 2) dintre melc și roata melcată care se rotesc cu unghiurile ψ_1 și ψ_2 și care au vitezele unghiulare

ω_1 şi ω_2 ($\omega_1 = \mathrm{d}\psi_1/\mathrm{d}t$, $\omega_2 = \mathrm{d}\psi_2/\mathrm{d}t$, $i_{21} = \omega_1/\omega_2$). Viteza relativă v în punctul A de contact dintre melc şi roata melcată este dată de expresia :

$$\bar{v} = \bar{v}_1 - \bar{v}_2,$$

sau

$$\bar{v} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\rho}_1 - \bar{\omega}_2 \times \bar{\rho}_2, \tag{18}$$

unde : $\bar{\rho}_1$, $\bar{\rho}_2$ sînt vectorii de poziţie al punctului A cu originea în O_1, respectiv în O_2.

Se vede că

$$\bar{\rho}_2 = \overline{O_2O_1} + \bar{\rho}_1, \tag{19}$$

de unde

$$\bar{v} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\rho}_1 - \bar{\omega}_2 \times \overline{O_2O_1} - \bar{\omega}_2 \times \bar{\rho}_1, \tag{20}$$

sau, proiectînd pe cele trei axe de coordonate ale sistemului O_1xyz, se obţine

$$\bar{i}v_x + \bar{i}x_y + \bar{k}v_z = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_{1x} & \omega_{1y} & \omega_{1z} \\ x & y & z \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{h} \\ \omega_{2x} & \omega_{2y} & \omega_{2z} \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_{2x} & \omega_{2y} & \omega_{2z} \\ x & y & z \end{vmatrix}, \tag{21}$$

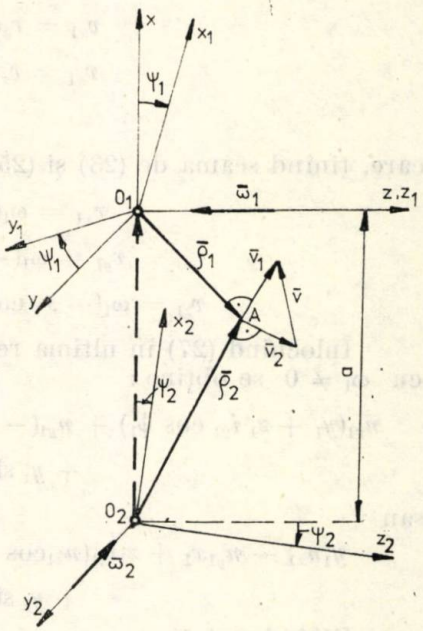


Fig. 2

cu precizarea că

$$\omega_{1x} = 0,\ \omega_{1y} = 0,\ \omega_{iz} = -\omega_1, \tag{22}$$

$$\omega_{2x} = 0,\ \omega_{2y} = -\omega_2,\ \omega_{2z} = 0.$$

Înlocuind (22) în (21) se obţine :

$$v_x = \omega_1 y + \omega_1 i_{21} z,$$

$$v_y = -\omega_1 x, \tag{23}$$

$$v_z = -\omega_1 i_{21} (a + x).$$

Viteza relativă $\bar{v}$ intersectează în sistemul $O_1x_1y_1z_1$ legat de melc. În acest scop se folosesc relaţiile de trecere între sistemele O_1xyz — fix şi $O_1x_1y_1z_1$ legat de melc :

$$x_1 = x \cos \psi_1 - y \sin \psi_1,$$

$$y_1 = x \sin \psi_1 + y \cos \psi_1, \tag{24}$$

$$z_1 = z,$$

și

$$x = x_1 \cos \psi_1 + y_1 \sin \psi_1,$$
$$y = -x_1 \sin \psi_1 + y_1 \cos \varphi_1, \tag{25}$$
$$z = z_1.$$

Derivînd sistemul (24) în raport cu timpul se obține :

$$v_{x1} = v_x \cos \psi_1 - v_y \sin \psi_1,$$
$$v_{y1} = v_x \sin \psi_1 + v_y \cos \psi_1, \tag{26}$$
$$v_{z1} = v_z,$$

care, ținînd seama de (23) și (25), devine :

$$v_{x1} = \omega_1(y_1 + z_1 i_{21} \cos \psi_1),$$
$$v_{y1} = \omega_1(-x_1 + z_1 i_{21} \sin \psi_1), \tag{27}$$
$$v_{z1} = \omega_1(-x_1 \cos \psi_1 - y_1 \sin \psi_1 - a)\, i_{21}.$$

Înlocuind (27) în ultima relație a sistemului (12) după simplificare cu $\omega_1 \neq 0$ se obține :

$$n_{x1}(y_1 + z_1 i_{21} \cos \psi_1) + n_{y1}(-x_1 + z_1 i_{21} \sin \psi_1) - n_{z1} i_{21} (x_1 \cos \psi_1 + y_1 \sin \psi_1 + a) = 0,$$

sau

$$y_1 n_{x1} - n_{y1} x_1 + z_1 i_{21}(n_{x1} \cos \psi_1 + n_{y1} \sin \psi_1) - n_{z1} i_{21}(x_1 \cos \psi_1 + y_1 \sin \psi_1 + a) = 0. \tag{28}$$

Făcînd notația

$$d \cos \varphi_2 + r \sin (\delta - \varphi_2) - a = k, \tag{29}$$

și ținînd seama de (17) și (11), se obține

$$y_1 n_{x1} - x_1 n_{y1} = -rk\, di_{21} \cos \delta, \tag{30}$$

$$z_1(n_{x1} \cos \psi_1 + n_{y1} \sin \psi_1)\, i_{21} = -ri_{21}[d \sin \varphi_2 + r \cos (\delta - \varphi_2)] \cdot [k \sin(\delta - \varphi_2) \times \cos(\varphi_1 - \psi_1) + di_{12} \sin(\varphi_1 - \psi_1) \cos \delta + e \sin(\delta - \varphi_2) \sin (\varphi_1 - \psi_1)], \tag{31}$$

$$i_{21} n_{z1}(x_1 \cos \psi_1 + y_1 \sin \psi_1 + a) = -rki_{21} \cos (\delta - \varphi_2)\, [k \cos (\varphi_1 - \psi_1) + e \sin (\varphi_1 - \psi_1) + a]. \tag{32}$$

Ținînd seama de (30), (31), (32) și simplificînd cu $r \cdot i_{21} \neq 0$, relația (28) devine :

$$kd \cos \delta + [d \sin \varphi_2 + r \cos(\delta - \varphi_2)] \cdot [k \sin(\delta - \varphi_2) \cos(\varphi_1 - \psi_1) + di_{21} \sin (\varphi_1 - \psi_1) \cos \delta + e \sin (\delta - \varphi_2) \sin (\varphi_1 - \psi_1)] - k \cos(\delta - \varphi_2) \cdot [k \cos(\varphi_1 - \psi_1) + e \sin (\varphi_1 - \psi_1) + a] = 0. \tag{33}$$

Înlocuind pe k din (29) și făcînd substituția $\alpha = \varphi_1 - \psi_1$ după reducerea termenilor asemenea și grupări se obține :

$$d^2 \cos\varphi_2 \cos\delta(1 - \cos\alpha) - ad\cos\delta(1 - \cos\alpha) + rd\sin(\delta - \varphi_2)\cos\delta(1 - \cos\alpha) - ad\cos\varphi_2\cos(\delta - \varphi_2)(1 - \cos\alpha) - ar\sin(\delta - \varphi_2)\cos(\delta - \varphi_2)(1 - \cos\alpha) + di_{21}\cos\delta\sin\alpha[d\sin\varphi_2 + r\cos(\delta - \varphi_2)] + a^2\cos(\delta - \varphi_2)(1 - \cos\alpha) - e\sin\alpha[d\cos(\delta - a\cos\delta - \varphi_2)] = 0, \quad (34)$$

sau

$$\sin\frac{\alpha}{2}\left\{[d^2\cos\varphi_2\cos\delta - ad\cos\delta + rd\sin(\delta - \varphi_2)\cos\delta - ad\cos\varphi_2\cos(\delta - \varphi_2) - ar\sin(\delta - \varphi_2)\cos(\delta - \varphi_2) + a^2\cos(\delta - \varphi_2)]\sin\frac{\alpha}{2} + \{di_{21}\cos\delta[d\sin\varphi_2 + r\cos(\delta - \varphi_2)] - e[d\cos\delta - a\cos(\delta - \varphi_2)]\}\cos\frac{\alpha}{2}\right\} = 0. \quad (35)$$

Astfel, sistemul (12) care dă ecuațiile liniilor de contact în sistemul de coordonate $O_1x_1y_1z_1$ ia forma :

$$\begin{aligned} x_1 &= [d\cos\varphi_2 + r\sin(\delta - \varphi_2) - a]\cos\varphi_1 + e\sin\varphi_1, \\ y_1 &= [d\cos\varphi_2 + r\sin(\delta - \varphi_2) - a]\sin\varphi_1 - e\cos\varphi_1, \\ z_1 &= d\sin\varphi_2 + r\cos(\delta - \varphi_2), \end{aligned} \quad (36)$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\left\{[d^2\cos\varphi_2\cos\delta - ad\cos\delta + rd\sin(\delta - \varphi_2)\cos\delta - ad\cos\varphi_2\cos(\delta - \varphi_2) - ar\sin(\delta - \varphi_2)\cos(\delta - \varphi_2) + a^2\cos(\delta - \varphi_2)]\sin\frac{\alpha}{2} + \{di_{21}\cos\delta[d\sin\varphi_2 + r\cos(\delta - \varphi_2)] - e[d\cos\delta - a\cos(\delta - \varphi_2)]\}\cos\frac{\alpha}{2}\right\} = 0.$$

Fixînd parametrul ψ_1, ($\alpha = \varphi_1 - \psi_1$), adică a unghiului de rotație al melcului la funcționare, ultima relație din (36) dă legătura între parametrii φ_1 și δ.

Sistemul de ecuații (36) reprezintă liniile de contact de pe suprafața spirei melcului, linii după care se face contactul între melc și roata melcată.

Se poate vedea din ultima ecuație a sistemului (36) că se obțin două familii de linii de contact.

Prima familie de linii de contact este dată de ecuațiile :

$$x_1 = x_1(\varphi_1, \delta), \quad y_1 = y_1(\varphi_1, \delta), \quad z_1 = z_1(\varphi_1, \delta),$$
$$\sin\frac{\alpha}{2} = 0, \ \varphi_1 - \psi_1 = 2\pi n; \ n \in \mathbb{Z}, \tag{37}$$

unde n reprezintă numărul de rotații ale melcului din momentul începerii studiului pînă la un moment dat.

Deoarece liniile de contact se studiază în sistemul de coordonate fixe O_1xyz se va face trecerea din sistemul $O_1x_1y_1z_1$ în sistemul O_1xyz cu ajutorul relației matriceale :

$$(\rho) = M_1^{-1}(\rho_1), \tag{38}$$

unde M_1^{-1} este matricea inversă a matricei M_1 și are expresia :

$$M_1^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\psi_1 & \sin\psi_1 & 0 & 0 \\ -\sin\psi_1 & \cos\psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{39}$$

ceea ce înseamnă că (25) ia forma :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi_1 & \sin\psi_1 & 0 & 0 \\ -\sin\psi_1 & \cos\psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{pmatrix}, \tag{40}$$

adică

$$x = x_1\cos\psi_1 + y_1\sin\psi_1,$$
$$y = -x_1\sin\psi_1 + y_1\cos\psi_1,$$
$$z = z_1, \ t = t_1 = 1, \tag{41}$$

Substituind (11) în (41) și ținînd seama de relația $\varphi_1 = \psi_1 + 2\pi n$, după regruparea termenilor, se obține :

$$x = d\cos i_{21}(\psi_1 + 2\pi n) + r\sin[\delta - i_{21\,a}(\psi_1 + 2\pi n)] - a,$$
$$y = -e, \tag{42}$$
$$z = d\sin i_{21}(\psi_1 + 2\pi n) + r\cos[\delta - i_{21}(\psi_1 + 2\pi n)].$$

Din (42) eliminînd parametrul δ se obține ;

$$[x + a - d\cos i_{21}(\psi_1 + 2\pi n)]^2 + [z - d\sin i_{21}(\psi_1 + 2\pi n)]^2 = r^2, \tag{43}$$

ceea ce reprezintă familia liniilor de contact din planul $y = -e$. Acestea sînt niște arce de cercuri de rază r.

A doua familie a liniilor de contact este dată de ecuațiile :

$$x_1 = x_1(\varphi_1, \delta),\ y_1 = y_1(\varphi_1, \delta),\ z_1 = z_1(\varphi_1, \delta), \tag{44}$$

$$[d^2 \cos\varphi_2 \cos\delta - ad\cos\delta + rd\sin(\delta - \varphi_2)(\cos\delta - ad\cos\varphi_2\cos(\delta -$$

$$- \varphi_2) - ar\sin(\delta - \varphi_2)\cos(\delta - \varphi_2) + a^2\cos(\delta - \varphi_2)]\sin\frac{\alpha}{2} +$$

$$+ \{di_{21}\cos\delta[d\sin\varphi_2 + r\cos(\delta - \varphi_2)] - e[d\cos\delta -$$

$$- a\cos(\delta - \varphi_2)]\}\cos\frac{\alpha}{2} = 0.$$

Ținînd seama de (11) și (41) sistemul (44) devine :

$$\begin{aligned} x &= [d\cos\varphi_2 + r\sin(\delta - \varphi_2) - a]\cos\alpha + e\sin\alpha, \\ y &= [d\cos\varphi_2 + r\sin(\delta - \varphi_2) - a]\sin\alpha - e\cos\alpha, \\ z &= d\sin\varphi_2 + r\cos(\delta - \varphi_2), \\ A\cos\delta &+ B\sin\delta - C\cos^2\delta + D\sin\delta\cos\delta + E = 0, \end{aligned} \tag{45}$$

unde

$$A = (d^2\cos\varphi_2 - ad - ad\cos^2\varphi_2 + a^2\cos\varphi_2)\sin\frac{\alpha}{2} + (d^2 i_{21}\sin\varphi_2 - ed +$$

$$+ ea)\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$B = (a^2\sin\varphi_2 - ad\cos\varphi_2\sin\varphi_2)\sin\frac{\alpha}{2} + ea\sin\varphi_2\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$C = (dr\cos\varphi_2 + 2ra\sin\varphi_2\cos\varphi_2)\sin\frac{\alpha}{2} - dri_{21}\cos\varphi_2\cos\frac{\alpha}{2}, \tag{46}$$

$$D = (dr\cos\varphi_2 + ra\cos 2\varphi_2)\sin\frac{\alpha}{2} + dri_{21}\sin\varphi_2\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$E = ra\cos\varphi_2\sin\varphi_2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Sistemul (45) reprezintă a doua familie a liniilor de contact ale angrenajului.

Liniile de contact se determină după cum urmează :

— Pentru prima familie a liniilor de contact exprimată prin sistemul (42) se fixează unghiul de rotație ψ_1 la funcționare al melcului ($\psi_2 = i_{21}\psi_1$) după care se construiește cercul corespunzător ecuației (42) în planul $y = -e$. Acest cerc reprezintă linia de contact. Pentru diferite valori date lui ψ_1 rezultă familia de linii de contact.

— Pentru a doua familie a liniilor de contact descrise de sistemul (45) se fixează unghiul de rotaţie ψ_1 la funcţionare al melcului ($\psi_2 = i_{21}\psi_1$). Se dă o valoare pentru unghiul φ_1 (sau $\varphi_2 = i_{21}\varphi_1$).
Se calculează din ultima ecuaţie a sistemului (45) valoarea unghiului δ, adică se rezolvă ecuaţia de gradul al patrulea în $\operatorname{tg}\delta$:

$$(A + B\operatorname{tg}\delta)^2(1 + \operatorname{tg}^2\delta) = [C - D\operatorname{tg}\delta - E(1 + \operatorname{tg}^2\delta)]^2. \tag{47}$$

Din primele trei ecuaţii ale sistemului (45) rezultă liniile de contact care se determină punct cu punct dînd valori discrete lui φ_1. Dînd diferite valori lui ψ_1 se poate calcula familia liniilor de contact.

În planul $y = -e$, din a doua ecuaţie a sistemului (45) rezultă :

$$\operatorname{tg}\theta \sin\alpha - \cos\alpha = -1, \tag{48}$$

unde

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{d\cos\varphi_2 + r\sin(\delta - \varphi_2) - a}{e}, \tag{49}$$

de unde

$$\cos(\alpha + \theta) - \cos\theta - 0, \tag{50}$$

cu soluţia

$$\alpha = 2K\pi,\ K \in \mathbb{Z}. \tag{51}$$

Înlocuind (51) în ultima relaţie din (44) sau (45) se obţine

$$(d^2 i_{21}\sin\varphi_2 - ed + ea)\cos\delta + ea\sin\varphi_2\sin\delta + dri_{21}\cos\varphi_2\cos^2\delta +$$
$$+ dri_{21}\sin\delta\cos\delta = 0. \tag{52}$$

Soluţia (51) care satisface şi prima familie de linii de contact (42) arată că cele două familii de linii de contact se intersectează în planul $y = -e$. Soluţiile ecuaţiei (52) dau valorile unghiului δ pentru care se intersectează cele două familii de linii de contact în planul $y = -e$.

Se poate concluziona că şi la angrenajul globoidal neriglat cu spira melcului după un arc de cerc dar nu într-o secţiune axială pe anumite zone există două linii de contact.

3. SUPRAFEŢELE FLANCURILOR DINŢILOR ROŢII MELCATE

Suprafeţele flancurilor dinţilor roţii melcate se determină cu locul geometric al liniilor de contact în sistemul legat de roată, adică în sistemul $O_2 v_2 y_2 z_2$ sau ca înfăşurătoarea suprafeţei spirei melcului.

Trecerea în sistemul legat de roată se face cu relaţia matriceală :

$$(\rho_2) = M_2^{-1} \cdot M_1^{-1} \cdot (\rho_1). \tag{53}$$

unde M_2^{-1}, M_1^{-1} sînt matricele inverse ale matricelor M_2, M_1 de forma (4) şi (5) în care unghiurile φ_1, φ_2 se înlocuiesc cu unghiurile ψ_1, ψ_2.

Matricele inverse se obțin din matricele normale folosind relația de echivalență matriceală :

$$(Q\,|I\,|B) \sim (I)\,Q^{-1}|\,Q^{-1}\,B), \tag{54}$$

unde I este matricea unitate, B — o matrice oarecare.

Astfel, relația (53) ia forma :

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 \cos\psi_1 \cos\psi_2 + y_1 \sin\psi_1 \cos\psi_2 + z_1 \sin\psi_2 + a\cos\psi_2, \\ y_2 &= -x_1 \sin\psi_1 + y_1 \cos\psi_1, \\ z_2 &= -x_1 \cos\psi_1 \sin\psi_2 - y_1 \sin\psi_1 \sin\psi_2 + z_1 \cos\psi_2 - a\sin\psi_2. \end{aligned} \tag{55}$$

Înlocuind (11) în (55) se obține :

$$\begin{aligned} x_2 &= [d\cos\varphi_2 + r\sin(\delta-\varphi_2) - a]\cos\varphi_2\cos\alpha + d\sin\varphi_2\sin\psi_2 + \\ &\quad + r\cos(\delta-\varphi_2)\sin\psi_2 + e\cos\psi_2\sin\alpha + a\cos\psi_2, \\ y_2 &= [d\cos\varphi_2 + r\sin(\delta-\varphi_2) - a]\sin\alpha - e\cos\alpha, \\ z_2 &= -[d\cos\varphi_2 + r\sin(\delta-\varphi_2) - a]\sin\psi_2\cos\alpha + d\sin\varphi_2\cos\psi_2 + \\ &\quad + r\cos(\delta-\varphi_2)\cos\psi_2 - a\sin\psi_2 - e\sin\psi_2\sin\alpha. \end{aligned} \tag{56}$$

Atașînd sistemul (56) condiția (35), se obține ecuația suprafeței flancului dintelui roții melcate, adică

$$\begin{aligned} x_2 &= [d\cos\varphi_2 + sr\sin(\delta-\varphi_2) - a]\cos\psi_2\cos\alpha + d\sin\varphi_2\sin\psi_2 + \\ &\quad + r\cos(\delta-\varphi)\sin\psi_2 + a\cos\psi_2 + e\cos\psi_2\sin\alpha, \\ y_2 &= [d\cos\varphi_2 + r\sin(\delta-\varphi_2) - a]\sin\alpha - e\cos\alpha, \\ z_2 &= -[d\cos\varphi_2 + r\sin(\delta-\varphi_2) - a]\sin\psi_2\cos\alpha + d\sin\varphi_2\cos\psi_2 + \\ &\quad r\cos(\delta-\varphi_2)\cos\psi_2 - e\sin\psi_2\sin\alpha, \end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned} \sin\frac{\alpha}{2}\Big\{&[d^2\cos\varphi_2\cos\delta - ad\cos\delta + rd\sin(\delta-\varphi_2)\cos\delta - \\ &- ad\cos\varphi_2\cos(\delta-\varphi_2) - ar\sin(\delta-\varphi_2)\cos(\delta-\varphi_2) + \\ &+ a^2\cos(\delta-\varphi_2)]\sin\frac{\alpha}{2} + \{di_{21}\cos\delta[d\sin\varphi_2 + r\cos(\delta-\varphi_2)] - \\ &- e\,[d\cos\delta - a\cos(\delta-\varphi_2)]\}\cos\frac{\alpha}{2}\Big\} = 0. \end{aligned}$$

Una din soluțiile ultimei condiții a sistemului (57) pentru $n = 0$ este $\alpha = \varphi_1 - \psi_1 = 0$ dă o parte a suprafeței flancului dintelui care, din (57), rezultă :

$$\begin{aligned} x_2 &= [d\cos\varphi_2 + r\sin(\delta-\varphi_2) - a]\cos\psi_2 + d\sin\varphi_2\sin\psi_2 + \\ &\quad + r\cos(\delta-\varphi_2)\sin\psi_2 + a\cos\psi_2, \\ y_2 &= -e, \\ z_2 &= -[d\cos\varphi_2 + r\sin(\delta-\varphi_2) - a]\sin\psi_2 + d\sin\varphi_2\cos\psi_2 + \\ &\quad + r\cos(\delta-\varphi_2)\cos\psi_2 - a\sin\psi_2, \end{aligned} \tag{58}$$

sau

$$x_2 = d + r \sin \delta, \quad y_2 = -e, \quad z_2 = r \cos \delta. \tag{59}$$

Aceasta este prima linie de contact a melcului cu roata melcată. Această linie de contact (59) este chiar curba generatoare a spirei melcului (1), adică un arc de cerc.

Cealaltă soluție a ultimei condiții a sistemului (57) dă restul suprafeței flancului dintelui roții melcate, adică

$$x_2 = [d \cos \varphi_2 + r \sin (\delta - \varphi_2) - a] \cos \psi_2 \cos \alpha +$$
$$+ d \sin \varphi_2 \sin \psi_2 + r \cos (\delta - \varphi_2) \sin \psi_2 + a \cos \varphi_2 + e \cos \psi_2 \sin \alpha,$$
$$y_2 = [d \cos \varphi_2 + r \sin (\delta - \varphi_2) - a] \sin \alpha - e \cos \alpha.$$
$$z_2 = -[d \cos \varphi_2 + r \sin(\delta - \varphi_2) - a] \sin \psi_2 \cos \alpha +$$
$$+ d \sin \varphi_2 \cos \psi_2 + r \cos (\delta - \varphi_2) \cos \psi_2 - a \sin \psi_2 - e \sin \psi_2 \sin \alpha, \tag{60}$$
$$[d^2 \cos \varphi_2 \cos \delta - ad \cos \delta + rd \sin(\delta - \varphi_2) \cos \delta - ad \cos \varphi_2 \cos(\delta -$$
$$- \varphi_2) - ar \sin (\delta - \varphi_2) \cos (\delta - \varphi_2) + a^2 \cos (\delta - \varphi)] \sin \frac{\alpha}{2} +$$
$$+ \{di_{21} \cos \delta[d \sin \varphi_2 + r \cos (\delta - \varphi_2)] - e [d \cos \delta -$$
$$- a \cos(\delta - \varphi_2)]\} \cos \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Sistemul (60) reprezintă a doua familie a liniilor de contact pe roata melcată .

Se observă că prima linie de contact (59) și cu cea de a doua familie de contact (60) se intersectează în planul $y_2 = -e$ al roții (deci nu în cel median $y_2 = 0$).

Punctele de intersecție se găsesc din (60) prin înlocuirea lui $\alpha = \varphi_1 - \psi_1 = 0$ ($\varphi_2 - \psi_2 = 0$), deci

$$x_2 = d + r \sin \delta, \quad y_2 = -e, \quad z_2 = r \cos \delta, \tag{61}$$

$$di_{21} \cos \delta \, [d \sin \varphi_2 + r \cos(\delta - \varphi_2)] - e \, [d \cos \delta - a \cos (\delta - \varphi_2)] = 0.$$

Studiul formei flancului dintelui roții melcate se poate face intersectîndu-l cu diferite plane.

Particulatizînd $e = 0$ se obține angrenajul neriglat cu profilul melcului [4] în secțiune axială după un arc de cerc.

Primit la redacție la 27 noiembrie 1986

BIBLIOGRAFIE

1. F. L., LITVIN, *Teoria zubceatîh zațeplenii*, Izd. Nauka, Moscova, 1968.
2. N. N., KRÎLOV, *Teoria zațeplenia oghibaiuscih dvuhparametricescova semeistva poverhnostei*, Iz. vuzov, Mașinostroienie, nr. 12, (1963).
3. N. N., KRÎLOV, *Globoidnoe zateplenie s vognutim profilem cerviaca*, „Trudi MIIT'' vip, 195, 1964.
4. V., HANDRA-LUCA, *Contribuții la geometria angrenajului globoidal neirigat*, Bul. șt. al I. P. Cluj, nr. 7, Cluj (1963).

CALCULUL PLĂCILOR ORTOTROPE UTILIZÎNDU-SE ECHIVALENȚI ELASTICI IDEALIZAȚI

de GH. OBLEMENCO

I.P.T.A.N.A.

Se prezintă un procedeu de calcul care apelează la analogia elastică dintre placa ortotropă și rețeaua de grinzi. Aceasta se idealizează cu elemente finite de bară, pentru care caracteristicile geometrice se determină luîndu-se în considerare echivalența elastică dintre aceste elemente finite și porțiunile complexe aferente de placă.

1. INTRODUCERE

Literatura de specialitate cuprinde numeroase lucrări consacrate calculului plăcilor ortotrope. Succint, bogatul material, privitor la metodele de calcul, poate fi clasificat astfel :

a) metode analitice de rezolvare a ecuațiilor diferențiale a plăcilor ortotrope, utilizîndu-se seriile Fourier sau polinoame. [2], [3], [4], [6], [13], [15], [20], [22], [25];

b) utilizarea analogiei elastice prin substituirea plăcilor plane cu rețele de grinzi, utilizîndu-se la rezolvarea acestora procedeele clasice din statica construcțiilor [7], [21], [24];

c) metoda diferențelor finite utilizată la rezolvarea ecuațiilor diferențiale a plăcilor ortotrope (metodă numerică) [8], [9], [16], [18], [19], [21];

d) metoda elementelor finite corelată cu utilizarea procedeelor matriceale de calcul și a tehnicii electronice de prelucrare date [8], [13], [17].

Putem afirma în general că metodele menționate mai sus au fost dezvoltate în timp în ordinea menționată și au depins în mare măsură de instrumentele și dispozitivele disponibile de mecanizare a calculului.

Astfel, primele două metode (a, b) și parțial a treia (c) au fost dezvoltate și utilizate anterior apariției tehnicii electronice de calcul și sînt în general legate de rezolvarea unor cazuri particulare privind configurația și încărcarea plăcilor ortotrope.

Cu toate că se apelează la un instrument matematic complex și au fost elaborate ulterior programe de calcul, metodele analitice nu au avut o dezvoltare, datorită domeniului limitat de aplicare (nu se pot cuprinde optim într-un program general diferite configurații în plan a plăcilor ortotrope cu variații privind rigiditatea elementelor constitutive inclusiv condiții diferite de contur și încărcări).

O dată cu dezvoltarea tehnicii electronice de calcul au luat avînt metodele numerice de calcul cum sînt utilizarea diferențelor finite la integrarea ecuațiilor diferențiale la plăcile ortotrope și metodele matriceale avînd la bază utilizarea elementelor finite specifice.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 46, NR. 3, 1987, P. 239–249

Menţionăm că şi aceste ultime două metode numerice au limitări şi neajunsuri în cazul utilizării lor în procesul de proiectare.

O discretizare detaliată care presupune utilizarea elementelor finite de placă pentru tolă, lonjeronii şi antretoazele plăcii ortotrope, conduce la necesitatea rezolvării unor sisteme de ecuaţii cu mii de necunoscute avînd semibenzi mari care pot fi rezolvate doar de calculatoare de capacitate şi viteză mare de prelucrare, cu obţinerea unor rezultate care de multe ori nu justifică utilizarea acestora decît în cadrul unor studii avînd caracter de cercetare.

Astfel, programe de calcul elaborate pe baza metodei diferenţelor finite sau utilizarea analogiei elastice cu folosirea reţelei de grinzi echivalente pot deveni optime de utilizat în procesul de proiectare al plăcilor ortotrope datorită numărului mai redus de necunoscute la rezolvarea sistemelor de ecuaţii şi cu semibenzi mai mici.

Trebuie să arătăm că majoritatea metodelor avînd la bază ecuaţia diferenţială a plăcilor ortotrope permit determinarea eforturilor secţionale din încovoerea generală, fără posibilitatea determinării solicitărilor locale datorate încărcărilor concentrate pe arii limitate la lonjeronii rigizi ai plăcilor ortotrope, cu excepţia unei discretizări detaliate cu elemente finite specifice cum a fost menţionat mai sus.

Lucrarea de faţă prezintă un mod de calcul care are la bază procedeul (b) şi utilizează analogia elastică dintre placa ortotropă cu lonjeronii rigizi *) şi reţeaua de grinzi, prin discretizarea acesteia cu elemente finite de bară pentru care caracteristicile geometrice se determină utilizîndu-se echivalenţa elastică dintre acestea şi porţiunile complexe aferente de placă.

Modul de calcul propus face apel la un program simplu de calcul la încovoiere a reţelelor alcătuite din elemente finite de bară şi un altul pentru calculul structurilor plane oarecare alcătuite din elemente finite de bară care pot fi utilizate pe minicalculatoare [11].

2. DETERMINAREA EFORTURILOR ŞI DEPLASĂRILOR ÎN TOLĂ ŞI LONJERONII PLĂCII ORTOTROPE METALICE DIN ÎNCOVOIEREA GENERALĂ

Pentru verificarea modului de calcul propus pentru analiza stării de eforturi şi deplasări din solicitări normale pe planul plăcii, s-a luat în considerare placa ortotropă prezentată în figura 1 pentru care se cunosc rezultate experimentale detaliate [1].

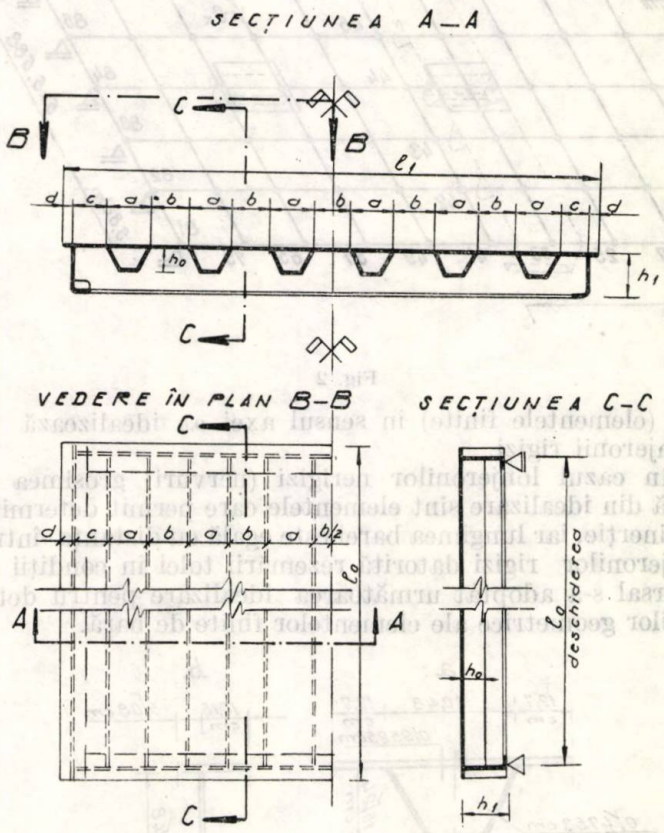
Idealizarea plăcii ortotrope s-a făcut adoptîndu-se o reţea alcătuită din elemente finite de bare (fig. 2) avînd lungimi în sensul axei *ox* în funcţie de distanţele între axele centrelor de greutate a lonjeronilor rigizi (închişi) 3,8 dm la margini şi 5,588 dm în cîmp, obţinîndu-se opt noduri, iar în sensul axei *oy* deschiderea plăcii poate fi discretizată în funcţie de detalierea solicitată pentru calcul.

Pentru placa examinată aceasta a fost împărţită în zece părţi egale (11 noduri) rezultînd elemente finite de bară a căror lungime este de 3,05 dm apropiată cu distanţa între lonjeroni.

Caracteristicile geometrice pentru elementele finite de bare care idealizează lonjeronul (pe direcţia axei *oy*) au fost considerate astfel :

*) Modul de calcul propus este valabil şi pentru cazul lonjeronilor elastici sau pentru anumite structuri de poduri cu secţiuni casetate.

Momentul de inerţie pentru lonjeron (fig. 3*a*) a fost determinat ţinîndu-se seama că lăţimea tolei aferentă lonjeronului este egală cu distanţa între lonjeroni. Menţionăm că distanţa între lonjeroni la plăcile ortotrope este determinată de solicitările şi deformaţiile care apar în tolă din încărcări locale, în zona dintre lonjeroni, în cazul lonjeronilor simpli, sau în cîmpurile adiacente şi în cîmpul din dreptul lonjeronului închis. Pentru structurile de plăci ortotrope la poduri această distanţă variază între 30—40 cm, astfel încît aproape în majoritatea cazuiilor se poate considera că lăţimea activă de conlucrare a tolei pentru determinarea momentului de inerţie, este egală cu distanţa între lonjeroni [1] [15].



	a	b	c	d	h_o	h_1	l_o	l_1	l_2
cm	30.48	25.40	22.86	5.08	15.24	30.48	305	366	376
ft-in	12"	10"	9"	2"	6"	12"	10'-0"	12'-0"	10'-4"

Fig. 1.

Momentul de inerţie la torsiune a fost determinat cu formula lui Bredt numai pentru conturul închis al lonjeronului, porţiunea aferentă din tolă în afara conturului are o valoare neglijabilă.

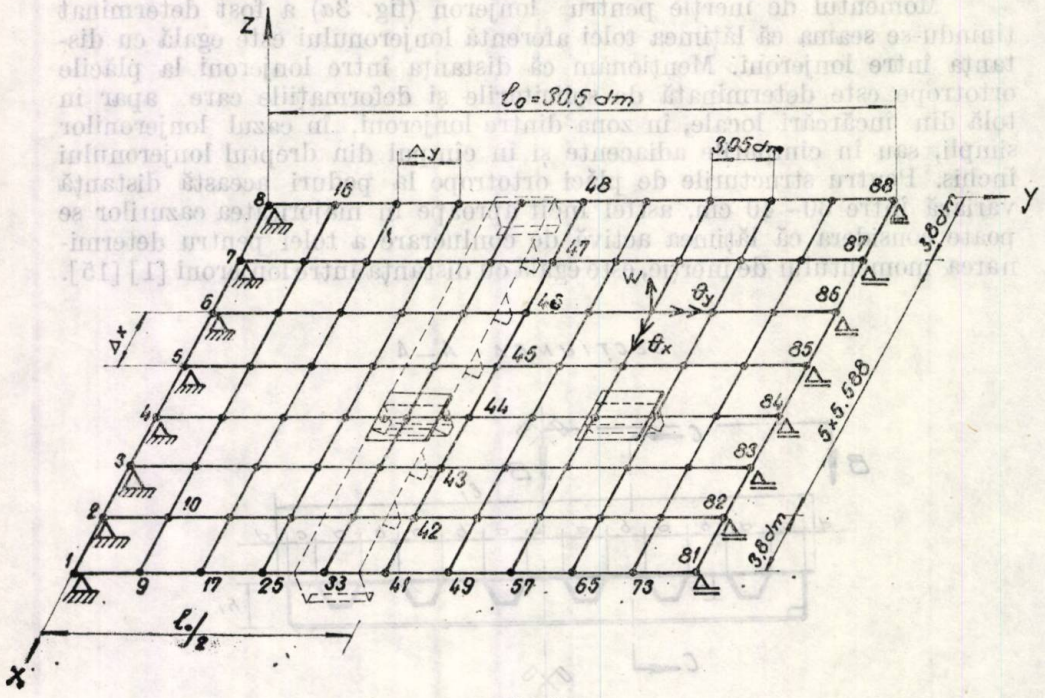
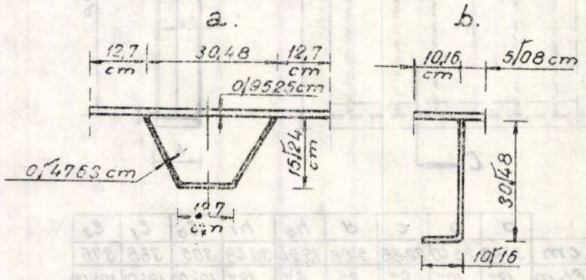


Fig. 2

Barele (elementele finite) în sensul axei *ox* idealizează tola rezemată pe lonjeronii rigizi.

Dacă în cazul lonjeronilor nerigizi (nervuri) grosimea tolei și lățimea reieșită din idealizare sînt elementele care permit determinarea momentelor de inerție, iar lungimea barei este egală cu distanța între nervuri, în cazul lonjeronilor rigizi datorită rezemării tolei în condiții diferite în sens transversal s-a adoptat următoarea idealizare pentru determinarea caracteristicilor geometrice ale elementelor finite de bară.



$A = 0,757\ dm^2$ $A = 0,532\ dm^2$

$I_{\hat{z}} = 0,212\ dm^4$ $I_{\hat{x}} = 0,777\ dm^4$

$I_t = 0,325\ dm^4$ $I_t = 0$

Fig. 3

Avînd lungimea impusă de distanța între centrele de greutate ale lonjeronilor (în sensul axei ox), elementele finite de bară trebuie să aibă caracteristicile geometrice astfel determinate, încît să reprezinte echivalentul elastic al secțiunii transversale de placă ortotropă între axele ce trec prin centrele de greutate ale lonjeronilor (fig. 4 *a*, *b*) avînd o lățime în sensul axei oy egală cu distanța de discretizare pentru elementele finite de bară pe această direcție (Δy). O astfel de echivalență se obține, dacă pentru o aceeași solicitare impusă avînd aceleași condiții de rezemare, rezultă aceeași deformată atît pentru elementul finit echivalent elastic, cît și pentru secțiunea transversală aferentă de placă ortotropă.

În figurile 4 *a*, *b* se prezintă acest lucru pentru o solicitare tăetoare P avînd condiții de rezemare și deformata Δ identice. Se poate lua în considerare pentru această echivalență și o altă solicitare și deformată corespunzătoare.

Fiind cunoscute, caracteristicile geometrice pentru porțiunea transversală de placă, aceasta se poate idealiza cu elemente finite de bară în plan (fig. 4 *c*), pentru care se poate determina cu un program de calcul răspunsul elastic prin deplasarea Δ pentru o anumită solicitare tăetoare P și condiții de contur impuse (din condiții de simetrie calculul se efectuează pentru o jumătate de structură).

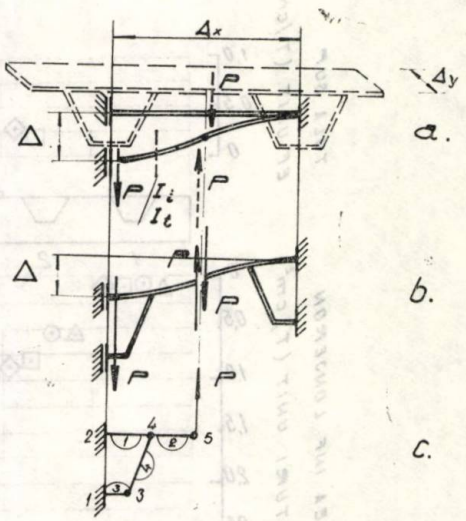


Fig 4

Cunoscîndu-se pentru porțiunea complexă de placă ortotropă răspunsul elastic Δ pentru solicitarea P, cu aceste valori se pot determina

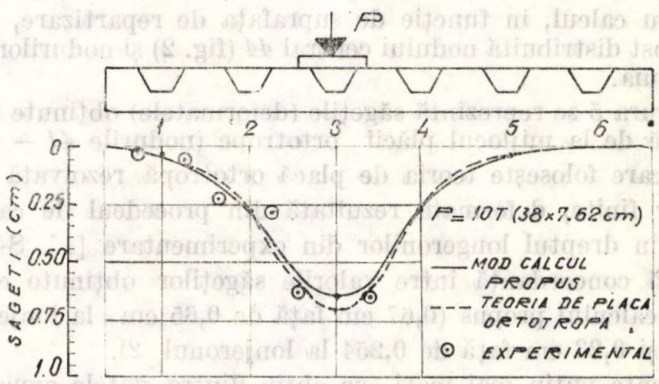


Fig. 5

caracteristicile geometrice pentru elementul finit de bară echivalent avînd lungimea Δx.

Fiind astfel idealizată rețeaua de bare, cu un program de calcul se rezolvă placa la solicitări normale pe planul acesteia obținîndu-se starea de eforturi secționale și deformata structurii din încovoierea generală.

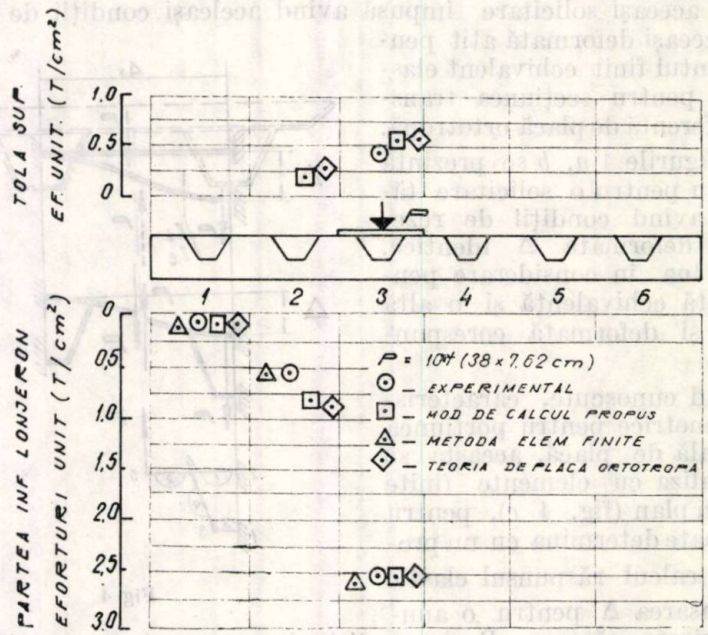


Fig. 6

Încărcarea experimentală [1] a fost de 10 t, repartizată într-o variantă de încărcare pe o suprafață de $38 \times 7{,}62$ cm și alta de $60{,}96 \times 15{,}24$ cm, simulîndu-se astfel încărcarea provenită din roata unui autovehicol greu.

Pentru calcul, in funcție de suprafața de repartizare, sarcina de 10 tone a fost distribuită nodului central *44* (fig. 2) și nodurilor din vecinătatea acestuia.

În figura 5 se reprezintă săgețile (deformatele) obținute în secțiunea transversală de la mijlocul plăcii ortotrope (nodurile *41* — *48*) în baza calculului care folosește teoria de placă ortotropă rezolvată cu metoda diferențelor finite, deformata rezultată din procedeul de calcul propus și săgețile în dreptul longeronilor din experimentare [1]. S-a obținut o foarte bună concordanță între valorile săgeților obținute experimental și cele din calculul propus (0,67 cm față de 0,65 cm la lonjeronul direct încărcat *3* și 0,23 cm față de 0,254 la lonjeronul *2*).

Diferențe puțin mai mari se obțin dintre datele experimentale și calculul folosind teoria de placă ortotropă (0,67 cm față de 0,72 cm).

În figura 6 sînt reprezentate eforturile unitare din experimentare obținute la partea inferioară a lonjeronului și la partea superioară a tolei în comparație cu cele două metode de calcul arătate mai sus la care se adaugă și eforturile unitare obținute cu metoda elementelor finite [1].

Pentru modul de calcul propus eforturile unitare s-au determinat prin raportarea eforturilor secționale obținute, la modulul de rezistență al lonjeronului, obținîndu-se o concordanță deplină pentru eforturile unitare de întindere la partea inferioară a lonjeronului central *3* (2509 daN/cm^2 din calcul față de 2506 daN/cm^2 experimental), și satisfăcătoare (671 daN/cm^2 față de 403 daN/cm^2) pentru efortul unitar de compresiune din tolă.

O concordanță foarte bună s-a obținut de asemenea pentru efortul unitar de întindere în cazul repartizării sarcinii pe o suprafață mai mare (2125 daN/cm^2 din calcul față de 2126 daN/cm^2 din experimentare).

Diferența mai mare, dintre efortul unitar de compresiune obținut din calcul față de cel din experimentare, se explică prin faptul că pentru sarcina locală, conlucrarea tolei cu lonjeronul este mai mare în realitate decît s-a adoptat în calcul, obținîndu-se valorile arătate care se mențin și pentru celelalte metode de calcul utilizate pentru comparare (fig. 6) [1].

Valoarea efortului unitar de întindere în lonjeron este însă mai puțin sensibil la lățimea de conlucrare a tolei, ținîndu-se seama de configurația secțiunilor transversale ale lonjeronilor utilizați la poduri.

3. DETERMINAREA EFORTURILOR ȘI DEPLASĂRILOR ÎN TOLA ȘI LONJERONII PLĂCII ORTOTROPE DIN ÎNCARCAREA LOCALĂ

În afara solicitărilor provenite din încovoierea generală a plăcii din care se obțin eforturi unitare de întindere predominante la partea inferioară a lonjeronilor și de compresiune în tolă în sens longitudinal (*oy*), apar solicitări și deformații în tolă și lonjeroni în sens traversal datorită sarcinilor locale care încarcă direct tola plăcii ortotrope. Cunoscîndu-se deformata plăcii determinată anterior prin săgețile în dreptul nodurilor rețelei de grinzi, se pot determina prin interpolare și săgețile în secțiuni transversale în dreptul punctelor de legătură între tabla lonjeronilor și tolă sau în orice punct dorit al plăcii.

Pentru determinarea solicitărilor și deformațiilor în sens transversal se propune următorul mod de calcul :

Se detașează o fișie de lățime unitară (în sens longitudinal) pe toată lungimea plăcii ortotrope în sens transversal (fig. 7 *a*) în dreptul sarcinii locale (lățimea poate fi aleasă în funcție de repartiția sarcinii locale în sens longitudinal).

Se obține o structură de cadru (fig. 7 *b*) ce poate fi idealizată în plan cu elemente finite de bară a căror caracteristici geometrice se cunosc și este acționat de sarcina locală repartizată aferentă lățimii unitare. În dreptul sarcinii locale distribuite discretizarea tolei se detaliază.

Determinarea solicitărilor și deplasărilor pentru acest cadru idealizat se poate face considerînd că acesta reazemă pe niște bare elastice fictive

(resoarte) în dreptul punctelor inferioare de îndoire a tablei lonjeronilor (fig. 7 *b*) reprezentînd un pat elastic echivalent (fictiv) pe toată lățimea plăcii ortotrope.

Caracteristicile de rigiditate a barelor se determină astfel încît cînd acționează sarcina locală aferentă, deformata acestui cadru să coincidă cu cea obținută din încovoierea generală pentru punctele de legătură între tolă și lonjeroni (fig. 7 *c*).

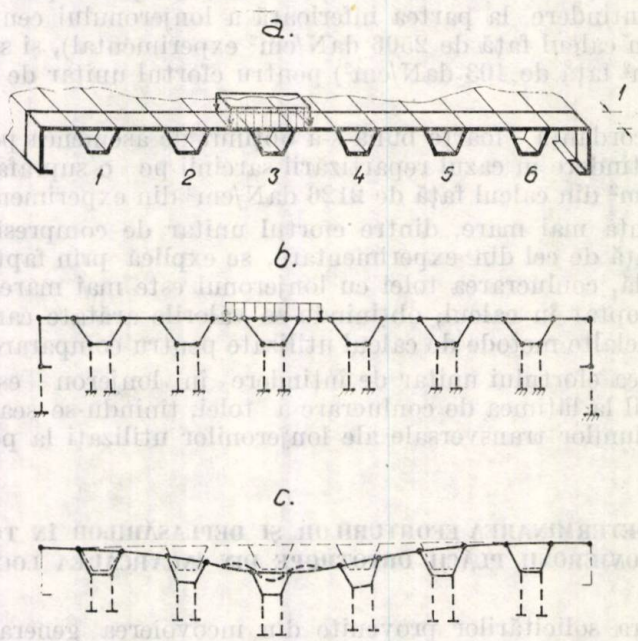


Fig. 7

Cadrul se rezolvă simplu cu ajutorul unui program pentru calculul structurilor plane [11] determinîndu-se diagrama de momente și solicitările axiale, rezultînd atît eforturi unitare, cît și deformații locale în tolă și lonjeroni din încărcarea locală distribuită.

O altă variantă de calcul a structurii cadrului este de a introduce bare elastice fictive avînd toate aceeași rigiditate în dreptul punctelor menționate mai sus, introducîndu-se solicitări axiale în barele fictive, astfel încît împreună cu sarcina locală aferentă să se obțină deformata din încovoierea generală în dreptul punctelor de legătură între tolă și lonjeroni.

Efortul unitar cel mai defavorabil apare în tolă în cîmpul dintre pereții lonjeronului rigid în dreptul sarcinii locale. Valoarea acestui efort unitar pentru încărcarea directă a tolei este de 7150 daN/cm^2.

Arătăm în acest sens că lucrarea [1] nu prezintă rezultate experimentale din solicitări locale din cauza dificultăților de ordin practic, făcîndu-se doar estimări teoretice a căror valoare maximă în tolă coincide cu valoarea efortului unitar menționat mai sus (6975 daN/cm^2).

Trebuie de asemenea menționat faptul că în realitate valoarea efortului unitar local în tolă este mult mai mic, datorită faptului că sarcina locală se transmite la tolă prin intermediul îmbrăcăminții rutiere avînd astfel o intensitate directă mai redusă asupra tolei.

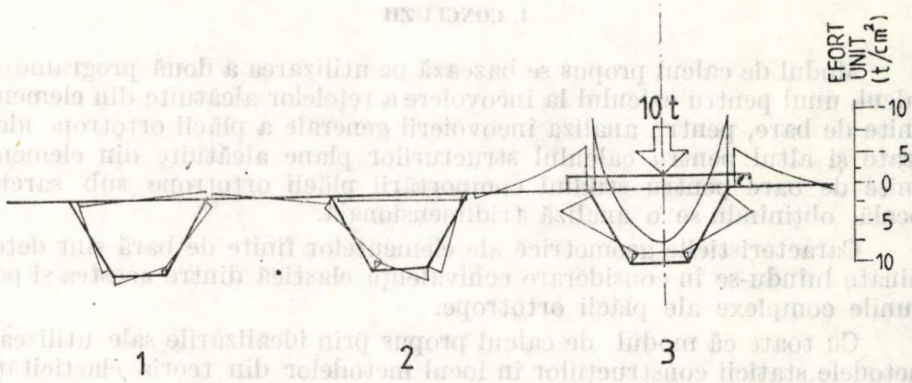


Fig. 8

Examinîndu-se diagrama din figura 8 din care se obțin eforturile unitare, observăm că din sarcina locală dispusă în dreptul unui lonjeron, aceasta influențează foarte puțin asupra lonjeronilor *1*, *5*, *6*, eforturile unitare fiind în general sub 10% față de cele ce se obțin la lonjeronul încărcat direct.

Ținîndu-se seama de acest aspect calculul solicitărilor din încărcările locale poate fi făcut foarte bine după modul descris mai sus doar pentru o structură transversală de placă care cuprinde lonjeronul încărcat direct și lonjeronii vecini.

În afară de eforturile unitare în sens transversal, din încărcarea locală apar în tolă și eforturi unitare în sens longitudinal, tola considerîndu-se ca o placă izotropă de lungime infinită cu rezemări (de semiîncastrare) în dreptul legăturilor cu pereții lonjeronului închis.

Solicitările de încovoiere se pot determina aplicîndu-se metoda diferențelor finite sau metoda elementelor finite pentru o discretizare adecvată a tolei astfel încît să rezulte eforturile unitare în sens longitudinal cît și în sens transversal (acestea din urmă trebuie să coincidă pentru valorile maxime cu cele stabilite anterior).

Valorile eforturilor unitare longitudinale în tolă din încărcarea locală depind de lungimea de repartizare a sarcinii concentrate în sens longitudinal și sînt în general mai reduse situîndu-se între 80 — 50% din valoarea eforturilor unitare în sens transversal.

Determinarea și analizarea solicitărilor locale prezintă importanță în special la calculul îmbinărilor cu sudură a lonjeronilor de tolă dat fiind caracterul alternant al acestora.

Au fost determinate și analizate separat stările de eforturi într-o placă ortotropă din încovoierea generală și din încărcarea locală fără a se examina suprapunerea efectelor, cît și conlucrarea acesteia în cadrul unei structuri de pod.

4. CONCLUZII

Modul de calcul propus se bazează pe utilizarea a două programe de calcul, unul pentru calculul la încovoiere a rețelelor alcătuite din elemente finite de bare, pentru analiza încovoierii generale a plăcii ortotrope idealizate și altul pentru calculul structurilor plane alcătuite din elemente finite de bare pentru studiul comportării plăcii ortotrope sub sarcina locală, obținîndu-se o analiză tridimensională.

Caracteristicile geometrice ale elementelor finite de bară sînt determinate luîndu-se în considerare echivalența elastică dintre acestea și porțiunile complexe ale plăcii ortotrope.

Cu toate că modul de calcul propus prin idealizările sale utilizează metodele staticii construcțiilor în locul metodelor din teoria elasticității, putem afirma că rezultatele obținute concordă cu rezultatele experimentale și diferă foarte puțin de rezultatele obținute prin alte metode de calcul complexe.

Prezintă avantaje față de alte metode de calcul (în special cele analitice), întrucît pentru rețeaua de grinzi echivalentă se pot lua în considerare diferite configurații în plan (plăci drepte sau oblice, continue pe antretoaze) cu diferite condiții de rezemare pe contur avînd eventual rigidități diferite pentru lonjeroni pe deschideri. Se poate aplica la plăci ortotrope avînd pentru lonjeronii rigizi orice formă în secțiune transversală, cît și la calculul tablierelor de poduri alcătuite din fișii cu goluri.

Trebuie să menționăm în această direcție că echivalența elastică preconizată pentru determinarea caracteristicilor geometrice ale elementelor finite de bară ale rețelei, au fost verificate de autor și pentru o structură de pod din beton armat precomprimat, care a fost similar discretizat, avînd secțiunea transversală alcătuită din două casete (fig. 9).

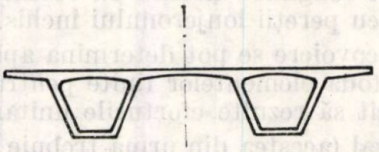


Fig. 9

Măsurătorile obținute pentru săgeți la încercarea podului la încărcări simetrice și excentrice în secțiune transversală au confirmat coincidența cu rezultatele obținute prin calcul.

Modul de calcul propus pentru plăcile ortotrope, cu anumite completări poate fi utilizat și în domeniul de comportare plastică (în trepte de încărcare cu modificarea caracteristicilor fizice și geometrice).

Primit la redacție la 13 noiembrie 1986

BIBLIOGRAFIE

1. J. DOWLING PATRICK, *The behaviour of orthotropic steel deck bridges. Developments in Bridge Design and Construction*. Editat de K. C. ROCKEY ş.a. CROSBY LOCKWOOD, 1981, p. 557 — 575.
2. E. GIENCKE, *Die Grundgleichungen für die orthotrope Platte mit exzentrischen Steifen*, Der Stahlbau, No. 6 (1955).
3. E. GIENCKE, *Die Berechnung von durchlaufenden Fahrbahnplatten*, Der Stahlbau, 9, 11, 12 (1958).
4. D. GUPTA, J. KENNEDY, *Continuous Skew orthotropic plate structures*, Journal of the Structural Division. Vol. **104**, No. ST 2, Feb. (1978).
5. R. GUTKOWSKI, *Finite Panel analysis of orthotropic plate systems*, Journal of the structural Division. Vol. **103**, No. ST 11, Nov. (1977).
6. K. KLÖPPEL, *Systematische Ableitung der Differentialgleichungen für ebene anisotrope Flächentragwerke*, Der Stahlbau, 2, Februar (1960).
7. C. MASSONNET, *Method of calculation of Bridges with several longitudinal beams taking into account their torsional resistence*, Publication, Internat. Assoc. for Bridges and Structural Engrg., V. **10**, p. 147—182 (1950).
8. P. MAZILU, N. ŢOPA, M. IEREMIA, *Teoria şi Calculul plăcilor ortotrope*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1983.
9. GH. OBLEMENCO, *Asupra unui procedeu de algoritmizare a integrării ecuaţiilor cu derivate parţiale, utilizate la calculul plăcilor plane isotrope sau ortotrope*. Bul. Ştiinţ. al I.C.B., **21**, 3—4, 199—214 (1977).
10. GH. OBLEMENCO, *Calculul structurilor spaţiale utilizîndu-se echivalenţi elastici idealizaţi pentru substructuri*, Bul. Ştiinţ. al I.C.B., **32**, 1, 89—95 (1985).
11. GH. OBLEMENCO, *Asupra unor programe utilizate la calculul structurilor de poduri de şosea*, Bul. Ştiinţ. al I.C.B., **31**, 2, 109—114 (1984).
12. GH. OBLEMENCO, *Consideraţii privind alcătuirea matricei generale de rigiditate a unei structuri de rezistenţă compuse din elemente structurale idealizate (elemente finite)*, Revista Construcţii 10 p. 16—22 (1973).
13. GH. OBLEMENCO, *Asupra utilizării elementelor finite la calculul plăcilor ortotrope*, Buletinul Sesiunii de comunicări a I.C.P.T.T., 26—27 iunie (1975).
14. R. PAMA, A. CUSENS *Load Distribution in Multibeam Concrete Bridge*, Simposionul internaţional pentru proiectarea podurilor de beton. Toronto aprilie 1967.
15. W. PELIKAN, M. ESSLINGER, *Die Stahlfahrbahn*, Berechnung und Konstruction. M.A.N. Forschungsheft, No. 7 (1957).
16. S. PRACHUKTAM, J. LESTINGI, *Bending analysis of anisotropic plates*, Journal of the Structural Division Vol. **103**, No. ST 8, August (1977).
17. J. S. PREZEMIENIECKI, *Theory of Matrix Structural Analysis McGraw*, Hill Book Company, 1968.
18. M. V. SOARE, *Aplicarea ecuaţiilor cu diferenţe finite la calculul plăcilor curbe subţiri*, Ed. a 2-a Edit. Academiei, Bucureşti, 1968.
19. M. V. SOARE, *Aplicarea metodei plurilocale la calculul plăcilor curbe subţiri*. St. Cerc. Mecanică Aplicată. Anul **XI**, 1, 239—259 (1960).
20. M. V. SOARE, *Contribuţii la calculul plăcilor ortotrope, cu nervuri de rigidizare pe o singură parte. St. Cerc. Mecanică* **33**, 4, p. 695—710 (1974); **34**, 1, p. 31 — 44 (1975).
21. M. V. SOARE, *Plăci* (Secţiunea a VI-a din manual pentru calculul construcţiilor) Ediţia a 2-a, Editura Tehnică, Bucureşti, 1977.
22. M. V. SOARE, *A new method for solving orthotropic rectangular plates*. Acta Tehnică Academiae Sc. Hungaricae, T **92** (1 — 2), p. 3 — 22 (1981).
23. M. V. SOARE, *Structuri discrete şi structuri continue în mecanica construcţiilor*, Editura Academiei R. S. România, 1986.
24. ST. TIMOSHENKO, P. WOINOWSKY — KRIEGER *Teoria plăcilor plane şi curbe*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1968.
25. M. S. TROITSKY, *Orthotropic bridges theory and design*, 2nd ed, The James F. Lincoln, Arc Welding Foundation, Ohio, 1968.
26. B. ULITKI, *Prostranstvenie rascioti mostov*, Moskva 1967.

APLICAREA METODEI GRINZII ASOCIATE ÎN STATICA FIRULUI ACȚIONAT DE UN SISTEM SPAȚIAL DE FORȚE CONCENTRATE ȘI DISTRIBUITE

de T. G. REDLOV și R. LUGOJANU

Universitatea din Brașov

Se stabilește sistemul de ecuații care conduce la determinarea liniei de echilibru și a efortului secțional în cazul unui fir perfect flexibil, suspendat în două puncte fixe și încărcat spațial cu n forțe concentrate și o sarcină continuă oarecare. Se presupun cunoscute componentele forțelor concentrate, abscisele punctelor lor de aplicație, precum și legea de variație a intensității și direcției sarcinii continue. Termenii liberi ai sistemului de ecuații conțin valorile momentelor de încovoiere în secțiunile grinzii drepte asociate firului.

1. INTRODUCERE

Elementele filiforme de rezistență se bucură în tehnica inginerească actuală de o aplicabilitate lărgită datorită modernizării și diversificării instalațiilor de transport pe cablu, folosite atît în industrie, cît și în scopuri turistice și de agrement. A apărut astfel necesitatea elaborării unor metode de calcul, care să țină cont de solicitările mecanice mai complexe — de cele mai multe ori spațiale — ale cablurilor purtătoare și trăgătoare, aparținînd instalațiilor de transport.

Deși problema mecanicii firului perfect flexibil a fost exprimată matematic într-o formă rigurosă, devenită clasică, rezolvarea efectivă a acesteia întîmpină dificultăți considerabile, chiar și în unele cazuri particulare simple (de exemplu, determinarea liniei de echilibru a unui fir greu, scufundat parțial într-un mediu lichid). Cazul firului încărcat cu un sistem de forțe concentrate (sarcinile utile) și distribuite cu continuitate (forțele masice etc.) se rezolvă în aplicațiile inginerești prin adoptarea unor ipoteze simplificatoare, justificate între altele prin faptul că însăși evaluarea sarcinilor se face în mod aproximativ și acoperitor.

Astfel, în cazul unui fir supus greutății proprii, rezultă că, prin neglijarea extensibilității sale, linia de echilibru este formată dintr-o succesiune de arce de catenoidă (lănțișor), ale căror extremități coincid cu punctele de aplicație ale forțelor concentrate. Problema conduce la rezolvarea unui sistem de ecuații transcendente. Chiar și în cazul absenței sarcinilor concentrate, rezolvarea efectivă a problemei este incomodă, motiv pentru care au fost propuse unele metode nomografice [5] sau grafico-analitice [8].

O altă aproximație, la care se recurge frecvent în aplicațiile inginerești, constă în neglijarea diferenței dintre lungimea firului și cea a coardei ce unește punctele sale de suspensie. Intensitatea sarcinii continue poate fi evaluată, în consecință, prin raportarea ei nu la lungimea reală a elemen-

ST. CERC. MEC. APL., TOM 46, NR. 3, 1987, P. 250—259

tului de fir, ci la proiecția acestuia pe o direcție anumită, aleasă drept axă a absciselor (de obicei orizontală). Tot în cazul firelor bine întinse se poate considera că punctele de aplicație ale forțelor concentrate își păstrează abscisele invariabile în timpul micilor deplasări. În consecință, problema staticii firului poate fi comod rezolvată prin introducerea noțiunii de „grindă asociată", avînd deschiderea egală cu distanța dintre proiecțiile punctelor de suspensie pe axa absciselor; încărcarea grinzii este dată de componentele normale pe axă ale forțelor care încarcă firul, punctele de aplicație ale sarcinilor concentrate păstrîndu-și abscisele neschimbate. Direcția tangentei și coordonatele unui punct de abscisă dată, ce aparține firului, pot fi determinate apoi cu ajutorul valorilor forței tăietoare și momentului de încovoiere în secțiunea corespunzătoare a grinzii asociate [1], [2], [4], [7].

O a treia aproximație, la care se recurge uneori, constă în neglijarea sarcinii continue, care încarcă firul. În acest caz, linia sa de echilibru coincide cu un anumit poligon funicular al forțelor concentrate date. Soluția problemei se obține relativ ușor pe cale analitică sau grafică în cazul particular al forțelor coplanare cu punctele de suspensie ale firului. În cazul sistemelor spațiale de forțe însă problema se complică datorită faptului că, pentru un număr mai mare decît cinci vectori alunecători, construcția unor poligoane funiculare tridimensionale nu este întotdeauna posibilă. Rezolvarea problemelor spațiale ale algebrei vectorilor alunecători a fost dată în [3] prin utilizarea metodei coordonatelor vectoriale cilindrice, iar trasarea unor poligoane funiculare tridimensionale, asociate unui număr arbitrar de forțe în spațiu, a fost descrisă și justificată teoretic în [6], prin definirea noțiunii de vector cvasiliber.

Dat fiind că, în literatura tehnică de specialitate, problema care face obiectul studiului de față nu este complet rezolvată decît în unele cazuri particulare [4], [7], se va stabili în cele ce urmează sistemul de ecuații, care conduce la obținerea soluției pentru un număr arbitrar de forțe concentrate, în prezența unei sarcini continue de valoare și direcție oarecare, în ipoteza firului perfect flexibil și bine întins, prin aplicarea metodei grinzii asociate.

2. LINIA DE ECHILIBRU A FIRULUI

Un fir perfect flexibil este suspendat în punctele fixe A_0 și A_{n+1} fiind acționat de n forțe concentrate, aplicate în punctele $A_i (i = 1,2,\ldots, n)$, precum și de o sarcină continuă, distribuită în lungul curbei funiculare după o lege care va fi precizată mai jos. Linia de echilibru a firului este o curbă frîntă în punctele A_i (fig. 1).

Raportăm curba funiculară la axele A_0xyz din figură, punctele de suspensie fiind situate în planul $A_0\ xy$. Vom admite că intensitatea sarcinii continue în punctul curent B al curbei funiculare, evaluată în raport cu axa A_0x, este un vector paralel cu planul A_0yz, avînd componentele q' și q'' paralele cu axa A_0y, respectiv A_0z. Ecuațiile de echilibru, exprimate prin proiecțiile forțelor pe axe și prin momentele lor în raport

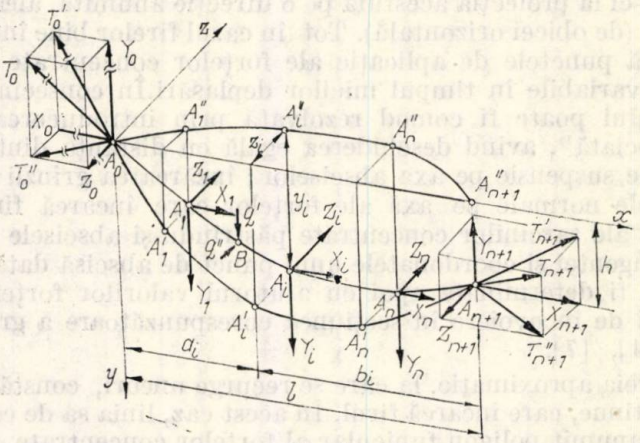


Fig. 1

cu suporturile reacţiunilor Z_{n+1} şi Y_{n+1}, se scriu :

$$X_0 - X_{n+1} = \sum_1^n X_i, \tag{1}$$

$$Y_0 + Y_{n+1} = R' = \sum_1^n Y_i + Q', \quad Q' = \int_l q' \mathrm{d}x, \tag{2}$$

$$Z_0 + Z_{n+1} = R'' = \sum_1^n Z_i + Q'', \quad Q'' = \int_l q'' \mathrm{d}x, \tag{3}$$

$$Y_0 = R'_0 + X_0 \operatorname{tg}\theta + \sum_1^n \left(\frac{y_i}{l} - \operatorname{tg}\theta \right) X_i, \tag{4}$$

$$Z_0 = R''_0 + \sum_1^n \frac{z_i}{l} X_i, \tag{5}$$

în care (a se vedea fig. 2 şi 3) :

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{h}{l}, \quad R'_0 = \frac{R' b'_R}{l}, \quad R''_0 = \frac{R'' b''_R}{l}. \tag{6}$$

Să proiectăm curba funiculară pe planul A_0xy (fig. 2 *a*) şi să considerăm arcul $A'_{j-1}A'_j$. Panta tangentei în punctul curent B' rezultă din examinarea poligonului forţelor (fig. 2*c*) :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \operatorname{tg}\alpha' = \frac{Y_0 - Q'_{0x} - Y_1 - \ldots - Y_{j-1}}{H_{j-1,j}}, \tag{7}$$

în care

$$Q'_{0x} = \int_0^x q' \mathrm{d}x, \; H_{j-1,j} = X_0 - X_1 - \ldots - X_{j-1} = X' \text{ const.} \tag{8}$$

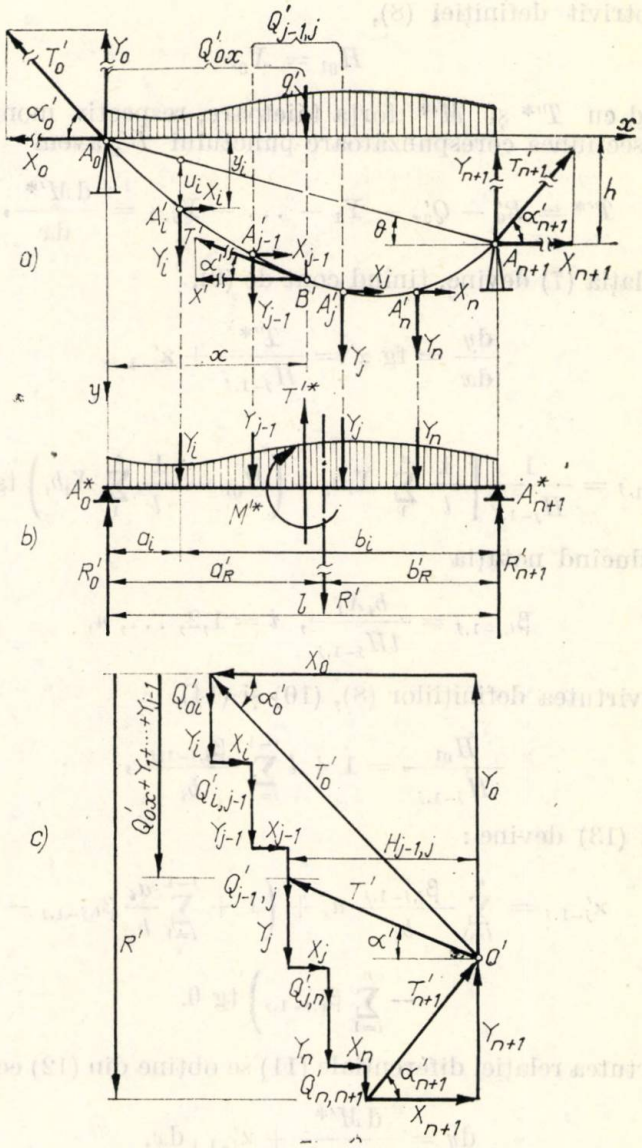


Fig. 2

Să considerăm acum grinda dreaptă $A_0^*\ A_{n+1}^*$ asociată curbei funiculare și încărcată cu sarcinile transversale Y_i și Q' (fig. 2 *b*). Reacțiunea sa din stînga, R_0', are valoarea dată de (6). Observînd că $y_i = u_i + a_i \operatorname{tg} \theta$, relația (4) se scrie:

$$Y_0 = R_0' + \frac{1}{l}\sum_1^n X_i u_i + \left(H_{01} - \frac{1}{l}\sum_1^n X_i b_i\right) \operatorname{tg} \theta, \qquad (9)$$

în care, potrivit definiției (8),

$$H_{01} = X_0. \tag{10}$$

Notînd cu T'^* și M'^* forța tăietoare, respectiv momentul de încoviere, în secțiunea corespunzătoare punctului B', avem

$$T'^* = R'_0 - Q'_{0x} - Y_1 - \ldots - Y_{j-1} = \frac{\mathrm{d}M'^*}{\mathrm{d}x}, \tag{11}$$

așa încît relația (7) devine, ținînd cont de (9),

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \operatorname{tg}\alpha' = \frac{T'^*}{H_{j-1,j}} + \varkappa'_{j-1,j}, \tag{12}$$

în care

$$\varkappa'_{j-1,j} = \frac{1}{H_{j-1,j}}\left[\frac{1}{l}\sum_1^n X_i u_i + \left(H_{01} - \frac{1}{l}\sum_1^n X_i b_i\right)\operatorname{tg}\theta\right]. \tag{13}$$

Introducînd notația

$$\beta_{i,j-1,j} = \frac{b_i X_i}{l H_{j-1,j}}, \quad i = 1,2, \ldots, n, \tag{14}$$

rezultă, în virtutea definițiilor (8), (10) și (14)

$$\frac{H_{01}}{H_{j-1,j}} = 1 + l\sum_{i=1}^{j-1}\frac{\beta_{i,j-1,j}}{b_i}, \tag{15}$$

astfel încît (13) devine :

$$\varkappa'_{j-1,j} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_{i,j-1,j}}{b_i}u_i + \left(1 + \sum_{i=1}^{j-1}\frac{a_i}{b_i}\beta_{i,j-1,j} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{n}\beta_{i,j-1,j}\right)\operatorname{tg}\theta. \tag{16}$$

În virtutea relației diferențiale (11) se obține din (12) ecuația :

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}M'^*}{H_{j-1,j}} + \varkappa'_{j-1,j}\,\mathrm{d}x, \tag{17}$$

care, integrată între limitele a_{j-1} și a_j, conduce la egalitatea :

$$u_j - u_{j-1} = \frac{M'^*_j - M'^*_{j-1}}{H_{j-1,j}} + (a_j - a_{j-1})\,(\varkappa'_{j-1,j} = \operatorname{tg}\theta). \tag{18}$$

Ținînd cont de (16), rezultă din (18) următoarea ecuație în u_i :

$$C_{j1}u_1 + C_{j2}u_2 + \ldots + C_{jn}u_n = D'_j, \tag{19}$$

în care

$$C_{j1} = -\frac{\beta_{1,j-1,j}}{b_1}\,;\; C_{j2} = -\frac{\beta_{2,j-1,j}}{b_2},\ldots,$$

$$C_{j,j-2} = -\frac{\beta_{j-2,j-1,j}}{b_{j-2}}\,;\; C_{j,j-1} = -\left(\frac{1}{a_j - a_{j-1}} + \frac{\beta_{j-1,j-1,j}}{b_{j-1}}\right),$$

$$C_{j,j} = \frac{1}{a_j - a_{j-1}} - \frac{\beta_{j,j-1,j}}{b_j},\; C_{j,j+1} = -\frac{\beta_{j+1,j-1,j}}{b_{j+1}},\ldots$$

$$\ldots\; C_{j,n} = -\frac{\beta_{n,j-1,j}}{b_n}, \tag{20}$$

$$D'_j = \frac{M'^*_j - M'^*_{j-1}}{(a_j - a_{j-1})H_{j-1,j}} + \left(\sum_{i=1}^{j-1}\frac{a_i}{b_i}\beta_{i,j-1,j} - \sum_{i=j}^{n}\beta_{i,j-1,j}\right)\operatorname{tg}\theta, \tag{21}$$

Pentru soluționarea problemei este necesar să se scrie n ecuații de tipul (19), făcînd $j = 1,2,\ldots,n$.

Să proiectăm acum curba funiculară pe planul A_0xz, obținînd linia $A_0A''_1\ldots A''_i\ldots A''_{n+1}$(fig. 1). Utilizînd ecuația de echilibru (5) și notația (14), panta tangentei în punctul curent al arcului $A''_{j-1}A''_j$ are expresia:

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg}\alpha'' = \frac{T''^*}{H_{j-1,j}} + \varkappa''_{j-1,j}, \tag{22}$$

în care

$$\varkappa''_{j-1,i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_{i,j-1,j}}{b_i}z_i, \tag{23}$$

T''^* fiind forța tăietoare în secțiunea curentă a grinzii asociate încărcate cu sarcinile Z_i și Q'' (fig. 3)

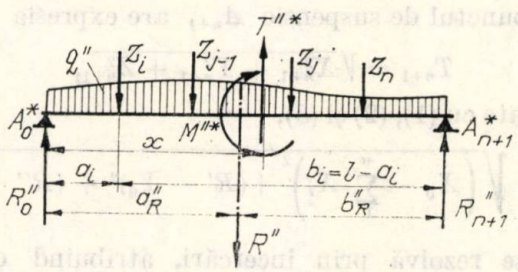


Fig. 3

Cunoscînd că $T''^* = dM''^*/dx$, M''^* fiind momentul de încovoiere în secțiunea x, se obține din (22) prin integrare între limitele a_{j-1} și a_j următoarea ecuație în z_i:

$$C_{j1}z_1 + C_{j2}z_2 + \ldots + C_{jn}z_n = D''_j, \tag{24}$$

în care coeficienţii C_{ji} sînt daţi de (20) şi

$$D_j'' = \frac{M_j''^* - M_{j-1}''^*}{(a_j - a_{j-1})\, H_{j-1,j}}. \tag{25}$$

Pentru soluţionarea problemei este necesar să se scrie n ecuaţii de tipul (24), făcînd $j = 1,2,\ldots, n$.

3. EFORTUL DE TRACŢIUNE

În punctul de suspensie A_0 efortul de tracţiune are expresia :

$$T_0 = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2},$$

în care

$$Y_0 = X_0 \operatorname{tg} \alpha_0', Z_0 = X_0 \operatorname{tg} \alpha_0'', \tag{26}$$

aşa încît

$$T_0 = X_0 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_0' + \operatorname{tg}^2 \alpha_0''}. \tag{27}$$

Pantele tangentelor în A_0 la cele două proiecţii ale curbei funiculare rezultă din (12) şi (22) făcînd $j = 1$ şi $x = 0$:

$$\operatorname{tg} \alpha_0' = \frac{R_0'}{X_0} + \varkappa_{01}', \operatorname{tg} \alpha_0'' = \frac{R_0''}{X_0} + \varkappa_{01}'', \tag{28}$$

unde, în virtutea definiţiilor (16) şi (23),

$$\varkappa_{01}' = \sum_1^n \frac{u_i}{b_i} \beta_{i01} + \left(1 - \sum_1^n \beta_{i01}\right) \operatorname{tg} \theta, \tag{29}$$

$$\varkappa_{01}'' = \sum_1^n \frac{z_i}{b_i} \beta_{i01}. \tag{30}$$

Efortul în punctul de suspensie A_{n+1} are expresia

$$T_{n+1} = \sqrt{X_{n+1}^2 + Y_{n+1}^2 + Z_{n+1}^2},$$

sau, în conformitate cu (1), (2) şi (3),

$$T_{n+1} = \sqrt{\left(X_0 - \sum_1^n X_i\right)^2 + (R' - Y_0)^2 + (R'' - Z_0)^2}. \tag{31}$$

Problema se rezolvă prin încercări, atribuind componentei X_0 diverse valori pînă la realizarea compatibilităţii depline între datele impuse şi rezultatele obţinute [de exemplu, egalitatea dintre valoarea dată a efortului T_0 şi cea calculată potrivit relaţiei (27)].

Rezolvarea implică determinarea celor n^2 valori : $\beta_{i,j-1,j}$ date de (14), făcînd i, $j = 1,2,\ldots, n$, apoi soluţionarea celor $2n$ ecuaţii de tipul (19) şi (24), obţinîndu-se astfel valorile celor $2n$ necunoscute geometrice, coordonatele u_i şi z_i.

Efortul în secțiunea curentă a intervalului $(j-1, j)$ are expresia

$$T_{j-1,j} = H_{j-1,j}\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha' + \operatorname{tg}^2\alpha''}, \tag{32}$$

în care valorile $\operatorname{tg}\alpha'$ și $\operatorname{tg}\alpha''$ se calculează cu ajutorul relațiilor (12) și (16), respectiv (22) și (23).

4. CAZUL PARTICULAR $n = 6$

În tabela 1 sînt înregistrate, spre exemplificare, expresiile coeficienților C_{ji}, care figurează în ecuațiile (19) și (24).

Termenii liberi D'_j și D''_j, pentru $n = 6$, au următoarele expresii, conform (21) și (25):

$$j = 1 \ldots D'_1 = \frac{M'^*_1}{a_1 H_{01}} - (\beta_{101} + \beta_{201} + \ldots + \beta_{601})\operatorname{tg}\theta,$$

$$D''_1 = \frac{M''^*_1}{a_1 H_{01}}, \qquad H_{01} = X_0,$$

$$j = 2 \ldots D'_2 = \frac{M'^*_2 - M'^*_1}{(a_2 - a_1) H_{12}} + \left(\frac{a_1}{b_1}\beta_{112} - \beta_{212} - \beta_{312} - \ldots - \beta_{612}\right)\operatorname{tg}\theta,$$

$$D''_2 = \frac{M''^*_2 - M''^*_1}{(a_2 - a_1) H_{12}}, \qquad H_{12} = X_0 - X_1,$$

$$j = 3 \ldots D'_3 = \frac{M'^*_3 - M'^*_2}{(a_3 - a_2) H_{23}} + \left(\frac{a_1}{b_1}\beta_{123} + \frac{a_2}{b_2}\beta_{223} - \beta_{323} - \ldots - \beta_{623}\right)\operatorname{tg}\theta,$$

$$D''_3 = \frac{M''^*_3 - M''^*_2}{(a_3 - a_2) H_{23}}, \qquad H_{23} = X_0 - X_1 - X_2,$$

$$j = 4 \ldots D'_4 = \frac{M'^*_4 - M'^*_3}{(a_4 - a_3) H_{34}} + \left(\frac{a_1}{b_1}\beta_{134} + \frac{a_2}{b_2}\beta_{234} + \frac{a_3}{b_3}\beta_{334} - \beta_{434} - \beta_{534} - \beta_{634}\right)\operatorname{tg}\theta,$$

$$D''_4 = \frac{M''^*_4 - M''^*_3}{(a_4 - a_3) H_{34}}, \qquad H_{34} = X_0 - X_1 - X_2 - X_3.$$

$$j = 5 \ldots D'_5 = \frac{M'_5 - M'^*_4}{(a_5 - a_4) H_{45}} + \left(\frac{a_1}{b_1}\beta_{145} + \ldots + \frac{a_4}{b_4}\beta_{445} - \beta_{545} - \beta_{645}\right)\operatorname{tg}\theta,$$

$$D''_5 = \frac{M''^*_5 - M''^*_4}{(a_5 - a_4) H_{45}}, \qquad H_{45} = X_0 - X_1 - X_2 - X_3 - X_4.$$

$$j = 6 \ldots D'_6 = \frac{M'^*_6 - M'^*_5}{(a_6 - a_5) H_{56}} + \left(\frac{a_1}{b_1}\beta_{156} + \ldots + \frac{a_5}{b_5}\beta_{556} - \beta_{656}\right)\operatorname{tg}\theta,$$

$$D''_6 = \frac{M''^*_6 - M''^*_5}{(a_6 - a_5) H_{56}}, \qquad H_{56} = X_0 - X_1 - X_2 - \ldots - X_5.$$

Tabela 1

Expresiile coeficienților C_{ji}, conform cu (20), pentru $n = 6$

	C_{j1}	C_{j2}	C_{j3}	C_{j4}	C_{j5}	C_{j6}
$j=1$	$\frac{1}{a_1}-\frac{\beta_{101}}{b_1}$	$-\frac{\beta_{201}}{b_2}$	$-\frac{\beta_{301}}{b_3}$	$-\frac{\beta_{401}}{b_4}$	$-\frac{\beta_{501}}{b_5}$	$-\frac{\beta_{601}}{b_6}$
$j=2$	$-\left(\frac{1}{a_2-a_1}+\frac{\beta_{112}}{b_1}\right)$	$\frac{1}{a_2-a_1}-\frac{\beta_{212}}{b_2}$	$-\frac{\beta_{312}}{b_3}$	$-\frac{\beta_{412}}{b_4}$	$-\frac{\beta_{512}}{b_5}$	$-\frac{\beta_{612}}{b_6}$
$j=3$	$-\frac{\beta_{123}}{b_1}$	$-\left(\frac{1}{a_3-a_2}+\frac{\beta_{223}}{b_2}\right)$	$\frac{1}{a_3-a_2}-\frac{\beta_{323}}{b_3}$	$-\frac{\beta_{423}}{b_4}$	$-\frac{\beta_{523}}{b_5}$	$-\frac{\beta_{623}}{b_6}$
$j=4$	$-\frac{\beta_{134}}{b_1}$	$-\frac{\beta_{234}}{b_2}$	$-\left(\frac{1}{a_4-a_3}+\frac{\beta_{334}}{b_3}\right)$	$\frac{1}{a_4-a_3}-\frac{\beta_{434}}{b_4}$	$-\frac{\beta_{534}}{b_5}$	$-\frac{\beta_{634}}{b_6}$
$j=5$	$-\frac{\beta_{145}}{b_1}$	$-\frac{\beta_{245}}{b_2}$	$-\frac{\beta_{345}}{b_3}$	$-\left(\frac{1}{a_5-a_4}+\frac{\beta_{445}}{b_4}\right)$	$\frac{1}{a_5-a_4}-\frac{\beta_{545}}{b_5}$	$-\frac{\beta_{645}}{b_6}$
$j=6$	$-\frac{\beta_{156}}{b_1}$	$-\frac{\beta_{256}}{b_2}$	$-\frac{\beta_{356}}{b_3}$	$-\frac{\beta_{456}}{b_4}$	$-\left(\frac{1}{a_6-a_5}+\frac{\beta_{556}}{b_5}\right)$	$\frac{1}{a_6-a_5}-\frac{\beta_{656}}{b_6}$

OBSERVAȚII 1°. Este recomandabil ca, la întocmirea tabelei, să se înceapă cu determinarea elementelor diagonalei principale (C_{jj}).

2°. Pentru a obține tabela constantelor C_{ji} în cazul $n = 5$, se suprimă ultima linie și ultima coloană de mai sus.

5. OBSERVAȚIE

Procedeul de calcul prezentat mai sus poate fi aplicat cu o aproximație satisfăcătoare și în cazul existenței unei a treia componente a intensității sarcinii continue, q_x, paralelă cu axa A_0x. În acest caz, curba funiculară se fragmentează într-un număr convenabil de arce, având lungimile proiecțiilor pe A_0x egale cu $\Delta x_j = a_j - a_{j-1}$ și încărcate cu sarcinile $q_x \Delta x_j$; aceste sarcini se aplică prin înjumătățire la extremitățile A_{j-1} și A_j ale arcelor considerate, adăugîndu-se componentelor X_{j-1} și X_j.

Primit la redacție la 22 decembrie 1986

BIBLIOGRAFIE

1. E. CZITARY, *Seilschwebebahnen*, Springer-Verlag, Wien, 1962.
2. I. C. DRĂGAN, ș.a., *Funiculare forestiere*, Edit. CERES, București, 1971.
3. N. IRIMICIUC, *Metoda coordonatelor vectoriale cilindrice în prezentarea grafică a algebrei vectoriale spațiale*, Bul. Inst. politehnic Iași, s.n., III (VII), 3—4,p. 195—199(1957).
4. V. K. KACIURIN, *Teoriia visiacih sistem*, GILSASM, Moscova — Leningrad, 1962.
5. T. REDLOV, *Fire elastice*, E.D.P., București, 1962.
6. T. REDLOV, *Vectori cvasiliberi și poligoane funiculare spațiale*. Rev. Studii și Cerc. de Mec. Aplic., 2(24), p. 455—460, Edit. Academiei R. S. România, București, 1967.
7. T. REDLOV, R. LUGOJANU, *Configurația și rezistența cablurilor de funiculare industriale încărcate cu forțe coplanare oblice*, Rev. Ind. Lemnului nr. 1, București (1986).
8. Z. SCHWEIGERT, *Téléphériques et transporteurs aériens*, Editions Eyrolles, Paris, 1964.

PROTECŢIA IMOBILELOR ADIACENTE CONDUCTELOR DE GAZE

de AL. D. STAN şi M. M. MITROIU

Institutul de Petrol şi Gaze Ploieşti

Este cunoscut că sistemul de distribuţie a gazelor a fost realizat în timp, avînd diverse vechimi, cu mijloace materiale diferite, ceea ce presupune o anumită frecvenţă de apariţie a defectelor pe conducte.

Imobilele situate în apropierea defectelor sînt supuse la infiltraţii gazeifere care pot deveni periculoase, mai ales, în perioada rece a anului cînd solul de deasupra defectului este îngheţat şi presiunile din sistem sînt mai mari decît în perioada caldă a anului.

În situaţia în care se pot aprecia parametrii hidrodinamici ai scurgerii gazelor prin mediul poros din vecinătatea imobilului este posibilă determinarea debitului de gaze scurs prin defectul conductei.

1. IMOBILUL ADIACENT UNUI DEFECT AL CONDUCTEI

Fundaţia unui imobil realizează o separare a mediului poros de la defect pînă la imobil şi a mediului poros de sub imobil. Prima porţiune este saturată cu apă ceea ce-i conferă un anumit grad de permeabilitate, iar mediul poros de sub imobil este uscat şi are, în general, o tasare constantă ceea ce înseamnă şi o uniformitate mai mare a permeabilităţii în această zonă.

În situaţia unui sol îngheţat la suprafaţă, gazele se scurg prin cele două zone ale mediului poros către imobilul apropiat defectului. Este posibilă şi scurgerea simultană către un grup de imobile. Infiltraţiile gazeifere se pot scurge spre un imobil prin dreptul unei singure laturi

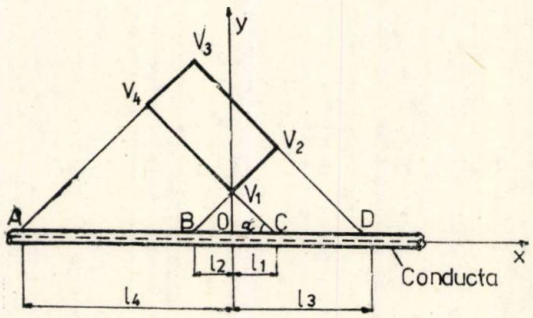


Fig. 1

a acestuia sau simultan prin două laturi. Una din aceste posibilităţi apare în funcţie de poziţia imobilului pe conducta de distribuţie pe care se formează defectul. În cele mai multe situaţii, un imobil are secţiunea de formă dreptunghiulară şi aceasta este plasată la o anumită distanţă de axul conductei pe care se formează defectul (fig. 1).

Dacă se alege sistemul de axe ca în figura 1, axa Ox fiind suprapusă pe axul conductei, secțiunea imobilului este delimitată de cele patru puncte V_1V_2,V_3 și V_4 care au coordonatele

$$V_1(0,\ d),\ V_2(b\sin\alpha,\ d+b\cos\alpha),\ V_3(b\sin\alpha-l\cos\alpha,\ d+b\cos\alpha+l\sin\alpha)$$

și

$$V_4(-l\cos\alpha,\ d+l\sin\alpha).$$

În funcție de coordonatele celor patru vîrfuri V_1, V_2, V_3 și V_4 se pot calcula cu ușurință abscisele punctelor A, B, C și D care reprezintă intersecția dintre direcțiile laturilor imobilului cu direcția conductei de distribuție. Abscisele punctelor A, B, C, D au respectiv, valorile $(-l-d\ \mathrm{tg}\ \alpha)$, $(-d\ \mathrm{tg}\ \alpha)$ $(d\ \mathrm{cotg}\ \alpha)$ și $(b+d\ \mathrm{cotg}\ \alpha)$. Aceste abscise sînt necesare de cunoscut pentru calculul lungimilor l_1, l_2, l_3 și l_4. Se poate observa că poziția defectului pe conductă, care coincide cu punctul de abscisă x, este reperată de lungimile l_1, l_2, l_3, l_4.

În situația în care x satisface una din condițiile

$$-l_2 < x < l_1,\ x > l_3,\ l_4 < x, \tag{1}$$

filtrarea gazelor în imobil se produce prin două laturi ale imobilului, iar în toate celelalte cazuri numai printr-o latură care este și cea mai apropiată de imobil.

Dacă se admite cazul general al unei laturi neparalele cu conducta se poate calcula debitul de gaze ce se infiltrează prin acea latură în imobil.

Astfel, notînd cu v_r viteza de filtrare pe direcția situată dintre defectul conductei și un punct de pe latura imobilului, viteza normală la acea latură va fi

$$v_{nr} = v_r \cos\beta, \tag{2}$$

unde β este unghiul format de direcția vitezei v_r și normala la latura imobilului.

Debitul elementar $\mathrm{d}Q$ pe unitatea de adîncime a fundației va fi

$$\mathrm{d}Q = v_{nr}\,\mathrm{d}l. \tag{3}$$

Dacă se notează cu x_i, y_i Γ și, respectiv, x_{i+1}, y_{i+1} coordonatele a două vîrfuri alăturate ale imobilului, distanța dintre acestea, $d_{i,i+1}$, are mărimea

$$d_{i,i+1} = \sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2}, \tag{4}$$

iar distanțele R_i și R_{i+1} de la defectul format la vîrful V_i și, respectiv, V_{i+1} se poate calcula pentru fiecare caz în parte.

Distanțele măsurate de la defectul format la fiecare din cele patru vîrfuri V_1, V_2, V_3 și V_4 vor fi R_1, R_2, R_3 și, respectiv R_1 care au valorile

$$R_1 = \sqrt{x + d^2},$$

$$R_2 = (\sqrt{x - b \sin \alpha)^2 + (d + b \cos \alpha)^2}, \tag{5}$$

$$R_3 = (\sqrt{x - b \sin \alpha + l \cos \alpha)^2 + (d + b \cos \alpha + l \sin \alpha)^2},$$

$$R_4 = (\sqrt{x + l \cos \alpha)^2 + (d + l \sin \alpha)^2}.$$

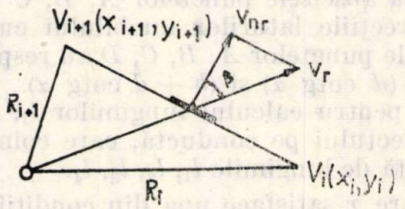


Fig. 2

În situația în care filtrarea se produce prin dreptul unei laturi a imobilului cu distanțele pînă la defectul R_i și R_{i+1} ($i = 1,2,3$) latura imobilului se poate împărți în n părți egale, fiecare dintre acestea avînd lungimea

$$\Delta l = \frac{d_{i,i+1}}{n}. \tag{6}$$

Viteza de filtrare în acest punct are mărimea

$$v_1 = \frac{k_1}{\mu} \cdot \frac{p_e^2 - p_z^2}{p_a R_j}. \tag{9}$$

p_e fiind presiunea în exteriorul defectului, p_z presiunea din dreptul laturii imobilului, iar μ viscozitatea gazului.

Pentru calculul distanței R_j se observă că segmentul de dreaptă cu abscisele x_i și x_{i+1} este împărțit în raportul $\frac{j}{n-j}$ de către punctul cu coordonatele (x_j, y_j) care au valorile

$$x_j = \frac{(n-j)\, x_i + j x_{i+1}}{n}, \quad y_j = \frac{(n-j)\, y_i + j \cdot y_{i+1}}{n}, \tag{7}$$

n fiind numărul de intervale egale în care a fost divizată distanța $d_{i,i+1}$.

Cu aceste valori rezultă distanța R_j,

$$R_j = \sqrt{x_j^2 + y_j^2}, \tag{8}$$

unde x_j și y_j sînt date de (7).

Similar cu relația (9), pentru zona de sub imobil, se poate scrie o relație asemănătoare

$$v_2 = \frac{k_2}{\mu} \cdot \frac{p_z^2 - p_a^2}{p_a \cdot L_z}. \tag{10}$$

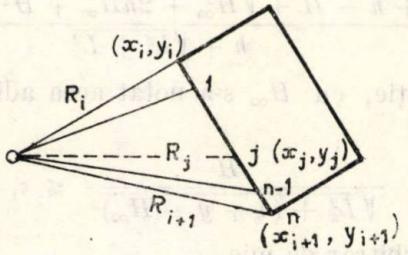


Fig. 3

Dacă se are în vedere cum se filtrează gazele în imobil, (fig. 4), se poate scrie că în dreptul fundației există o zonă mai sus decît adîncimea de pozare a conductei, și o altă zonă inferioară acesteia. Avînd în vedere geometria aceleași figuri, se pot scrie pe rînd relațiile :

$$v_{1yn} = v_{1y} \cos\theta_1, \quad v_{2yn} = v_{2y} \cos\theta_2 \tag{11}$$

Unghiurile θ_1 și θ_2 sînt definite cu ajutorul funcțiilor trigonometrice

$$\cos\theta_1 = \frac{L_x}{\sqrt{L_x^2 + (H - y - h)^2}}, \quad \cos\theta_2 = \frac{L_x}{\sqrt{L_x^2 + (h + y - H)^2}}. \tag{12}$$

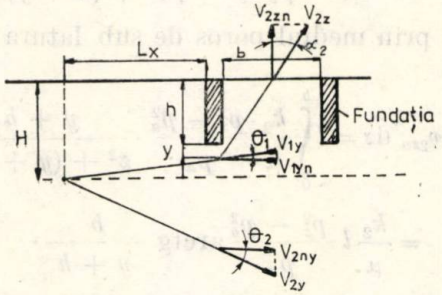


Fig. 4

Prin cele două zone debitele ce se filtrează au mărimile

$$Q_1' = \int_h^H \frac{k_1(p_e^2 - p_z^2)}{\mu p_a} \cdot \frac{dy}{\sqrt{L_z^2 + (H - y - h)^2}} = \frac{k_1(p_e^2 - p_z^2)}{\mu p_a} I_1,$$

$$Q_1'' = \int_H^\infty \frac{k_1(p_e^2 - p_z^2)}{\mu p_a} \cdot \frac{dy}{\sqrt{L_x^2 + (h + y - H)^2}} = \frac{k_1(p_e^2 - p_z^2)}{\mu p_a} I_2, \tag{13}$$

unde s-au utilizat notaţiile

$$I_1 = \ln \frac{h + \sqrt{h^2 + L_x^2}}{2h - H + \sqrt{4h^2 - 4hH + L_x^2}},$$

$$I_2 = \ln \frac{H_\infty + h - H + \sqrt{H_\infty^2 + 2hH_\infty + H^2 + h^2 + L_x^2}}{h + \sqrt{h^2 + L_x^2}}.$$

În ultima relaţie, cu H_∞ s-a notat acea adîncime pentru care se realizează condiţia

$$\frac{H}{\sqrt{L_x^2 + (h + y - H_\infty)^2}} \leqslant \varepsilon, \tag{14}$$

ε fiind un număr arbitrar de mic.

În ceea ce priveşte infiltrarea gazelor prin zona de sub imobil se poate observa, tot din geometria figurii 4, că este posibilă pentru viteza normală la suprafaţă scrierea unei ecuaţii asemănătoare cu (11), adică

$$v_{2zn} = v_{2z} \cos \alpha_2, \tag{15}$$

unde

$$\cos \alpha_2 = \frac{y + h}{\sqrt{z^2 + (h + y)^2}},$$

ceea ce face ca viteza v_{2zn} să se pună sub forma

$$v_{2zn} = \frac{k_2}{\mu} \cdot \frac{p_z^2 - p_a^2}{p_a L_z} \cdot \frac{y + h}{\sqrt{z^2 + (h + y)^2}}. \tag{16}$$

Debitul filtrat prin mediul poros de sub latura l a imobilului are expresia

$$Q_2' = l \int_0^b v_{2zn}\, dz = l \int_0^b \frac{k_2}{\mu} \frac{p_z^2 - p_a^2}{p_a} \cdot \frac{y + h}{z^2 + (y + h)^2}\, dz =$$

$$= \frac{k_2}{\mu} l \frac{p_z^2 - p_a^2}{p_a} \operatorname{arctg} \frac{b}{y + h}. \tag{17}$$

În calculul efectuat s-a admis că latura mobilului perpendiculară pe aceea cu lungimea l este b. Dacă se admite că aproape întreaga cantitate de gaze ce se infiltrează în imobil este pe lîngă fundaţie, rezultă că ultima relaţie se mai pune

$$Q_2' = \frac{k_2}{\mu} l \frac{p_z^2 - p_a^2}{p_a} \operatorname{arc\ tg} \frac{b}{h}. \tag{18}$$

În cazul în care filtrarea se efectuează pe sub două laturi debitul va fi [2]

$$Q_2 = \frac{k_2}{\mu} \frac{p_z^2 - p_a^2}{p_a} \left(l \operatorname{arctg} \frac{b}{h} + b \operatorname{arctg} \frac{l}{h} \right). \tag{19}$$

Pentru a se păstra o formă similară cu aceea dată de (13), ultima relație se scrie

$$Q_2 = \frac{k_2}{\mu} \cdot \frac{p_z^2 - p_a^2}{p_a} (\Pi_1 + \Pi_2), \tag{20}$$

unde primul termen Π_1 arată contribuția la debitul de gaze infiltrat în imobil numai pe sub latura cu lungimea l, iar Π_2 pe sub latura b a imobilului.

Prin eliminarea presiunii necunoscute p_z din relațiile (13) și (20), avînd în vedere că există și egalitatea $Q_1' + Q_1'' = Q_2$, rezultă debitul de gaze

$$Q = \frac{p_e^2 - p_a^2}{\mu p_a \left[\frac{1}{k_1(I_1 + I_2)} + \frac{1}{k_2(\Pi_1 + \Pi_2)} \right]}. \tag{21}$$

În cazul în care $h \geqslant H$, rezultă $I_1 = 0$ și dacă infiltrarea gazelor se efectuează doar printr-o latură, unul dintre parametrii Π_1 sau Π_2 este nul, după cum infiltrarea gazelor în imobil se produce prin dreptul laturii b sau, respectiv, l.

Relația (21) oferă și posibilitatea a se trage unele concluzii pentru o protecție cît mai bună a unui imobil situat lîngă un defect al conductei.

Astfel, se observă cu ușurință că dacă k_1 sau k_2 are valori foarte mici debitul de gaze pătruns în imobil este nul. Rezultă că cel puțin printr-o bună izolație a materialului de umplutură introdus la baza unui imobil se asigură protecția lui.

De asemenea, se constată că cele mai expuse la infiltrațiile gazeifere sînt acele imobile situate lîngă conductele cu presiuni mari.

2. CALCULUL PRESIUNII p_e

După cum este cunoscut debitul maxim de gaze care se scurge printr-un orificiu se calculează cu formula

$$M = \mu^* f \left(\frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{1}{\varkappa}} \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p_c}{\rho_c} \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \right]}, \tag{22}$$

unde μ^* reprezintă coeficientul de debit al orificiului care are secțiunea f, p_c și p_e sînt valorile presiunii din interiorul și, respectiv, exteriorul rezervorului, ρ_c și ρ_e fiind densitatea gazului la presiunile p_c și p_e.

Debitul are valoarea maximă M_{max} pentru

$$\left(\frac{p_e}{p_c} \right)_{cr} = \left(\frac{2}{n+1} \right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} \tag{23}$$

şi are mărimea

$$M_{max} = \mu^* f \rho_c \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{1}{\varkappa+1}} \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p_c}{\rho_c}}. \tag{24}$$

Debitul masic M este nul pentru $\frac{p_e}{p_c} = 1$ şi pe măsură ce acest raport se reduce, M creşte pînă la valoarea maximă a lui dată de (24) şi apoi rămîne constant pentru orice valoare a raportului situat în intervalul

$$0 \leqslant \left(\frac{p_e}{p_c}\right) \leqslant \left(\frac{p_e}{p_c}\right)_{cr}, \tag{25}$$

$\varkappa$ reprezintă exponentul adiabatic al gazului.

Este evident că debitul care se scurge prin defectul conductei se filtrează şi spre imobilul adiacent acestuia şi, din acest motiv, se scrie egalitatea între (21) şi (22)

$$\frac{p_e^2 - p_a^2}{\mu p_a \left[\frac{1}{k_1(I_1 + I_2)} + \frac{1}{k_2(II_1 + II_2)}\right]} =$$

$$= \mu^* f \left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p_e}{\rho_c} \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}. \tag{26}$$

Această ecuaţie se poate soluţiona iterativ, admiţînd iniţial cea mai mare valoare pentru p_e şi anume p_c pentru care membrul din dreapta al ecuaţiei (26), notat cu D, este evident nul, $D = 0$, în timp ce membrul stîng S al aceleiaşi egalităţi devine maxim.

Dacă se reduce p_e cu un anumit pas arbitrar ales se obţine şi situaţia cînd cei doi membri D şi S nu diferă cu prea mult, ceea ce înseamnă că acea valoare a lui p_e este soluţia ecuaţiei (26). Cu valoarea obţinută pentru p_e se poate calcula debitul scurs prin defect înlocuind în ecuaţia(22).

În acest fel s-a întocmit şi rulat pe un calculator FELIX C = 256 un program în care s-au introdus mai multe valori ale parametrilor p_c, k_1, k_2, l, b, d, α, h şi H.

3. EFECTUL FUNDAŢIILOR ASUPRA PIERDERILOR DE GAZE DIN REŢEA

Pe măsură ce fundaţia unui imobil se măreşte debitul de gaz scurs printr-un defect se reduce.

În afara limitării pătrunderii gazelor în imobil, fundaţia mai îndeplineşte şi alte funcţii (rezistenţă, rigiditatea construcţiei etc), care au efecte mai favorabile dacă fundaţia este mai adîncă.

Aceasta înseamnă că mărimea adîncimii fundaţiei duce în mod automat la o creştere a costului ei.

În practica construcțiilor pentru costul unei fundații se utilizează relația

$$C_f = f(h) \cdot P, \tag{27}$$

unde P este costul întregii clădiri, iar $f(h)$ este o funcție de adîncimea h și adîncimea suplimentară a fundației h_s. După unele date din practica construcțiilor funcția $f(h)$ se poate scrie sub forma

$$f(h) = 0{,}1\ h + 0{,}3\ h_s^2 + 0{,}09\ h_s. \tag{28}$$

S-a scris $f(h)$ compusă din cele două componente h și h_s deoarece în mod curent clădirile sînt construite cu o fundație constantă și pentru a stabili influența creșterii fundației asupra lui C_f s-a introdus și adîncimea suplimentară h_s.

Pe altă parte, pe măsură ce se mărește adîncimea totală a fundației $(h + h_s)$ debitul de gaze care se infiltrează în imobil se reduce ceea ce conduce evident la o diminuare a costului gazelor C_g. Acest ultim parametru fiind calculat ca produs între prețul de vînzare al gazelor și cantitatea de gaze infiltrate în imobil într-o anumită perioadă de timp.

De exemplu, în figura 5 se redau C_g/p pentru o perioadă de 1 an și un cost de vînzare a gazelor egal cu p lei /m³gaz., pentru două permea-

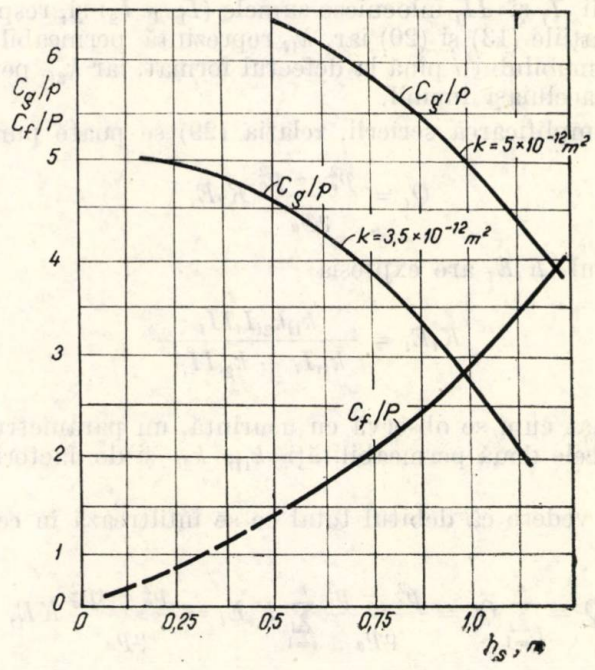


Fig. 5

bilități $3{,}5 \cdot 10^{-12}$ m² și $5 \cdot 10^{-12} \cdot$ m². Pe același grafic s-a redat C_g/p și C_f/P.

Ambii parametri C_g/p și C_f/P au fost redați în funcție de adîncimea h_s pentru a observa efectul pe care-l reprezintă creșterea fundației peste adîncimea h asupra celor două mărimi C_g și, respectiv, C_f.

Dacă C_f și C_g ar fi exprimați în aceleași unități valorice pe o întreagă perioadă de timp minimul sumei $(C_f + C_g)$ ar reprezenta adîncimea optimă a unei fundații din punct de vedere al infiltrării gazelor în acel imobil.

4. INTERFERENȚA IMOBILELOR ADIACENTE UNUI DEFECT AL CONDUCTEI

Debitul de gaze calculat cu relația (21) are valabilitate în cazul în care un singur imobil este apropiat de un defect și toate gazele scurse prin aceasta se infiltrează în imobil.

În cazul în care n imobile sînt plasate lîngă un defect, toate sînt supuse infiltrațiilor gazeifere. Pentru a calcula debitul în fiecare imobil și distribuția debitului scurs prin defect către cele n imobile se scrie debitul scurs către imobilul i sub forma

$$Q_i = \frac{p_e^2 - p_a^2}{\mu p_a \left(\frac{1}{k_{1i} I_i} + \frac{1}{k_{2i} II_i} \right)}, \tag{29}$$

unde parametrii I_i și II_i înlocuiesc sumele $(I_1 + I_2)$ și, respectiv, $(II_1 + II_2)$ din ecuațiile (13) și (20) iar, k_{1i} reprezintă permeabilitatea solului din exteriorul imobilului i pînă la defectul format, iar k_{2i} permeabilitatea din interiorul aceluiași imobil.

Pentru simplificarea scrierii, relația (29) se poate pune sub forma

$$Q_i = \frac{p_e^2 - p_a^2}{\mu p_a} K_i E_i \tag{30}$$

unde parametrul $K_i E_i$ are expresia

$$K_i E_i = \frac{k_{1i} k_{2i} I_i II_i}{k_{1i} I_i + k_{2i} II_i} \tag{31}$$

și reprezintă, așa cum se observă cu ușurință, un parametru complex ce ține seama de cele două permeabilități k_{1i}, k_{2i} și de factorii geometrici I_i, II_i.

Avînd în vedere că debitul total ce se infiltrează în cele n imobile este

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i = \frac{p_e^2 - p_a^2}{\mu p_a} \sum_{i=1}^{n} K_i E_i = \frac{p_e^2 - p_a^2}{\mu p_a} KE, \tag{32}$$

rezultă că debitul parțial q_i care reprezintă raportul între debitul de gaze ce se infiltrează în imobilul i, Q_i și debitul ce se scurge prin defectul conductei Q va fi

$$q_i = \frac{Q_i}{Q} = \frac{K_i E_i}{KE}. \tag{33}$$

Aceste debite parțiale satisfac relația

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = 1. \tag{34}$$

Prin KE s-a notat suma $\sum_{i=1}^{n} K_i E_i$.

5. CONCLUZII

În lucrare s-a calculat debitul de gaze care se scurge într-un imobil adiacent unui defect format pe o conductă de distribuție. Debitul de gaze depinde de parametrii hidrodinamici ai gazului din conductă dintre care cel mai important este presiunea gazului, precum și de caracteristicile de filtrare ale mediului poros din exteriorul și din interiorul imobilului și de adîncimea fundației din acel imobil.

Toți acești parametrii care sînt estimați, se poate calcula, după modelul prezentat în lucrare, debitul de gaze ce se scurge în imobil.

Primit la redacție la 18 decembrie 1986

BIBLIOGRAFIE

1. T. OROVEANU, V. DAVID, AL. D. STAN, C. TRIFAN, *Colectarea, transportul, depozitarea și distribuția produselor petroliere și gazelor*, Edit. Didactică și pedagogică, București 1985.
2. AL. D. STAN, S. POPOVICIU, *Infiltrațiile gazeifere în imobile generate de defecțiunile conductelor*, St. cerc. mec. aplicată, **39**, 6 (1980).

SIMULAREA NUMERICĂ A FUNCȚIONĂRII CLEȘTILOR MULTIDIMENSIONALI PENTRU FORAJ-EXTRACȚIE. I*)

de GH. ZECHERU, GH. DRĂGHICI și AL. POPA

Institutul de Petrol și Gaze Ploiești

Proiectarea și verificarea cleștilor multidimensionali, folosiți la realizarea operațiilor de strîngere sau desfacere a îmbinărilor filetate ale materialelor tubulare utilizate în lucrările de foraj-extracție, necesită a se cunoaște, pentru toate situațiile lor de lucru posibile (toate tipodimensiunile de material tubular pe care pot opera), pozițiile de funcționare (amplasările și orientările relative ale elementelor componente ale cleștilor) și sistemele de solicitare (forțele exterioare și reacțiunile din zonele de contact clești-material tubular și din articulațiile cleștilor). Lucrarea prezintă contribuțiile originale ale autorilor la rezolvarea acestei probleme ; modelele matematice elaborate pentru analiza geometrică a cleștilor multidimensionali și pentru determinarea sistemelor lor de solicitare au fost algoritmizate și transpuse în programe ce pot fi executate cu un sistem de calcul automat FELIX C 512. Prezentarea și comentarea rezultatelor folosirii acestor programe în cazul unui clește multidimensional de 60 kNm, cu gama de operare $2^3/8 \ldots 14^3/8$ in, evidențiază posibilitățile și avantajele metodelor de calcul propuse.

1. CONSTRUCȚIA ȘI FUNCȚIONAREA CLEȘTILOR MULTIDIMENSIONALI

Cleștii multidimensionali (suspendați în turlă sau mast) sînt scule folosite la realizarea operațiilor de strîngere sau desfacere a îmbinărilor filetate dintre elementele de material tubular (prăjini, burlane etc.) utilizate în lucrările de foraj-extracție.

Caracteristicile tehnice ce descriu sintetic posibilitățile de utilizare ale unui clește multidimensional sînt : intervalul de prindere $I_p = \{d_1 = d_{min}, \ldots, d_n = d_{max}\}$, definit ca mulțimea de valori ale diametrelor materialului tubular $d_j (d_{min} \leqslant d_j \leqslant d_{max}, \quad j = 1 \ldots n)$ la care cleștele poate fi folosit și momentul de torsiune maxim $M_{t_{max}}$ ce poate fi realizat (aplicat materialului tubular) cu ajutorul cleștelui respectiv.

Soluțiile constructive adoptate de diverși producători pentru realizarea industrială a cleștilor multidimensionali sînt numeroase, [1], [2]. În prezenta lucrare se consideră ca fiind reprezentativă construcția redată în figura 1, tipică pentru cleștii multidimensionali de fabricație românească ; elementele componente ale unui astfel de clește sînt : coada *1*, falca lungă *2*, închizătorul *3*, falca în trepte *4'*, falca scurtă *4''*, fălcile intermediare *5* și dispozitivul de suspendare (agățătoarea) *6*.

Elementele *1*, *2*, *3*, *4''* și *6* sînt universale, deoarece echipează cleștele în toate situațiile de lucru (oricare ar fi diametrul materialului tubular $d_j \in I_p$ la care se operează) ; fălcile *2* și *4''* au montate (în canale frezate special) bacurile (cuțitele) de prindere a materialului tubular B_V și $B_{V'}$, respectiv B_Q și $B_{Q'}$, cu suprafețele de lucru striate (vîrfurile striațiilor fiind coplanare). Cleștele se livrează cu un număr $k = 8 \ldots 10$ fălci în trepte *4'*, fiecare dintre acestea montîndu-se în cazul utilizării

*) Bibliografia va fi dată la sfîrșitul părții a doua a lucrării

ST. CERC. MEC. APL., TOM 46, NR. 3, 1987, P. 270—286

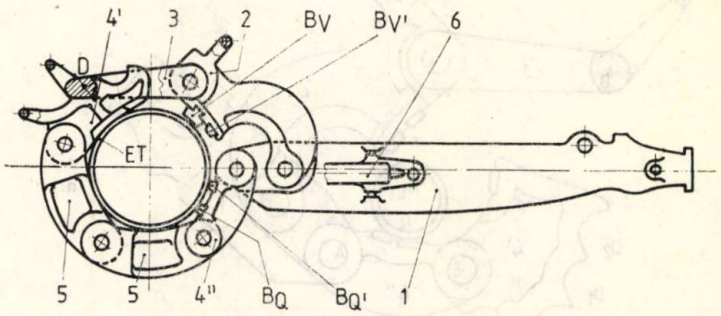


Fig. 1

TABELUL 1

SUBINTERVALUL DE PRINDERE			NR. ALVEOLELOR FĂLCII ÎN TREPTE CE ECHIPEAZĂ CLEȘTELE	NR. DE FĂLCI INTERMEDIARE DIN COMPUNEREA CLEȘTELUI
NUMĂRUL i=	SIMBOL ȘI ALCĂTUIRE $I_{pi}=\{d_{min}\cdots d_{max}\}_i$	NR. ELEMENTE card. I_{pi} =	m_i =	
1	$I_{p_1}=\{2\,3/8$ in(60,3 mm).... ... $4\,1/8$ in(104,8 mm)}	8	3	0
2	$I_{p_2}=\{3\,1/2$ in(88,9 mm)... ... $5\,3/4$ in(146,1 mm)}	17	3	0
3	$I_{p_3}=\{4\,1/4$ in(108,0 mm)... .$6\,1/4$ in(158,8 mm)}	18	3	0
4	$I_{p_4}=\{6\,1/4$ in(158,8 mm)... ... 8 in (203,2 mm)}	20	2	0
5	$I_{p_5}=\{7\,5/8$ in(193,7 mm)... .... $9\,5/8$ in(244,5 mm)}	11	2	1
6	$I_{p_6}=\{8\,5/8$ in (219,1 mm)... ... $10\,3/4$ in(273,0 mm)}	7	2	1
7	$I_{p_7}=\{10\,3/4$ in(273,0 mm)... ... $12\,3/4$ in(324,0 mm)}	5	2	2
8	$I_{p_8}=\{12\,3/4$ in(324,0 mm)... ... $14\,3/8$ in(365,1 mm)}	4	3	2

CARACTERISTICI GENERALE PT. CLEȘTE		
	INTERVALUL DE PRINDERE, I_p	$I_p=\{2\,3/8$ in(60,3 mm)... ... $14\,3/8$ in(365,1 mm)}
	TIPODIM. DE MAT. TUBULAR PE CARE POATE OPERA, card $I_p=n$	63
	MOMENTUL DE TORSIUNE MAX. ASIGURAT $M_{t\,max}$, KNm	90

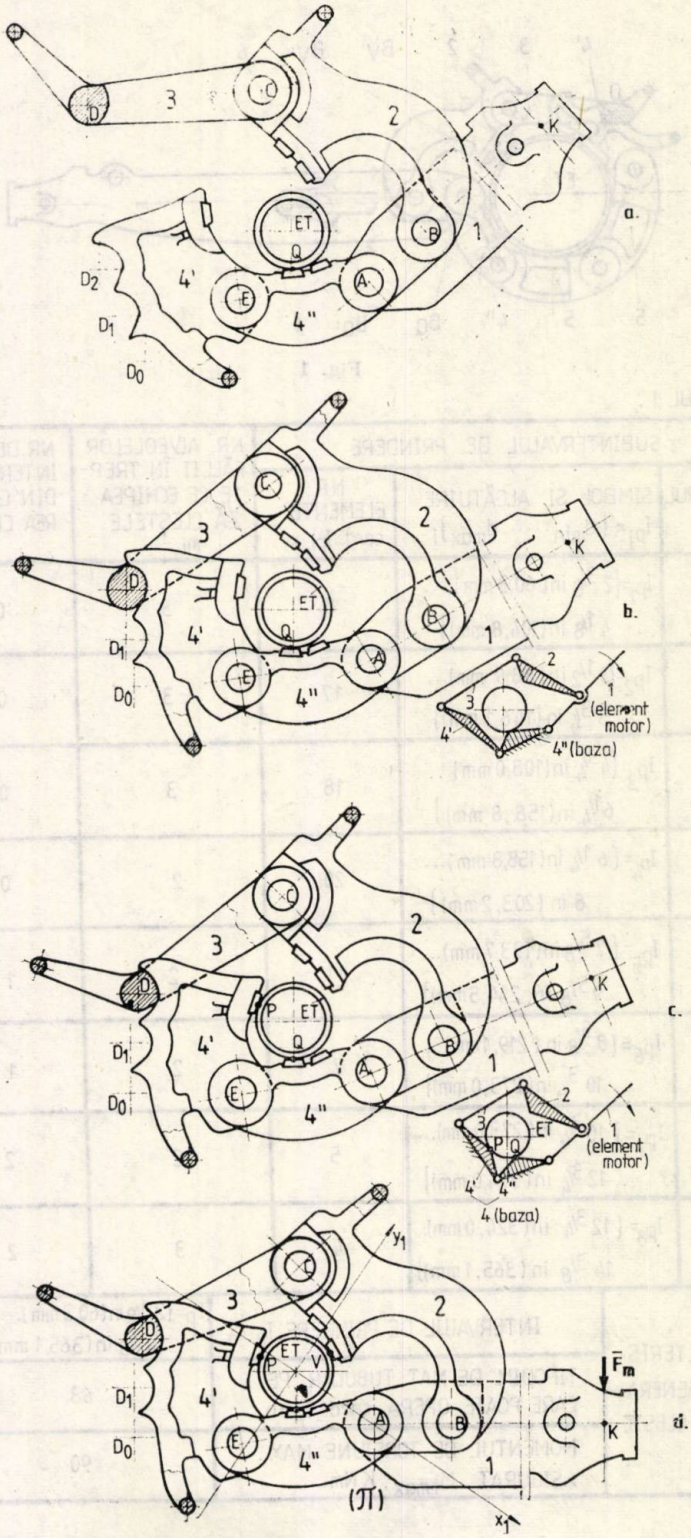


Fig. 2

cleștelui pentru operații pe elemente de material tubular cu diametrele cuprinse într-un subinterval I_{pi} din I_p (subintervalele de prindere I_{pi}, $i = 1 \ldots k$, sînt submulțimi ale mulțimii I_p, $I_{p1} \cup \ldots \cup I_{pi} \ldots \cup I_{pk} = I_p$); fiecare falcă *4'* este prevăzută cu $m = 2 \ldots 3$ alveole (trepte) în care poate articula bolțul *D* al închizătorului *3* (vezi fig. 1), prin aceasta asigurîndu-se prinderea în clește a oricărui material tubular avînd diametrul cuprins în subintervalul de prindere $I_{pi} \subset I_p$ corespunzător fălcii respective; fălcile în trepte au suprafețele de prindere a materialului tubular cilindrice netede sau prevăzute cu bacuri (cuțite) de același tip ca și elementele *2* și *4''*. Fălcile intermediare *5* se montează (între elementele *4'* și *4''*) numai în cazul utilizării cleștelui pentru operații pe elemente de material tubular avînd diametre mari (cuprinse în ultimile $2 \ldots 3$ subintervale de prindere I_{pi}); fălcile *5* au suprafețele de prindere a materialului tubular cilindrice-netede (fără cuțite).

Aspectele prezentate mai înainte pot fi înțelese mai ușor analizînd tabelul *1* ce cuprinde spre exemplificare, toate datele privind alcătuirea și echiparea în diferite situații de utilizare a unui clește multidimensional cu $I_p = \{2^3/_8$ in (60,3 mm) ... $14\ ^3/_8$ in (365,0 mm)$\}$ și $M_{t_{max}} =$ = 60 kNm.

Procesul de operare a unui clește multidimensional pe un element de material tubular cu diametrul dat $d_j \in I_p$ poate fi decelat în mai multe etape distincte din punctul de vedere al funcționării cleștelui; presupunînd (pentru simplificarea expunerii) că în situația de lucru considerată cleștele nu este echipat cu fălci intermediare aceste etape sînt (vezi fig. 2):

I. Articulația *D* este desfăcută, iar închizătorul *3* și falca în trepte *4'* sînt rotite în jurul articulațiilor *C*, respectiv *E* astfel încît să se creeze posibilitatea ca elementele *2* și *4''* să cuprindă elementul tubular *ET* la care se lucrează (fig. 2*a*);

II. Elementele *3* și *4'* sînt articulate în *D* și se acționează la extremitatea *K* a cozii *1* în vederea închiderii cleștelui (fig. 2*b*); lanțul cinematic alcătuit din elementele cleștelui, avînd $n = 5$ elemente, $C_5 = 5$ articulații plane (cuple cinematice de clasă *5*), numărul elementelor motoare $n_m = 1$ (coada cleștelui) și gradul de mobilitate, dat de relația, [3]:

$$M = 3 \cdot (n - 1) - 2 \cdot C_5, \qquad (1)$$

$M = 2$ este nedeterminat ($M = 2 > 1 = n_m$);

III. Acțiunea asupra elementului *1* este continuată și se realizează contactul fălcilor *4'* și *4''* cu elementul tubular *ET* (fig. 2*c*); în această situație, fălcile *4'* și *4''* se comportă ca un singur element *4* (ce poate fi considerat elementul fix sau baza lanțului cinematic al cleștelui) și cleștele are funcționarea corespunzătoare unui mecanism plan ($n = 4$; $C_5 = 4$; $n_m = 1$; $M = 1$ și condiția de desmodromie, $n_m = M$, este îndeplinită);

IV. Se continuă acțiunea asupra elementului 1, falca 2 ia contact (ca și *4'* și *4''*) cu *ET*, mișcarea de mecanism a cleștelui este blocată și cleștele prinde elementul tubular formînd cu acesta un sistem rigid (fig. 2*d*); aplicînd la extremitatea *K* a cozii *1* o forță F_m de intensitate corespunzătoare se poate transmite elementului tubular *ET* momentul de torsiune M_t necesar executării operației dorite.

Așa cum rezultă din cele prezentate, cleștele multidimensional exercită funcțiile pentru care a fost construit numai în etapa a IV-a a procesului de operare. Simularea numerică a funcționării unui cleşte multidimensional în această etapă a procesului de operare necesită alcătuirea unor modele matematice care să cuprindă relațiile generale (valabile în orice situație de utilizare a cleștelui) pentru :

— analiza geometrică a cleștelui (determinarea pozițiilor relative ale elementelor componente și coordonatelor punctelor caracteristice ale acestora) ;

— analiza solicitărilor cleștelui (determinarea reacțiiunilor în articulații și pe liniile de contact dintre fălci și elementul tubular pe care operează cleștele).

Rezolvările propuse de autori pentru aceste probleme sînt prezentate în continuare.

2. ANALIZA GEOMETRICĂ A CLEȘTILOR MULTIDIMENSIONALI

Dezvoltarea modelului matematic pentru analiza geometrică a unui cleşte multidimensional aflat în etapa finală a procesului de operare trebuie inițiată prin elucidarea a două aspecte esențiale :

— adoptarea unui sistem general de coordonate în raport cu care să se poată stabili pozițiile relative ale elementelor cleștelui supus analizei și ale punctelor sale caracteristice ;

— alcătuirea unor scheme constructive pentru elementele componente principale ale cleștelui, stabilirea mărimilor geometrice ce pot fi considerate cunoscute în cursul analizei și adoptarea unui sistem propriu de coordonate pentru fiecare element al cleștelui.

Primul dintre aspectele enunțate poate fi soluționat alegînd ca sistem general de coordonate sistemul de axe rectangulare x_1Oy_1 conținut într-un plan π normal la axa de simetrie a elementului tubular ET pe care operează cleștele ; originea O a sistemului se află la intersecția axei de simetrie a ET cu planul π, iar axa Ox_1 — pe dreapta OA, A fiind punctul de intersecție al planului π cu axa de simetrie a articulației cilindrice dintre elementele *1* și 4″ (vezi fig. 2*d*).

Pentru rezolvarea problematicii cuprinse în cel de-al doilea aspect enunțat se emite și acceptă ipoteza că, în calculele privind analiza geometrică a unui cleşte multidimensional, pot fi neglijate natura (elastică, elasto-plastică sau plastică) și particularitățile contactelor dintre elementul tubular ET și fălcile cleștelui ; ca urmare, se poate considera (în mod simplificat) că aceste contacte sînt liniare (cu dreptele de contact paralele față de axa de simetrie a ET) și se ajunge la soluțiile descrise sugestiv prin schițele prezentate în figurile 3—6.

2.1. ANALIZA GEOMETRICĂ A FĂLCII SCURTE

Pentru analiza geometrică a fălcii scurte (elementul 4″) se utilizează schema de calcul redată în figura 3 ; sistemul propriu de coordonate adoptat pentru acest element este sistemul cartezian xMy ($M \in AE$; $EM =$

$= MA$; $A \in Mx$), iar mărimile considerate cunoscute sînt : diametrul elementului tubular pe care operează cleștele $d_j \in I_p$ ($d_j = 2\,r_j$), măsura unghiului φ și distanțele l_{AE}, l_{NM}, $x_{Q\,min}$ și $x_{Q\,max}$.

În general, falca scurtă ia contact cu elementul tubular ET numai cu unul din bacurile de prindere B_Q, $B_{Q'}$; deoarece în schema de calcul planele ce trec prin vîrfurile striațiilor bacurilor B_Q și $B_{Q'}$ sînt reprezentate

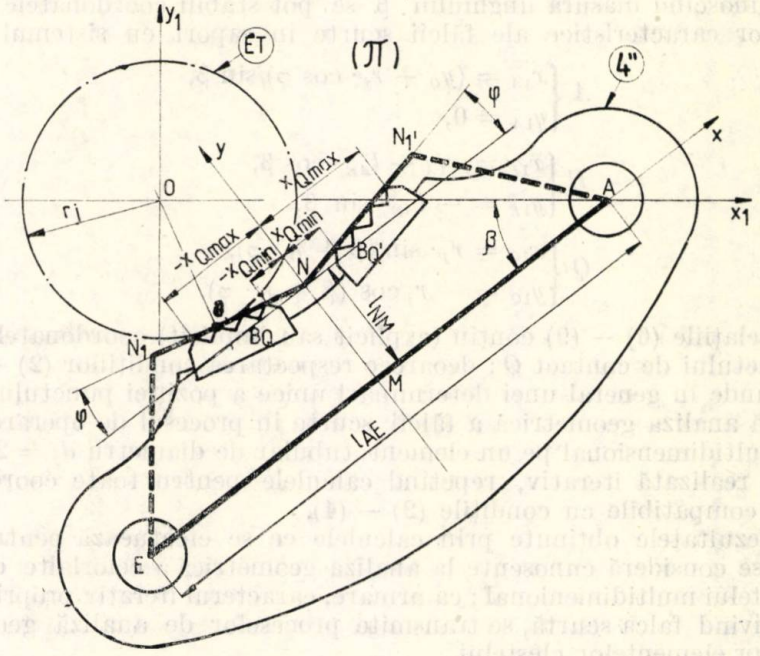


Fig. 3

prin dreptele NN_1 și NN_1' (de intersecție ale acestor plane cu planul π în care este executată schema), linia de contact dintre falca scurtă și ET se reduce la un singur punct Q (urma dreptei de contact pe planul π). Punctul Q poate ocupa orice poziție din planul π care îndeplinește simultan următoarele trei condiții (vezi fig. 3*a*) :

$$x_{Q\,min} \leqslant j_1 \cdot x_Q \leqslant x_{Q\,max}, \tag{2}$$

$$j_1 x_Q > r_j \cdot \sin \varphi, \tag{3}$$

$$y_Q = j_1\, x_Q \cdot \operatorname{tg} \varphi + l_{NM}, \tag{4}$$

x_Q, y_Q fiind coordonatele punctului Q în raport cu sistemul xMy, iar j_1 — funcția de poziție a punctului Q definită astfel :

$$j_1 = \begin{cases} -1 & \text{dacă } Q \in NN_1, \\ 1 & \text{dacă } Q \in NN_1'. \end{cases} \tag{5}$$

Punînd condiția ca dreapta (NN_1 sau NN_1') pe care se află punctul de contact Q să fie tangentă în acest punct la cercul cu centrul O și raza

r_j (reprezentînd în schema de calcul elementul tubular pe care operează cleştele analizat) se obţine măsura unghiului β, ce defineşte poziţia fălcii scurte în raport cu sistemul general de coordonate x_1Oy_1, [2]:

$$\beta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y_Q + r_j \cdot \cos\varphi}{l_{AE}/2 - x_Q + j_1 \cdot r_j \cdot \sin\varphi}\right). \tag{6}$$

Cunoscînd măsura unghiului β se pot stabili coordonatele tuturor punctelor caracteristice ale fălcii scurte în raport cu sistemul x_1Oy_1:

$$A\begin{cases} x_{1A} = (y_Q + r_j \cdot \cos\varphi)/\sin\beta, \\ y_{1A} = 0, \end{cases} \tag{7}$$

$$E\begin{cases} x_{1E} = x_{1A} - l_{AE} \cdot \cos\beta, \\ y_{1E} = -\,l_{AE} \cdot \sin\beta, \end{cases} \tag{8}$$

$$Q\begin{cases} x_{1Q} = r_j \cdot \sin(\beta + j_1 \cdot \varphi), \\ y_{1Q} = -\,r_j \cos(\beta + j_1 \cdot \varphi). \end{cases} \tag{9}$$

Relaţiile (6) — (9) conţin (explicit sau implicit) coordonatele x_Q, y_Q ale punctului de contact Q; deoarece respectarea condiţiilor (2) — (4) nu corespunde în general unei determinări unice a poziţiei punctului Q, rezultă că analiza geometrică a fălcii scurte în procesul de operare a cleştelui multidimensional pe un element tubular de diametru $d_j = 2 \cdot r_j \in I_p$ trebuie realizată iterativ, repetînd calculele pentru toate coordonatele x_Q, y_Q compatibile cu condiţile (2) — (4).

Rezultatele obţinute prin calculele ce se efectuează pentru falca scurtă se consideră cunoscute la analiza geometrică a celorlalte elemente ale cleştelui multidimenional; ca urmare, caracterul iterativ propriu calculelor privind falca scurtă, se transmite proceselor de analiză geometrică a tuturor elementelor cleştelui.

2.2. ANALIZA GEOMETRICĂ A FĂLCII ÎN TREPTE

2.2.1. În cazul cînd falca în trepte este prevăzută cu bac de prindere, schema de calcul recomandată pentru analiza geometrică este prezentată în figura 4; sistemul propriu de coordonate adoptat pentru acest element al cleştelui este sistemul de axe rectangulare xEy ($D_0 \in Ex$), iar mărimile considerate cunoscute sînt: diametrul $d_j = 2 \cdot r_j$, măsura unghiului σ, distanţele l_{ED}, l_{EH}, $y_{P_{min}}$, $y_{P_{max}}$, Δx_k, $\Delta y_k (k = 1 \ldots m_i)$ şi, aşa cum s-a precizat anterior, toate caracteristicile geometrice (unghiuri, coordonate stabilite prin analiza fălcii scurte. Deoarece schema de calcul este o reprezentare plană (în planul π) a elemcntului analizat, planul ce trece prin vîrfurile striaţiilor bacului de prindere B_P se prezintă sub forma dreptei PH, elementul tubular ET pe care operează cleştele apare sub forma cercului cu centrul O şi raza r_j, iar linia de contact dintre falca în trepte şi ET se reduce la punctul P.

Din condiţia ca falca în trepte să vină în contact cu elementul tubular ET, echivalentă cu realizarea tangenţei dreptei HP cu cercul avînd centrul O şi raza r_j, rezultă măsura unghiului γ, ce descrie poziţia fălcii

în trepte în raport cu sistemul general de coordonate x_1Oy_1, [2] :

$$\gamma = \text{arct tg}(x_{1E}/y_{1E}) + \psi - \text{arc cos}\left(\frac{l_{EH}\cdot \sin\psi - r_j}{\sqrt{x_{1E}^2 + y_{1E}^2}}\right). \tag{10}$$

Cunoscînd măsura unghiului γ se pot determina coordonatele punctului de contact P în raport cu sistemul x_1Oy_1 :

$$P\begin{cases} x_{1P} = -r_j\cdot \sin(\psi - \gamma) \\ y_{1P} = r_j \cos(\psi - \gamma) \end{cases} \tag{11}$$

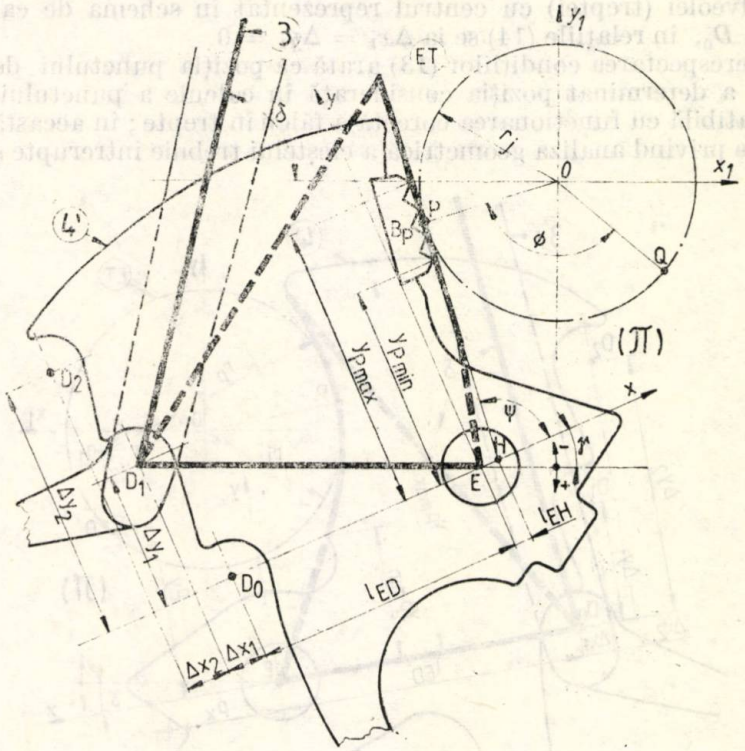


Fig. 4

și în raport cu sistemul xEy :

$$P\begin{cases} x_P = (x_{1P} - x_{1E})\cdot \cos\gamma - (y_{1P} - y_{1E})\cdot \sin\gamma, \\ y_P = (x_{1P} - x_{1E})\cdot \sin\gamma + (y_{1P} - y_{1E})\cdot \cos\gamma. \end{cases} \tag{12}$$

Evident (vezi fig. 3*b*), soluțiile obținute sînt compatibile cu sistemul real analizat dacă

$$y_{P_{min}} \leqslant y_P \leqslant y_{P_{max}}. \tag{13}$$

Dacă condițiile (13) sînt îndeplinite, analiza poate fi finalizată stabilind coordonatele punctului D_k (ce reprezintă în schema de calcul urma

în planul π a axei articulației dintre falca scurtă și închizătorul cleștelui) în raport cu sistemul $x_1 O y_1$ și măsura unghiului $\emptyset = \widehat{POQ}$;

$$D_k \quad k = 0 \ldots m_i \begin{cases} x_{1D_k} = x_{1E} + (l_{DE} + \Delta x_k) \cdot \cos \gamma + \Delta y_k \cdot \sin \gamma, \\ y_{1D_k} = y_{1E} + (l_{DE} + \Delta x_k) \cdot \sin \gamma + \Delta y_k \cos \gamma, \end{cases} \tag{14}$$

$$\Phi = \pi + \beta + j_1 \varphi - \psi + \gamma; \tag{15}$$

cînd falca în trepte are articulația cu închizătorul în poziția corespunzătoare alveolei (treptei) cu centrul reprezentat în schema de calcul prin punctul D_0, în relațiile (14) se ia $\Delta x_k = \Delta y_k = 0$.

Nerespectarea condițiilor (13) arată că poziția punctului de contact Q, care a determinat poziția considerată în calcule a punctului E, este incompatibilă cu funcționarea corectă a fălcii în trepte; în această situație calculele privind analiza geometrică a cleștelui trebuie întrerupte și reluate

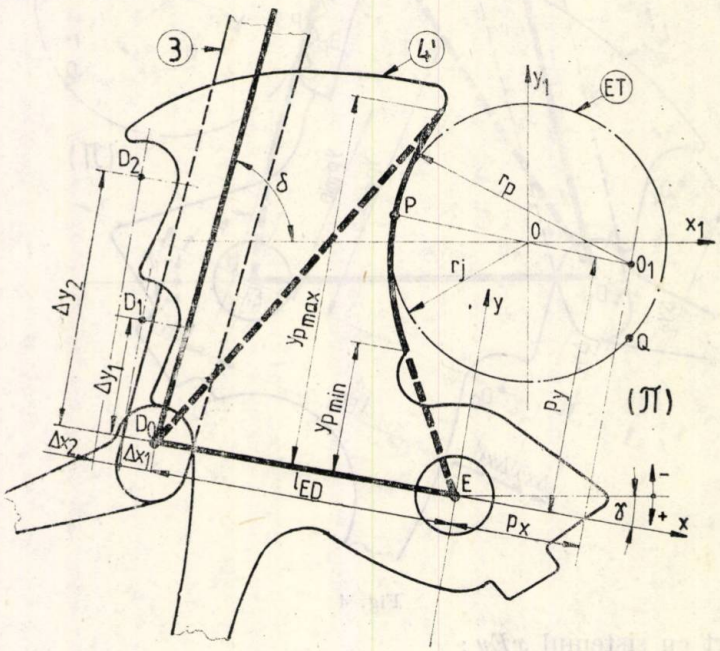


Fig. 5

considerînd o nouă poziție a punctului Q (din mulțimea de poziții posibile stabilită cu ajutorul condițiilor (2) — (4)).

2.2.2. În cazul cînd falca în trepte are suprafața de prindere a materialului tubular cilindrică-netedă, se utilizează pentru analiza geometrică schema de calcul prezentată în figura 5; sistemul propriu de coordonate al fălcii este tot xEy. Arcul de cerc cu raza r_P și centrul în O_1, cuprins între dreptele $y = y_{Pmin}$ și $y = y_{Pmax}$, reprezintă în schema de calcul proiecția pe planul π a suprafeței cilindrice de prindere; ca urmare,

la analiza geometrică a fălcii în trepte, trebuie considerate ca mărimi cunoscute : diametrul $d_j=2 \cdot r_j$, raza r_P, distanțele l_{ED}, $y_{P_{min}}$, $y_{P_{max}}$, Δx_k, $\Delta y_k (k = 1 \ldots m_i)$, p_x, p_y și toate caracteristicile geometrice rezultate din analiza fălcii scurte.

Contactul dintre falca în trepte și elementul tubular ET pe care operează cleștele se realizează dacă cercul cu centrul O și raza r_j este tangent arcului de cerc cu centrul O_1 și raza r_P ; punînd această condiție rezultă măsura unghiului γ, ce definește poziția fălcii în trepte în raport cu sistemul x_1Oy_1, [2] :

$$\gamma = \text{arc tg } (B_0/A_0) + \text{arc cos } (- C_0/\sqrt{A_0^2 + B_0^2}), \tag{16}$$

în care

$$A_0 = x_{1E} \cdot p_x + y_{1E} \cdot p_y, \tag{17}$$

$$B_0 = x_{1E} \cdot p_y - y_{1E} \cdot p_x ; \tag{18}$$

$$C_0 = [(r_p - r_j)^2 - (x_{1E} + y_{1E})^2 - (p_x + py)^2]/2. \tag{19}$$

Evident, relația (16) conduce la o soluție reală pentru γ dacă

$$A_0^2 + B_0^2 - C_0^2 \geqslant 0. \tag{20}$$

Cunoscînd măsura unghiului γ se determină, în raport cu sistemul x_1Oy_1, coordonatele centrului O_1 :

$$O_1 \begin{cases} x_{1O_1} = x_{1E} + p_x \cdot \cos\gamma + p_y \cdot \sin\gamma, \\ y_{1O_1} = y_{1E} - p_x \cdot \sin\gamma + p_y \cdot \cos\gamma \end{cases} \tag{21}$$

și apoi coordonatele punctului de contact P :

$$P \begin{cases} x_{1P} = - x_{1O_1} \cdot r_j/(r_P - r_j), \\ y_{1P} = - y_{1O_1} \cdot r_j/(r_p - r_j). \end{cases} \tag{22}$$

În continuare, folosind relațiile (12) se stabilesc coordonatele punctului P în raport cu sistemul xEy și se verifică îndeplinirea condițiilor de compatibilitate (13). Dacă condițiile (13) sînt îndeplinite, se finalizează analiza determinînd cu relațiile (14) coordonatele punctului D_k și calculînd măsura unghiului $\Phi = \widehat{POQ}$:

$$\Phi = \pi/2 + \beta - \varphi - \text{arctg } (y_{1P}/x_{1P}) ; \tag{23}$$

dacă condițiile nu sînt realizate se procedează așa cum s-a precizat la tratarea cazului considerat anterior.

2.3. ANALIZA GEOMETRICĂ A FĂLCII LUNGI

Pentru analiza geometrică a fălcii lungi (elementul *2*) se utilizează schema de calcul prezentată în figura 6 ; sistemul propriu de coordonate adoptat pentru acest element este sistemul cartezian xCy ($B \in Cx$). Mărimile ce se consideră cunoscute în calcule sînt : diametrul $d_j = 2. r_j$,

măsura unghiului α_1, distanțele l_{BC}, $l_{CC'}$, $l_{CC''}$, $x_{V\min}$, $x_{V\max}$, $x_{V'_{\min}}$, $x_{V'_{\max}}$; toate caracteristicile geometrice (unghiuri, coordonate) rezultate în etapele anterioare ale analizei, precum și distanțele : l_{AB} (între axele articulațiilor de pe coada cleștelui) și l_{CD} (lungimea închizătorului).

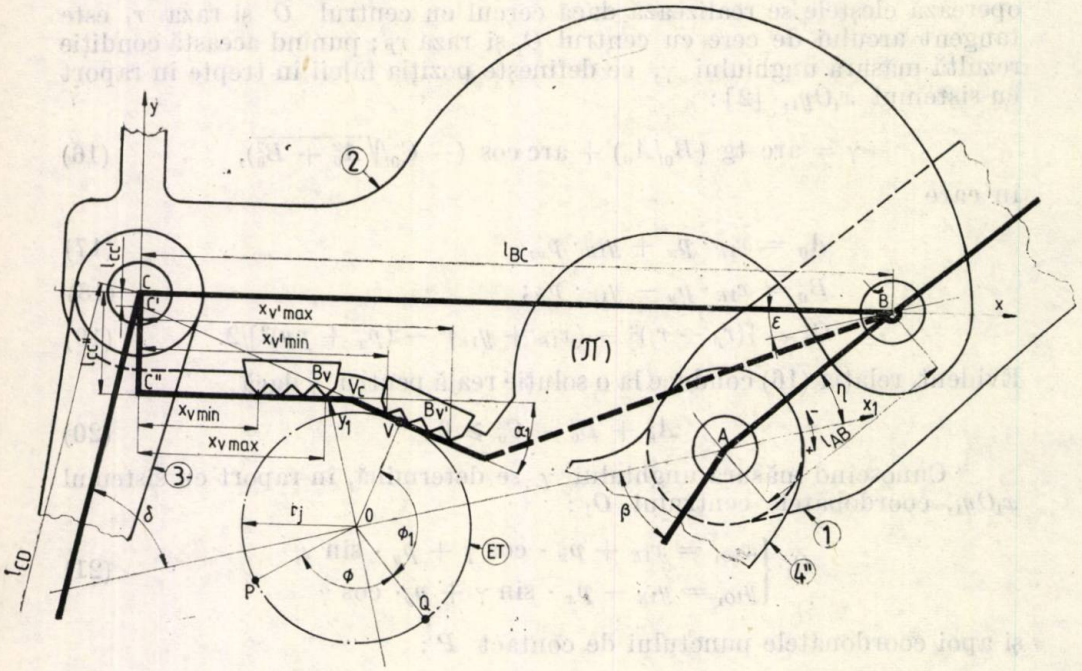


Fig. 6

Pozițiile corecte ale fălcii lungi în etapa finală a procesului de operare a cleștelui analizat pot fi determinate punînd următoarele condiții :

— punctul B (ce reprezintă în schema de calcul axa articulației cilindrice dintre falca lungă și coada cleștelui) trebuie să se afle față de punctul A (ce marchează în schemă axa articulației dintre falca scurtă și coadă) la distanța l_{AB} ;

— falca lungă trebuie să ia contact cu elementul tubular ET pe care operează cleștele prin unul din bacurile B_V, $B_{V'}$;

— punctul C (ce reprezintă în schema de calcul axa articulației dintre falca lungă și închizătorul cleștelui) trebuie să se afle față de punctul D_k (ce indică în schemă poziția axei de articulare între închizător și falca în trepte) la distanța l_{CD}.

Prima dintre condițiile enunțate (ce impune situarea punctului B pe cercul cu centrul A și raza l_{AB}) este îndeplinită dacă coordonatele punctului B în raport cu sistemul x_1Oy_1 sînt date de relațiile :

$$B\begin{cases} x_{1B} = l_{AE}/(2 \cdot \cos \beta) + l_{AB} \cdot \cos \gamma_i, \\ y_{1B} = -\, l_{AB} \cdot \sin \gamma_i \end{cases} \tag{24}$$

în care η este unghiul ce definește poziția cozii cleștelui în raport cu sistemul x_1Oy_1 (vezi fig. 3*d*) și are, în această fază a analizei, măsura nedeterminată.

Implicațiile îndeplinirii celei de-a doua dintre condițiile expuse trebuie analizate separat, în cele două situații posibile de realizare a contactului între falca lungă și elementul tubular ET astfel;

— elementul tubular vine în contact cu suprafața de lucru a bacului B_v, fără a atinge bacul alăturat $B_{V'}$, dacă (vezi fig. 3*d*) cercul cu centrul O și raza r_j este tangent dreptei $C''V_c$, fără a intersecta dreapta $C'V_c$;

— elementul tubular ia contact cu bacul B_V, fără a atinge bacul B_v, dacă (vezi fig. 3*d*) dreapta $C'V_c$ este tangentă și dreapta $C''V_c$ exterioară cercului cu centrul O și raza r_j.

Condițiile ce trebuie respectate pentru a se realiza fiecare din situațiile descrise pot fi exprimate prin relațiile:

$$x_{1B}\cdot\sin(\varepsilon+j_2\cdot\alpha_1)+y_{1B}\cdot\cos(\varepsilon+j_2\cdot\alpha_1)=r_j+(1-j_2)\,l_{CC''}+j_2(l_{BC}\cdot\sin\alpha_1+l_{CC''}\cos\alpha), \tag{25}$$

$$x_{1B}\cdot\sin[\varepsilon+(1-j_2)\cdot\alpha_1]+y_{1B}\cdot\cos[\varepsilon+(1-j_2)\cdot\alpha_1]>r_j+j_2\cdot l_{CC''}+(1-j_2)\cdot(l_{BC}\cdot\sin\alpha_1+l_{CC'}\cos\alpha_1), \tag{26}$$

în care j_2 este funcția de poziție a punctului V (ce reprezintă în schema de calcul urma pe planul π a liniei de contact dintre falca lungă și ET) definită astfel:

$$j_2=\begin{cases}0 \text{ dacă } V\in(C''V_c),\\ 1 \text{ dacă } V\in(C'V_c).\end{cases} \tag{27}$$

Relația (25), ce exprimă condiția de tangență dintre ET și bacul B_V (dacă $j_2=0$) sau B_V (dacă $j_2=1$), conține două mărimi necunoscute: măsura unghiului η (implicit, în coordonatele x_{1B}, y_{1B}) și măsura unghiului ε, ce definește în schema de calcul poziția fălcii lungi în raport cu sistemul x_1Oy_1.

Ultima dintre condițiile expuse anterior este îndeplinită dacă

$$(x_{1D_k}-x_{1C})^2+(y_{1D_k}-y_{1C})^2=l_{CD}^2, \tag{28}$$

în care coordonatele x_{1D_k}, y_{1D_k} sînt date de relațiile (14), iar coordonatele punctului C în raport cu sistemul general x_1Oy_1 — de relațiile;

$$C\begin{cases}x_{1C}=-l_{BC}\cdot\cos\varepsilon+x_{1B},\\ y_{1C}=l_{BC}\cdot\sin\varepsilon+y_{1B},\end{cases} \tag{29}$$

se observă că (28) conține implicit necunoscutele η și ε.

Măsurile unghiurilor η și ε pot fi determinate rezolvînd sistemul format din ecuațiile (25) și (28).

Cunoscînd măsurile unghiurilor η și ε se pot determina coordonatele punctelor caracteristice ale fălcii lungi în raport cu sistemul general x_1Oy; pentru punctul B se folosesc relațiile (24), pentru punctul C — relațiile

(29), iar pentru punctul de contact V — relaţiile :

$$V \begin{cases} x_{1V} = r_j \cdot \sin(j_2 \cdot \alpha_1 + \varepsilon), \\ y_{1V} = r_j \cdot \cos(j_2 \cdot \alpha_1 + \varepsilon). \end{cases} \tag{30}$$

În continuare, se determină coordonatele punctului V în raport cu sistemul de axe xCy :

$$V \begin{cases} x_V = r_j \cdot \sin(j_2 \cdot \alpha_1) + l_{BC} - x_{1B} \cdot \cos\varepsilon + y_{1B} \cdot \sin\varepsilon, \\ y_V = r_j \cdot \cos(j_2 \cdot \alpha_1) - x_{1B} \cdot \sin\varepsilon + y_1 \cdot \cos\varepsilon \end{cases} \tag{31}$$

şi se verifică dacă soluţiile obţinute prin analiza geometrică a fălcii lungi sînt compatibile cu sistemul real studiat; relaţiile de verificare sînt (26) şi

$$(1 - j_2) \cdot x_{V\,min} + j_2 \cdot x_{V'_{min}} \leqslant x_V \leqslant (1 - j_2) \cdot x_{V\,max} + j_2 \cdot x_{V'_{max}} . \tag{32}$$

Analiza geometrică a fălcii lungi se închide reţinînd ca rezultate coordonatele punctelor caracteristice B, C, V corespunzătoare soluţiilor ce au îndeplinit condiţiile de compatibilitate şi stabilind pentru aceste soluţii măsura unghiului $\Phi_1 = \widehat{QOV}$:

$$\Phi_1 = \pi - (\beta + \varepsilon + j_2 \cdot \alpha_1 - \varphi) \tag{33}$$

şi măsura unghiului δ (ce defineşte în schema de calcul poziţia închizătorului cleştelui în raport cu sistemul x_1Oy_1) :

$$\delta = \operatorname{arctg}\,[(y_{1C} - y_{1D_k})/(x_{1C} - x_{1D_k})]. \tag{34}$$

Studiul analitic corespunzător fălcii lungi (folosind metodologia expusă) încheie analiza geometrică a cleştelui; deoarece pentru fiecare diametru $d_j = 2 \cdot r_j \in I_p$ al ET pe care operează cleştele, calculele referitoare la falca lungă trebuie repetate considerînd pe rînd toate rezultatele analizei celorlalte elemente, este de aşteptat să se obţină mai multe soluţii generale ale problemei studiate (ce îndeplinesc toate condiţiile puse în diferitele etape ale analizei).

3. ANALIZA SISTEMULUI DE SOLICITARE AL CLEŞTILOR MULTIDIMENSIONALI

Soluţiile generale furnizate de analiza geometrică a unui cleşte multidimensional indică, în cazul fiecărui $d_j \in I_p$, amplasările şi orientările relative posibile ale elementelor cleştelui pentru ca, în etapa finală a procesului de operare, toate fălcile să vină în contact cu elementul tubular ET pe care se lucrează. Oricare din aceste soluţii corespunde unei funcţionări corecte a cleştelui dacă, în condiţiile aplicării forţei F_m (la extremitatea K a cozii *1*, vezi fig. 2*d*), se realizează între ET şi fălci forţe de contact (reacţiuni) capabile să asigure prinderea fără alunecare şi acţionarea cu momentul de torsiune M_t a elementului tubular. În consecinţă, validarea soluţiilor analizei geometrice impune a efectua, pentru fiecare din aceste soluţii, analiza solicitărilor cleştelui (determi-

narea reacțiunilor în punctele caracteristice ale cleștelui sub acțiunea forței exterioare F_m).

Pentru determinarea solicitărilor cleștelui în situația de lucru corespunzătoare uneia din soluțiile obținute prin analiza geometrică, se utilizează schema de calcul prezentată în figura 7, alcătuită acceptînd ipoteza că frecările în articulațiile cleștelui sînt neglijabile.

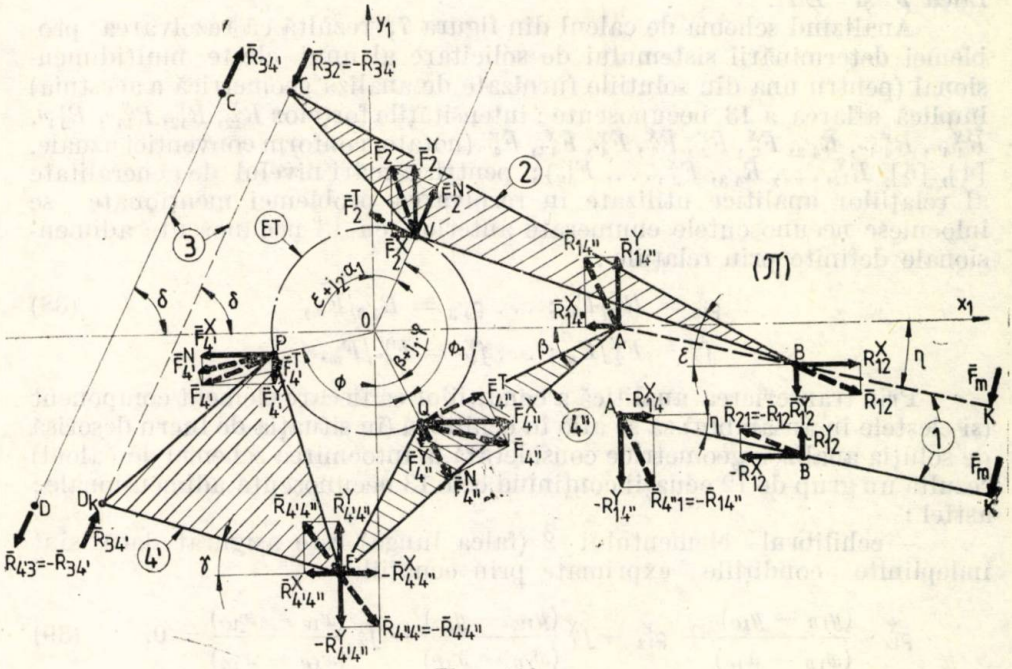


Fig. 7

Componentele sistemului de solicitare al cleștelui au fost notate $\bar{R}_{nm}$ și $\bar{F}_p$; simbolul $\bar{R}_{nm}$ s-a folosit pentru forțele de legătură (reacțiunile) dintre elementele cleștelui ($\bar{R}_{nm}$ reprezintă reacțiunea elementului n asupra elementului m realizată prin intermediul cuplei cinematice dintre aceste elemente), iar simbolul $\bar{F}_p$ — pentru forțele de contact (reacțiunile) dintre ET și fălcile cleștelui (p indică falca cu care interacționează mecanic elementul tubular). Pentru ușurarea calculelor și evidențierea numărului de necunoscute ce intervin, la realizarea schemei de calcul din figura 7 s-a ținut seama că (în conformitate cu principiul acțiunii și reacțiunii, [4], [5]):

$$\bar{R}_{nm} = -\bar{R}_{mn}, \tag{35}$$

iar reacțiunile avînd direcția necunoscută au fost reprezentate prin componentele corespunzătoare descompunerii lor după două direcții perpendiculare:

$$\bar{R}_{nm} = \bar{R}^X_{nm} + \bar{R}^Y_{nm}, \tag{36}$$

$$\bar{F}_p = \bar{F}^X_p + \bar{F}^Y_p = \bar{F}^N_p + \bar{F}^T_p, \tag{37}$$

componentele reacțiunilor au suporturile în pozițiile indicate de exponenții ce le afectează simbolurile : exponentul X arată că suportul componentei este paralel cu axa Ox_1 a sistemului general x_1Oy_1 ; Y indică paralelismul suportului cu axa Oy_1 a aceluiași sistem, iar N și T — paralelismul componentelor vectorului $\bar{F}_p$ cu normala N, respectiv tangenta T la elementul tubular ET, într-un punct situat pe linia de contact dintre falca p și ET.

Analizînd schema de calcul din figura 7, rezultă că rezolvarea problemei determinării sistemului de solicitare al unui cleşte multidimensional (pentru una din soluțiile furnizate de analiza geometrică a acestuia) implică aflarea a 13 necunoscute : intensitățile forțelor $\bar{R}^X_{12}$, $\bar{R}^Y_{12}$, $\bar{R}^X_{14''}$, $\bar{R}^Y_{14''}$, $\bar{R}^X_{4'4''}$, $\bar{R}^Y_{4'4''}$, $\bar{R}_{4'3}$, $\bar{F}^X_2$, $\bar{F}^Y_2$, $\bar{F}^X_{4'}$, $\bar{F}^Y_{4'}$, $\bar{F}^X_{4''}$, $\bar{F}^Y_{4''}$ (notate, conform convenției uzuale, [4], [5], $R^X_{12}, \ldots, R_{4'3}, F^X_2, \ldots, F^Y_{4''}$) ; pentru a mări nivelul de generalitate al relațiilor analitice utilizate în rezolvarea problemei menționate se înlocuiesc necunoscutele enumerate anterior, cu 13 necunoscute adimensionale definite prin relațiile :

$$\rho^X_{12} = R^X_{12}/F_m\,; \quad \ldots \quad \rho_{4'3} = R_{4'3}/F_m, \tag{38}$$
$$f^X_2 = F^X_2/F_m\,; \quad \ldots f^Y_{4''} = F^Y_{4''}/F_m.$$

Prin transcrierea analitică a condițiilor ca fiecare element component (și cleștele în ansamblu) să se afle în echilibru (în situația de lucru descrisă de soluția analizei geometrice considerată la întocmirea schemei de calcul) rezultă un grup de 12 ecuații conținînd cele 13 necunoscute adimensionale ; astfel :

— echilibrul elementului *2* (falca lungă) este asigurat dacă sînt îndeplinite condițiile exprimate prin ecuațiile :

$$\rho^X_{12} \cdot \frac{(y_{1B} - y_{1C})}{(x_{1B} - x_{1C})} + \rho^Y_{12} - f^X_2 \frac{(y_{1V} - y_{1C})}{(x_{1B} - x_{1C})} - f^Y_2 \frac{(x_{1V} - x_{1C})}{(x_{1B} - x_{1C})} = 0, \tag{39}$$

$$\rho^X_{12} - \rho_{4'3} \cos\delta - f^X_2 = 0, \tag{40}$$

$$\rho^Y_{12} + \rho_{4'3} \cdot \sin\delta - f^Y_2 = 0\,; \tag{41}$$

— condițiile de echilibru al elementului *1* (coada) sînt descrise de ecuațiile :

$$(\rho^X_{12} \cdot \sin\eta - \rho^Y_{22} \cdot \cos\eta) \cdot l_{AB}/l_{AK} = -1, \tag{42}$$

$$(\rho^X_{14''} \cdot \sin\eta - \rho^Y_{14''} \cdot \cos\eta) \cdot l_{AB}/\, l_{BK} = -1\,; \tag{43}$$

$$\rho^X_{12} - \rho^X_{14''} = -\sin\eta\,; \tag{44}$$

— elementul *4''* (falca scurtă) se află în echilibru dacă sînt îndeplinite condițiile exprimate prin ecuațiile :

$$\rho^X_{14''} \frac{(y_{1A} - y_{1E})}{(x_{1A} - x_{1E})} + \rho^Y_{14''} - f^X_{4''} \frac{(y_{1Q} - y_{1E})}{(x_{1A} - x_{1E})} - f^Y_{4''} \frac{(x_{1Q} - x_{1E})}{(x_{1A} - x_{1E})} = 0, \tag{45}$$

$$\rho^X_{14''} + \rho^X_{4'4''} - f^X_{4''} = 0, \tag{46}$$

$$\rho^Y_{14''} + \rho^Y_{4'4''} - f^Y_{4''} = 0\,; \tag{47}$$

— condițiile de echilibru al elementului 4′ (falca în trepte) sînt descrise de ecuațiile :

$$\rho^X_{4'4''}\frac{(y_{1E}-y_{1D_k})}{(x_{1E}-x_{1D_k})}+\rho^Y_{4'4''}-f^X_{4'}\frac{(y_{1P}-y_{1D_k})}{(x_{1E}-x_{1D_k})}+f^Y_{4'}\frac{(x_{1P}-x_{1D_k})}{(x_{1E}-x_{1D_k})}=0, \tag{48}$$

$$\rho^X_{4'4''}+\rho_{4'3}\cdot\cos\delta-f^X_{4'}=0, \tag{49}$$

$$\rho^Y_{4'4''}-\rho_{4'3}\cdot\sin\delta-f^Y_{4'}=0. \tag{50}$$

Pentru aflarea celor 13 necunoscute adimensionale definite prin relațiile (38) este necesar a se completa grupul de ecuații (39) — (50) cu încă o ecuație (conținînd aceste necunoscute), astfel încît să se formeze un sistem de ecuații (S) compatibil și determinant ($\det(S)\neq 0$). Deoarece singurele ecuații independente ce exprimă condițiile de realizare a echilibrului cleștelui sînt cuprinse în grupul (39) — (50), pentru obținerea ultimei ecuații din (S) se scriu relațiile între intensitățile componentelor $\bar{F}^T_p$ (avînd natura unor forțe de frecare) și $\bar{F}^N_p$ (forțe normale la ET pe liniile de contact ale elementului tubular cu fălcile cleștelui) ce decurg din aplicarea legilor frecării, [5], [7] :

$$F^T_p/F^N_p=\mu_p\leqslant\mu_{p0}\,; \tag{51}$$

coeficienții de frecare μ_p (efectivi) și μ_{p0} (corespunzători condițiilor limită de declanșare a fenomenelor de alunecare relativă a suprafețelor de contact ale fălcilor și ET) se consideră caracteristici cunoscute.

Folosind schema de calcul din figura 7 și ținînd seama de (37) se transcriu relațiile (51) într-o formă echivalentă, funcție de necunoscutele definite prin (38) :

$$f^X_2\cdot\cos(\varepsilon+\alpha_1)+f^Y_2\cdot\sin(\varepsilon+\alpha_1)=\mu_2[-f^X_2\cdot\sin(\varepsilon+\alpha_1)+$$
$$+f^Y_2\cos(\varepsilon+\alpha_1)], \tag{52}$$

$$f^X_{4'}\cdot\sin\gamma_1+f^Y_{4'}\cdot\cos\gamma_1=\mu_{4'}[f^X_{4'}\cdot\cos\gamma_1-f^Y_{4'}\cdot\sin\gamma_1], \tag{53}$$

$$f^X_{4''}\cdot\cos(\beta+j_1\cdot\varphi)-f^Y_{4''}\cdot\sin(\beta+j_1\cdot\varphi)=$$
$$=\mu_{4''}[f^X_{4''}\cdot\sin(\beta+j_1\cdot\varphi)+f^Y_{4''}\cdot\cos(\beta+j_1\cdot\varphi)], \tag{54}$$

măsura unghiului γ_1 ce intervine în (53) fiind dată de relația :

$$\gamma_1=\Phi-\pi/2-\beta-j_1\cdot\varphi. \tag{55}$$

Rezolvînd sistemul (S) alcătuit din ecuațiile (39) — (50) și (52) se obțin toate necunoscutele ρ_{nm} și f_p ; folosind relațiile (53), (54) se determină apoi valorile coeficienților de frecare $\mu_{4'}$ și $\mu_{4''}$ și se verifică dacă sînt îndeplinite condițiile :

$$\mu_{4'}\leqslant\mu_{4'0}\,;\ \mu_{4''}\leqslant\mu_{4''0}. \tag{56}$$

Dacă (56) sînt îndeplinite rezultă că soluția analizei geometrice supusă verificării este compatibilă cu realizarea rolului funcțional al cleștelui (sistemul de solicitare asigură prinderea fără alunecare și acționarea cu

momentul de torsiune M_t a elementului tubular); în această situație folosind relațiile (38) se determină intensitățile tuturor reacțiunilor $\bar{R}_{nm}$, $\bar{F}_p$ (ce pot fi folosite pentru a analiza stările de tensiuni și deformații din elementele cleștelui în timpul operării pe ET).

Dacă (56) nu sînt îndeplinite, rezultă că soluția analizei geometrice verificată nu asigură funcționarea corectă a cleștelui.

După verificarea prin metodologia expusă a tuturor soluțiilor furnizate de analiza geometrică se conchide dacă cleștele multidimensional a cărei funcționare a fost simulată analitic este corespunzătoare; evident, concluzia va fi afirmativă dacă pentru fiecare $d_j \in I_p$ există cel puțin o soluție a analizei geometrice care a corespuns verificărilor funcționale efectuate prin analiza sistemului de solicitare.

Primit la redacție la 24 decembrie 1986

J. DÉLERY (sub red.), *Turbulent Shear-Layer/Shock Wave Interactions* (Interacţiunea strat limită turbulent/undă de şoc), *IUTAM Symposium, Palaiseau, France, September 9—12, 1985*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1986, XXVI + 430 p., 281 fig.

Problema interacţiunii dintre stratul limită turbulent şi undele de şoc prezintă o deosebită importanţă teoretică şi practică, fapt ce justifică pe deplin organizarea de către Uniunea Internaţională de Mecanică Teoretică şi Aplicată (IUTAM) a unui simpozion pe o astfel de temă. Interesul suscitat de această reuniune ştiinţifică a fost de altfel mare, conducînd la participarea unui număr de 106 specialişti din 8 ţări. De asemenea, 59 de autori, din 7 ţări, au prezentat la simpozion 3 conferinţe şi 29 comunicări.

Volumul lucrărilor simpozionului cuprinde toate aceste conferinţe şi comunicări precum şi o introducere prezentată de P. Carrière în care sînt expuse principalele probleme din tematica simpozionului.

Prima dintre cele trei conferinţe, de H. Ha Minh şi D. Vandromme, intitulată „Modelarea curgerilor turbulente compresibile : posibilităţi actuale şi perspective" constituie expunere sistematică asupra problemelor pe care le ridică modelarea matematică a curgerilor turbulente.

A doua conferinţă, prezentată de A. J. Smits şi S. M. Bogdonoff sub titlul „O „avanpremieră" (interacţiunilor undă de şoc tridimensională/strat limită turbulent pune în discuţie cîteva aspecte importante ale acestei probleme (interacţiuni „slabe" şi „tari"), subliniind discrepanţa existentă între informaţiile necesare şi acelea existente, experimentale sau de calcul.

În sfîrşit o a treia conferinţă prezentată de D. S. Dolling şi intitulată „Nestaţionaritatea desprinderii stratului limită indusă de unda de şoc. O trecere în revistă", conţine o relativ scurtă expunere asupra stadiului actual al problemei enunţate în titlu.

Atît conferinţele cît şi cele 29 comunicări au fost grupate, după tematica lor, după cum urmează :

— interacţiuni în curgeri staţionare bidimensionale ;
— interacţiuni în curgeri staţionare tridimensionale ;
— aspecte nestaţionare ale fenomenelor de interacţiune ;
— alte aspecte ale curgeriilor cu interacţiune.

Din primul grup, care a cuprins o conferinţă şi 13 comunicări, remarcăm lucrările prezentate de D. A. Johnson şi L. S. King („Prevederea curgerii transonice cu desprindere bazată pe un model de închidere matematic simplu al turbulenţei de neechilibru"), de B. Escande şi L. Cambier („Modelarea turbulenţei în interacţiunile transonice"), de G. Degrez şi D. Vandromme („Calcul implicit Navier-Stokes al interacţiunilor şoc transonic/strat limită turbulent"). Alte comunicări interesante, conţinînd tot aspecte teoretice, sînt acelea prezentate de T. C. Tai („Sistem de interacţiune tare contra slab pentru calcul în curgere transonică"), de D. E. Edwards, D. L. Whitfield şi J. E. Carter („Aplicarea teoriei de interacţiune a stratului limită în analiza desprinderii induse de şocul transonic"), de R. Bohning şi J. Zierep („Calculul interacţiunii şoc/strat limită turbulent bidimensional pe o suprafaţă curbă la viteză transonică"), sau aspecte teoretice şi experimentale, ca aceea prezentată de X. Liu şi L. C. Squire („Interacţiunea undă de şoc/strat limită turbulent pe o suprafaţă curbă la viteză transonică") sau de P. Thiede şi P. Krogmann („Ameliorarea performanţelor unei aripi transonice prin controlul pasiv al interacţiunii şoc/strat limită"). În sfîrşit în aceeaşi tematică se încadrează comunicările prezentate de D. Vandromme şi H. Ha Minh („Analiza fizică a interacţiunii strat limită turbulentă/undă de şoc utilizînd închideri de ordinul al doilea"), de J. L. Brown, M. I. Kussoy şi T. J. Coakley („Proprietăţile turbulente ale curgerilor axial-simetrice de interacţiune undă de şoc/strat limită"), de R. E. Melnik, R. L. Cusic şi M. J. Siclari („O teorie asimptotică a interacţiunilor turbulente superioare într-un diedru de compresiune"), de D. Aymer de la Chevalerie („Calculul de ordinul al doilea al interacţiunilor undă de şoc/strat limită în coordonate curbilinii") şi de C. K. Forester şi I. Strom („Modelarea Navier-Stokes şi experimentală a curgerii într-un ajutaj de rachetă").

Din al doilea grup, care a cuprins o conferinţă şi 10 comunicări, fac parte acelea prezentate de G. S. Settles („Despre lungimile de începere a interacţiunilor undă de şoc/strat li-

mită turbulent"), de A. Mignosi, J. B. Dor și A. Seraudie („Studiul experimental al condițiilor de desprindere a stratului limită printr-o undă de șoc pe un profil și pe o aripă în săgeată"), de J. L. Fulker și P. R. Ashill („Un model al curgerii pe aripile în săgeată cu desprindere indusă de șoc") și de N. Saida („Desprinderea în fața aripioarelor tești în stratul limită turbulent supersonic"). Tot în acest grup sînt cuprinse comunicările, cu caracter teoretic sau experimental avînd ca autori pe S. M. Bogdonoff („Unele observații asupra interacțiunilor tridimensionale undă de șoc/strat limită turbulent"), pe A. Rizzi, C. J. Purcell și J. T. McMurray („Experiment numeric cu o curgere neviscoasă rotațională în jurul unei aripi delta : viteză transonică"), pe G. R. Inger („Interacțiunea supersonică viscos-neviscos a unei muchii în săgeată cu stratul limită turbulent"), pe J. D. McLean și T. K. Matoi („Model de interacțiune șoc/strat limită pentru calculul curgerii tridimensionale transonice"), și pe M. S. Holden ("Probleme aerotermice asociate cu interacțiunea viscos neviscos pe vehicule de zbor hipersonic").

Grupul al treilea cuprinde o conferință, pe care am semnalat-o mai înainte și numai patru comunicări, fapt explicabil prin dificultatea tematicii. Aceste comunicări au ca autori pe D. G. Mabey și F. Lee („Reducerea oscilațiilor de frecvență joasă pe un corp la viteze transonice"), pe M. I. Hussaini, F. Collier și D. M. Bushnell („Alterarea turbulenței datorită mișcării cu șoc"), pe J. P. Dussauge, K. C. Mick și J. Andreopoulos („Proprietăți ale fluctuațiilor presiunii la perete într-o mișcare desprinsă peste o pantă de compresiune") și pe J. F. Debiève și J. P. Lacharme („O interacțiune undă de șoc/turbulență liberă").

În sfîrșit, în cel de al patrulea grup, au prezentat comunicări L. G. Kaufman II și C. B. Johnson („O privire asupra unor măsurători de presiune și distribuții termice induse de dispozitivele de control de la bordul de fugă al avioanelor hipersonice") și S. I. Cheng („Turbulența în fluide : deterministică sau statistică".

Simpla enumerare a titlurilor conferințelor și comunicărilor evidențiază varietatea și actualitatea problemelor tratate. Așa cum era de așteptat, cele mai multe lucrări se referă la probleme care apar în aerodinamica vitezelor mari, dar nu lipsesc și alte aspecte inclusiv acelea cu caracter general.

Problema interacțiunii între undele de șoc și stratul limită turbulent este deosebit de importantă pentru multe aplicații practice. Fenomenul apare aproape inevitabil în orice curgere transonică sau supersonică și ca urmare eforturile de cercetare în această direcție sînt considerabile. Tehnicile moderne de calcul și dezvoltarea metodelor de măsură de mare precizie au permis, în ultimele decenii, realizarea unor progrese considerabile.

Lucrările prezentate la acest simpozion au meritul de a conține rezultate dintre cele mai recente în această direcție și de a permite astfel cititorilor să-și formeze o imagine corectă despre stadiul actual al problemei.

Volumul prezintă, interes, în primul rînd, pentru cercetătorii și inginerii care lucrează în aerodinamica vitezelor mari dar este recomandabil, în general, tuturor specialiștilor în mecanica fluidelor.

T. Oroveanu

C. ALBRIGHT (sub red.), *Laser Welding, Machining and Materials Processing* (Sudarea prelucrări mecanice și prelucrarea materialelor cu laseri), International Conference on Applications of Lasers and Electro-optics, San-Francisco, California, USA, 11—14 November 1985. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1986, 950 p., 258 fig.

Cartea reprezintă o culegere a lucrărilor prezentate în cadrul Conferinței Internaționale despre Aplicațiile Laserului și Electrono-Optică (ICALEO), din 11—14 noiembrie 1985, San Francisco, California, SUA.

Într-un prim capitol intitulat „Principii de bază" sînt prezentate patru lucrări referitoare la efectele sulfului și nichelului asupra proprietăților mecanice ale structurilor sudate din oțel HY80 și HY100, la alegerea parametrilor optimi la sudarea cu fascicul laser a aliajului Inconel 600, un studiu privind caracteristicile microstructurale ale oțelurilor inoxidabile sudate cu laser cu impulsuri și de undă continuă și, în fine, un model analitic pentru studierea parametrilor unui laser de putere utilizat la sudarea modulului „thick film ignition".

Capitolul 2, „Sudarea cu laser" cuprinde lucrări referitoare la sudarea cu laser" a tablelor din titan, benzilor din oțel electrotehnic, tablelor din oțel tip HSLA, aliajelor de aluminiu. Alte lucrări se referă la caracteristicile la sudare ale fasciculului inelar al unui laser CO_2 de 5 kW,

respectiv, la optimizarea parametrilor de sudare pentru obținerea unei pătrunderi foarte bune la un minim al căldurii de intrare.

Următorul capitol „Prelucrări mecanice cu laser" oferă o imagine a posibilităților largi de înlocuire a procedeelor convenționale de prelucrare prin prelucrarea cu laser. Astfel, sînt prezentate sistemele industriale multiarc cu fascicul laser, flexibile, pentru tăierea țevilor, sudarea pieselor pe contururi complexe, posibilitățile de găurire a ceramicii, tăierea colțurilor ascuțite cu un fascicul laser în impulsuri. Sînt descrise unele echipamente care permit debitarea subansamblelor cu combustibil nuclear precum și mașina de tăiere cu laser „MELCUT — 3 DCM". Reține atenția descrierea unui sistem de urmărire acustică a procesului de prelucrare cu laser. În fine, unele lucrări prezintă experiența unor firme în domeniu.

Ultimul capitol al cărții „Prelucrarea materialelor" cuprinde lucrări referitoare la: tratamentul de suprafață cu fascicul laser, microstructura și rezistența la uzură a aliajelor depuse cu laser, producerea particulelor ceramice și metalice ultrafine, durificarea în linie a oțelului. Sînt prezentate de asemenea o serie de aplicații la fabricarea componentelor de microelectronică sau la cartografierea efectului „latch-up" la circuitele integrate CMOS. Sînt abordate și măsurile de protecție ce se impun datorită produselor secundare toxice apărute la prelucrarea materialelor plastice cu laser CO_2.

Articolele menționate tratează domenii de utilizare a laserilor de undă continuă sau în impulsuri, de puteri de la 100 W la 25 kW, la nivelul anului 1985, dovedindu-se foarte utile în documentarea specialiștilor preocupați de prelucrările cu laser (microsudare, sudare, tăiere, găurire, tratament termic de suprafață, încărcare prin sudare cu fascicul laser etc.).

Z. Pircea

N. BABA, *New Topics in Learning Automata Theory and Applications* (Noi probleme în însușirea teoriei controlului și informaticii și aplicații), Springer Verlag, Berlin — Heidelberg — New-York — Tokyo, 1985, 131 p.

Lucrarea reprezintă volumul 71 din seria *Lecture Notes in Control and Information Sciences* destinată prezentării celor mai noi cercetări în domeniul științelor controlului și al informaticii. Problematica abordată se prefigurează ca un nou capitol al teoriei controlului optimal.

Ideea controlului instruibil a apărut din necesitatea aplicării rezultatelor controlului optimal în cazurile cu informații limitate privitoare la sistemul condus, sistem conceput ca mediu de acțiune al comenzii. Automatele instruibile la care se referă cartea constituie din punctul de vedere informațional una dintre cele mai importante categorii de elemente de realizare a unui control instruibil.

Lucrarea este o monografie dedicată comportării instruibile a automatelor stohastice destinate operării într-un mediu aleator necunoscut multivariabil la intrare și la ieșire denumit „mediu multiprofesor". Față de un astfel de mediu automatul este modelat printr-un sextuplu alcătuit din *informațiile binare furnizate de mediu multiprofesor, ieșirile automatului, stările automatului, funcția de ieșire, vectorul de probabilitate a stărilor și schema de reactualizare (reîntărire) a vectorului de probabilitate*. Proiectarea informațională a unui automat instruibil constă în alegerea unei scheme (algoritm) de așa manieră încît automatul să-și îmbunătățească performanțele de instruire.

Monografia conține cinci capitole avînd un capitol introductiv, în care se prezintă noțiunile fundamentale din domeniul abordat, și patru capitole de bază. Pe parcursul acestora se prezintă:

— manierele de instruire ale automatelor stohastice ce operează în medii multiprofesor staționare necunoscute, dezvoltate prin prisma conceptului de recompensă ponderată medie și a utilizării schemelor GAE ca algoritme de reactualizare (cap. 2);

— manierele de instruire ale automatelor stohastice ce operează în medii multiprofesor nestaționare, utilizînd în principal scheme MGAE ca algoritme de reactualizare (cap. 3);

— aplicații ale automatelor stohastice (probleme de autooptimizare parametrică a automatelor stohastice perturbate folosind funcții criteriu multiobiectiv (cap. 4) și probleme de jocuri de asociere, cu informații incomplete, între trei parteneri, ca aplicații a structurilor automate ierarhice (cap. 5)).

Fiecare dintre capitolele de bază conține rezultate obținute prin simulare însoțite de comentarii.

Cartea are 131 de pagini cuprinzînd o listă bibliografică cu 182 de titluri.

T. Dragomir

KLEMENS HEUMANN, *Basic Principles of Power Electronics* (Principii fundamentale ale electronicii de putere), Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York — London — Paris — Tokyo, 1986, 294 p., 242 fig.

Apariția în ultimii ani a tranzistoarelor cu stingere pe grilă GTO și a tranzistoarelor MOSFET de putere a determinat modificări structurale ale circuitelor de putere utilizate în conversia energiei electrice, extinzînd în același timp posibilitățile lor de utilizare.

Cartea, care face parte din seria „Sisteme electroenergetice și inginerie" a editurii Springer, prezintă în mod atractiv și accesibil problematica comutării, reglării și conversiei energiei electrice utilizînd dispozitive semiconductoare. Autorul pune accentul pe aspectele calitative ale fenomenelor în strînsă legătură cu posibilitățile de utilizare în practică.

Cartea este accesibilă inginerilor și studenților de diverse specialități care au cunoștințe de bază în domeniul electrotehnicii și matematicii.

Numeroasele tabele și diagrame ce sintetizează relațiile de bază între mărimile caracteristice ale diferitelor tipuri de conversoare conferă cărții un plus de utilitate.

Principalele capitole ale cărții se referă la : caracteristicile și comportarea dispozitivelor semiconductoare de putere; circuite de comandă și protecție ale elementelor de comutare; comutatoare și regulatoare de curent alternativ; convertoare cu comutație exterioară; convertoare autocomutate; surse de alimentare ale convertoarelor; efectul sarcinii asupra funcționării convertoarelor; condiții energetice în funcționarea convertoarelor; aspecte privind funcționarea convertoarelor în sisteme de reglare automată; exemple de aplicații ale convertoarelor realizate cu dispozitive semiconductoare.

T. Mureșan

W. F. GUTTROPF (sub red.), *Assembly Automation* (Asamblare automată), *Proceedings of the 7th International Conference* (Lucrările celei de a 7-a Conferințe internaționale), Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York — Tokyo, 1986, 432 p.

Volumul conține un număr de 42 articole prezentate la conferința care a avut loc în zilele 4—6 februarie 1986, la Zürich, Elveția, în organizarea și cu suportul financiar al societății IFS (Conferences) Ltd. din Kempston, Marea Britanie. Cartea a fost editată de profesorul Walter Guttropf, președintele conferinței.

Volumul este organizat în nouă capitole, dintre care opt consacrate articolelor care se integrează într-un anumit domeniu, ultimul capitol fiind rezervat articolelor care au fost depuse cu întîrziere. Primul capitol, intitulat „Planificarea sistemelor și considerații economice" conține un număr de trei articole. Se tratează modalitățile de concepere și implementare a unor sisteme flexibile de asamblare, justificarea economică a unei asemenea implementări și modelarea economică a sistemelor de asamblare flexibilă. Articolele publicate în acest capitol formulează unele aspecte generale ale asamblării automate.

Cel de al doilea capitol al lucrării, conținînd un număr de opt articole este consacrat „ Asamblării cu roboți". Un număr de trei articole se referă la asamblarea robotizată în domeniul mecanicii fine, respectiv industriei electrice. Este expusă între altele concepția originală și încercarea unui microrobot experimental (un colectiv de autori de la corporația NEC Japonia). Se prezintă în continuare aplicații ale unor roboți industriali acționați electric pentru asamblări în industria de autovehicule (colectiv de autori de la firma KUKA—RFG) și asamblarea automată cu ajutorul unui robot cu două brațe (autori de la Institutul de Cibernetică și Robotică a Academiei bulgare de științe). În cadrul capitolului se tratează în cite un articol concepția modulară a roboților de asamblare, gradul de flexibilitate al unui robot de asamblare și programarea unei sarcini de asamblare cu un sistem de planificare ierarhică.

Capitolele III și IV sînt consacrate proiectării subansamblurilor și ansamblurilor într-un mod adecvat pentru asamblare automată. Primul grup de trei articole se referă la proiectare asistată de calculator și simulare. Se analizează relația dintre sistemul de control în vederea depa-

nării și disponibilitatea mașinilor de asamblare, proiectarea rațională din punct de vedere economic al dispozitivelor de prehensiune și programarea asamblării automate, ambele asistate de calculator. Următorul grup de trei articole se referă la studii de caz de aplicații de asamblare automată. Unul din articole (autori un colectiv de la Universitatea Tehnică a Danemarcei) se referă la o interesantă corelație dintre proiectul produsului, procesul de fabricație, planul de amplasament al componentelor sistemului de fabricație și flexibilitate.

Capitolele V și VI sînt consacrate celulelor liniilor și sistemelor de fabricație flexibilă. Sînt descrise într-un număr de opt articole, sînt prezentate concepții de sisteme automate de asamblare a unor produse de mecanică fină și de electronică industrială. Atrag în mod deosebit atenția articolele „O nouă dimensiune în automatizare" (autor M. Moinet, IBM Franța) și „Obținînd flexibilitate în asamblare prin tehnologie și oameni" (autor I. B. Wilson, Handley Walker Management Consultants Ltd., Marea Britanie), care tratează conlucrarea dintre mașini și operatori umani în cadrul unor sisteme de fabricație flexibilă.

Capitolul al VII-lea se referă în trei articole la sisteme de fabricație flexibilă utilizînd vehicule ghidate în mod automat.

Capitolul al VIII-lea este afectat cercetării asamblării inteligente. Cele șase articole cuprinse în capitol se referă la asamblarea unor piese nerigide, la sisteme de asamblare automată utilizînd senzori. Un articol (autori doi colaboratori ai Universității Michigan, S.U.A.) propune proiectul unui sistem expert pentru sugestii optimale.

Dintre cele șapte articole întîrziate cuprinse în capitolul al IX-lea se remarcă cel intitulat „Proiectul ESPRIT „534" — dezvoltarea unei celule flexibile de asamblare automată și studii asociate de factori umani", elaborat de J. B. Mills, Westland plc, Marea Britanie.

Volumul este o secțiune semnificativă a stadiului actual al cercetărilor referitoare la asamblare automată, indicînd căile de dezvoltare în viitor : cooperarea om-mașină, efectuarea operațiilor de asamblare cu control senzorial și extinderea asamblării automate asupra pieselor nerigide. Lucrarea se adresează cercetătorilor care lucrează în domeniul roboticii și a tehnologiilor flexibile, inginerilor mecanici și electrotehnicieni.

Articolele sînt prezentate de un număr de 72 autori, dintre care 14 sînt din învățămîntul superior iar 58 din cercetare și producție.

Dintre cele 42 articole cuprinse în volum doi provin din țări socialiste (cîte unul din Cehoslovacia și Bulgaria).

F. Kovács

B. LÖSER, H. LÖSER, H. WIESE, J. STRITZKE, *Bemessungsverfahren für Beton- und Stahlbetonbauteile*, (Procedee de dimensionare a elementelor din beton și beton armat), Verlag Ernst u. Sohn, Berlin, 1986, 919 pag., 264 fig., 248 tab., 382 indic. bibl.

Prima ediție a acestei cărți a apărut în 1925 avînd 149 de pagini (autor : B. Löser), cea de a 18-a, în 1971 cu 473 de pagini. În ediția de față, cea de a 19-a, materia prezentată este grupată în 18 secțiuni.

Cartea debutează cu o secțiune privind acțiunile și eforturile (100 p.), cuprinzînd date referitoare la calculul grinzilor cu una și mai multe deschideri, al cadrelor simple și al riglelor și stîlpilor de cadre. Se prezintă și acțiunile asupra zidurilor de sprijin și asupra elementelor silozurilor. În următoarele două secțiuni după o scurtă descriere a proprietăților lianților, agregatelor, betonului și oțelului beton (19 p.) se pun în evidență bazele dimensionării secțiunilor (25 p). Stîlpii comprimați centric și fundațiile lor fac obiectul secțiunii a 4-a (38 p.), iar grinzile cu secțiune dreptunghiulară solicitate în încovoiere pură sînt tratate în secțiunea a 5-a (27 p.). În secțiunea a 6-a se analizează condițiile de exploatare a structurilor din beton armat (91 p.) punîndu-se accent pe limitarea deschiderii fisurilor și a săgeților din încovoiere și tăiere. Următoarele cinci secțiuni (secț. 7—secț. 11, 185 p.) tratează încovoierea dreaptă cu sau fără forță axială a diferitelor tipuri de secțiuni (dreptunghiulară, T, I, circulară și inelară), cît și încovoierea oblică, cu sau fără forță axială, a secțiunilor dreptunghiulare. Dimensionarea la forțe tăietoare și la torsiune face obiectul secțiunii a 12-a (49 p.). Secțiunea a 13-a (38. p.) cuprinde rezolvări constructive privind armăturile.

Diferitele tipuri de plăci și planșee sînt tratate în secțiunile 14—16 (95 p.). Pe lîngă planșeele cu plăci și grinzi din beton armat sînt prezentate planșeele ceramice și sticloase, plan-

şeele cu nervuri dese şi planşelee fără grinzi. Predimensionarea secţiunilor din beton precomprimat din secţiunea a 17-a (32 p.) încheie partea teoretică a cărţii.

Secţiunea a 18-a cu 62 exemple de calcul (154 p.) ilustrează foarte bine aplicarea procedeelor de calcul descrise în secţiunile anterioare. Într-o scurtă anexă (23 p.) sînt prezentate date privind armăturile şi alte reglementări apărute după încheierea lucrării.

Comparativ cu ediţia precedentă, materia secţiunilor 3—18 este complet refăcută, bazîndu-se pe noile norme DIN. Consideraţiile teoretice nu se limitează însă la aceste norme, ţinînd seama de nivelul atins pe plan mondial. Prezenta ediţie cuprinde pentru prima dată şi procedee adecvate calculului electronic, precizîndu-se cînd utilizarea acestora devine mai avantajoasă decît folosirea numeroaselor tabele şi diagrame din carte. Exemplele de calcul judicios alese sporesc calităţile didactice ale acestei cărţi, care a cunoscut mai multe ediţii şi în alte limbi : turcă, rusă, bulgară, portugheză, spaniolă şi franceză. Şi prezenta ediţie, într-o prezentare grafică excelentă, poate fi de un real folos cercetătorilor, cadrelor din învăţămîntul superior, cît şi proiectanţilor de specialitate.

R. Friedrich

H. P. ROSSMANITH (sub. red.), *Finite Elemente in der Bruchmechanik* (Elemente finite în mecanica ruperii materialelor), Springer Verlag, Wien, 1982, 369 p., 240 fig., 191 indicaţii bibliografice.

Cele zece lucrări cuprinse în volumul de faţă au fost prezentate în cadrul unui seminar organizat la Universitatea Tehnică din Viena, analiza unor probleme de mecanica ruperii materialelor (MRM) reprezentînd un domeniu important de aplicare a metodei elementelor finite (MEF). Printre cei 13 specialişti ce au contribuit cu comunicări s-au aflat Rossmanith şi Mang (Austria), Kordisch şi Schmitt (R.F.G.), Cedolin şi Gambarova (Italia) şi Gallagher şi Bazant (S.U.A.).

După o prezentare a bazelor MRM şi MEF, cartea urmăreşte cele două direcţii principale de dezvoltare actuală a MRM ; modelarea singularităţilor la extremităţile fisurilor şi studiul materialelor compozite de tip beton armat.

Prima lucrare „Introducere în mecanica ruperii" prezintă bazele variantei inginereşti a acestei discipline, de la definirea factorului de intensitate al tensiunii pînă la controlul ruperii şi analiza pagubelor. O prezentare mai detaliată se găseşte în volumul „Grundlagen der Bruchmechanik" (Bazele mecanicii ruperii materialelor) Springer Verlag, Wien, 1982, editat de acelaşi autor. Expunerea „Introducere în metoda elementelor finite" pregăteşte lucrarea următoare „Elementele finite în mecanica ruperii materialelor" ce se ocupă în principal de studiul cîmpului de tensiuni la extremităţile fisurilor şi a caracteristicilor acestuia atît cu elemente finite obişnuite cît şi cu elemente finite speciale avînd singularităţi.

Un studiu amplu se referă la „Structuri cu fisuri sub tensiuni normale şi tangenţiale", la care pentru descrierea ruperii se introduce o combinaţie a coeficienţilor K_I şi K_{II} ; se fac comparaţii cu rezultate experimentale şi se propun procedee de calcul cu elemente finite. În lucrarea „Mecanica ruperii plăcilor plane şi curbe" sînt tratate şaibe şi dale cu una sau mai multe fisuri, dale sandwich şi dale pe mediu elastic sub acţiuni statice şi dinamice, cît şi cupole respectiv plăci cilindrice subţiri. Studiul „Cercetări numerice pe epruvete" scoate în evidenţă importanţa modelării corecte în analizele numerice, aplicabilitatea MEF în probleme neelastice şi faptul că în multe situaţii o discretizare tridimensională grosieră este mai avantajoasă decît una bidimensională fină.

Contribuţia „Calcule de mecanica ruperii pentru îmbinări bulonate şi sudate" tratează două probleme caracteristice pentru construcţia de maşini şi pentru construcţiile metalice ş.a. : influenţa unui defect de sudură asupra capacităţii portante a îmbinării şi determinarea duratei de viaţă a unei îmbinări bulonate sub acţiuni ciclice. Lucrarea „Comportarea defectelor din fontă şi oţel laminat" propune trei modele de defecte într-o şaibă supusă la întindere şi studiază, cu ajutorul MEF, comportarea acesteia pînă la cedarea casantă respectiv ductilă, rezultînd concluzii importante pentru dimensionare.

Studiul „Mecanica ruperii betonului armat" se concentrează asupra a două grupe de probleme : obiectivizarea criteriilor utilizate în MEF pentru urmărirea propagării fisurilor în beton şi luarea în considerare a conclucrării între beton şi armătură. În acest scop se extinde de la betonul simplu la cel armat un criteriu energetic pentru benzi formate din fisuri „distribuite". Rezultatele teoretice concordă bine cu valori obţinute experimental. Subiectul ultimei

lucrări „Calculul capacității portante a șaibelor, dalelor și plăcilor curbe din beton armat" diferă de temele tratate obișnuit în mecanica ruperii. Nu se studiază propagarea unei fisuri ci apariția și evoluția fisurilor în structuri din beton armat utilizîndu-se pentru dale și plăci curbe cilindrice un model stratificat.

Volumul de față constituie o prezentare la zi a principalelor probleme fundamentale și aplicative privind utilizarea metodei elementelor finite în mecanica ruperii materialelor. Aceasta este solicitată din ce în ce mai frecvent pentru completarea rezistenței materialelor în vederea dimensionării și verificării elementelor și structurilor din principalele materiale folosite în construcția de mașini și în construcții. Se pun în evidență și probleme ce nu și-au găsit încă rezolvări mulțumitoare și se dau sugestii pentru abordarea lor. În concluzie, cartea recenzată este deosebit de valoroasă, actuală și utilă specialiștilor din domeniul mecanicii solidelor.

R. Friedrich

L. KOLLÁR, E. DULÁCSKA, *Buckling of Shells for Engineers* (Flambajul plăcilor curbe subțiri pentru ingineri), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1984, 303 p., 178 fig., 8 tab., 318 referințe bibliografice.

Cartea de față reprezintă o ediție revăzută și mult adăugită a versiunii originale în limba maghiară și a traducerii ei în limba germană, ambele apărute în anul 1973.

Autorii au plecat de la ideea că „progresul în orice ramură a științei poate fi demonstrat poate cel mai bine dacă un volum de cunoștințe care, înainte, era complicat de analizat poate fi tratat în prezent pe o cale mult mai simplă. Lucrarea de față își propune să ilustreze acest principiu într-un domeniu particular : ea își propune să sintetizeze problemele flambajului plăcilor curbe subțiri într-un mod ușor de înțeles, în așa fel încît să poată fi utilizată imediat în practică".

În capitolul introductiv sînt definite cazurile caracteristice de comportare postcritică în reprezentare grafică forță-deplasare.

Capitolul al doilea tratează flambajul plăcilor subțiri cilindrice pentru următoarele cazuri de solicitare : compresiune axială, încovoiere, presiune hidrostatică, torsiune, combinații de încărcări. După prezentarea teoriei liniare, care duce la valori ale parametrilor critici mult superioare datelor experimentale, se prezintă diferite soluții aproximative bazate pe teoria neliniară. În cazul solicitărilor compuse sînt date grafice conținînd curbe de interacțiune.

Capitolul al 3-lea se referă la flambajul plăcilor subțiri conice, respectiv trunchi de con. Datorită asemănării cu plăcile cilindrice închise sînt prezentate rezultate restrînse la calculul unui cilindru echivalent.

Capitolul al 4-lea este intitulat „Stabilitatea plăcilor subțiri sferice și a cupolelor de alte forme". De la început se evidențiază extraordinara împrăștiere a rezultatelor teoretice și experimentale ; apoi se trece la studierea influenței imperfecțiunilor și a condițiilor de rezemare. În ultimul paragraf al capitolului este examinată stabilitatea unor plăci curbe subțiri de tip eliptic.

În capitolul al 5-lea este examinată stabilitatea plăcilor subțiri avînd curba lui Gauss negativă (plăci subțiri hiperbolice), iar în capitolul al 6-lea sînt studiate problemele de stabilitate ale plăcilor curbe subțiri cu margini libere (apropiate ca formă de arce).

Capitolul al 7-lea tratează flambajul plăcilor curbe subțiri ortotrope în teoria liniară (primele șase paragrafe) și studii neliniare și experimentări (paragraful al 7-lea).

Capitolul al 8-lea cuprinde flambajul plăcilor curbe subțiri compozite de tipul : plăci sandwich, plăci cu nervuri de rigidizare, plăci reticulate (într-un singur strat și planare), plăci ondulate și cutate.

Capitolul al 9-lea intitulat „Aplicarea practică a rezultatelor teoriei stabilității" abordează aspecte indispensabile utilizarii cunoștințelor din capitolele precedente. Astfel, în primul paragraf (§9.1) sînt enumerați factorii influențînd încărcările critice ; urmează (§9.2) „Imperfecțiunile inițiale și excentricitatea efortului normal", care trebuie să fie luate în considerare ; (§9.3) „Determinarea aproximativă a limitei superioare a încărcărilor critice ale plăcilor curbe subțiri comprimate excentric" ; (§9.4) „Efectul plasticității" ; (§9.5) „Influența fluajului" ; (§9.6) „Problemele plăcilor de metal" ; (§9.7 — 9.8) Problemele plăcilor confecționate din ma-

teriale plastice, lemn și beton armat" ; (§9.9) „Determinarea încărcărilor critice cu ajutorul încercărilor pe modele și prin măsurători pe structuri executate" ; (§9.10) „Coeficientul de siguranță".

Ultimul capitol (10) dezvoltă două aplicații ; calculul la stabilitate al unui turn de răcire cilindric reticulat și cel al unei cupole de beton armat.

Lucrarea este bine concepută, trecînd în revistă toate problemele practice care se pun inginerului proiectant și, prin aceasta, răspunzînd scopului propus de autori. Cartea cuprinde o foarte bogată bibliografie care poate fi o sursă suplimentară de documentare pentru cercetătorul interesat.

Ea se adresează unui cerc foarte larg de cititori interesați de problemele de instabilitate elastică a plăcilor curbe subțiri, predominînd rezultatele și interpretarea lor, mai degrabă. decît aparatul matematic complicat necesar studierii fenomenului.

M. V. Soare

MIRCEA V. SOARE, *Structuri discrete și structuri continue în mecanica construcțiilor*, Edit. Academiei, 1986, București, 376 p., 124 fig., 28 tab.

Volumul, apărut recent în seria de monografii „Probleme actuale în mecanica solidelor", reprezintă o sinteză atît în domeniul modelării matematice, cu ajutorul ecuațiilor cu diferențe, a structurilor discrete „modulate", cît și în cel al trecerii de la aceste structuri la mediul continuu echivalent, prin aplicarea ecuațiilor diferențiale corespunzătoare.

Lucrarea este structurată în trei părți, incluzînd în total 19 capitole, în care este tratată o mare diversitate de probleme.

În partea I (Probleme liniare) a lucrării, cea mai extinsă, după preliminariile matematice (cap. 1), se prezintă în capitolele 2—5 o serie de probleme particulare, care conduc la ecuații cu diferențe, cu trei termeni, aplicabile la rezolvarea diferitelor tipuri de structuri sau elemente structurale (grinda continuă pe reazeme fixe, solidarizări la lunecare, plăci subțiri prismatice, grinzi cu zăbrele cu diagonale încrucișate, bare drepte cu pereți subțiri cu profil închis sau deschis, bare cu profil închis multiplu conexe, ansamble spațiale la structuri de poduri etc).

Sînt tratate în continuare și alte tipuri de structuri la care sînt aplicabile ecuațiile cu diferențe : grinda continuă pe reazeme elastice (cap. 6), grinzile cu zăbrele plane (cap. 7), structuri spațiale reticulate planare (pătrată simplă precum și cea pătrată diagonală, cap. 8), grinzile Vierendeel, cadrele — scară, cadrul multietajat cu o deschidere (cap. 9), cadrele plane cu un nivel precum și cele multietajate proporționale (cap. 10), cadrele tip shed (cap. 11), structuri cu diafragme (cap. 12), cadrele spațiale cu simetrie ciclică (cap. 13).

Prin trecerea de la structura discretă la cea continuă se obțin soluții, pe baza unor modelări globale, care aproximează în bune condiții pe cele rezultate din modelările locale (discrete).

În partea a II-a (Metoda separării variabilelor) se prezintă teoria încovoierii plăcilor subțiri prismatice cu diferite moduri de rezemare la capete pe timpane (cap. 14) precum și rezolvarea plăcilor ortotrope rectangulare (cap. 15).

Partea a III-a (Probleme de valori proprii) tratează flambajul grinzilor continue pe reazeme fixe (cap. 16), al barelor-cadru (cap. 17) și al grinzilor cu zăbrele (cap. 18). Volumul se încheie cu aplicații ale ecuațiilor cu diferențe în problemele de vibrații proprii ale grinzilor continue (cap. 19).

Expunerea teoretică este completată cu tabele și aplicații numerice sugestive, iar bibliografia citată include și numeroase contribuții originale ale autorului, cunoscut, în țară și străinătate, ca avînd o îndelungată activitate în acest domeniu.

Lucrarea, cu un conținut valoros, sub aspect teoretic și practic, se remarcă atît prin sistematizarea într-o formă unitară, a unui material deosebit de bogat, cît și prin prezentarea clară și concisă a întregii expuneri, constituind, sub aspectul sintezei, o noutate și totodată un succes editorial de excepție și se adresează, în egală măsură, cadrelor din învățămînt, cercetare și proiectare, cu preocupări în domeniul mecanicii construcțiilor.

D. Anastasescu

GHEORGHE SILAȘ, LIVIU BRÎNDEU, *Sisteme vibropercutante*, Edit. Tehnică, 1986, București

La catedra de Mecanică și Rezistența materialelor din Institutul Politehnic „Traian Vuia" — Timișoara se desfășoară de multă vreme cercetări în domeniul vibrațiilor și al vibropercuțiilor. Prin lucrările teoretice elaborate în cadrul colectivului acestei catedre s-au adus perfecționări metodelor de studiu și s-au elaborat metode noi, obținîndu-se simplificarea calculelor dar și punerea în evidență a unor noi proprietăți pe care le are mișcarea în sistemele vibratorii sau vibropercutante. Folosind o bază tehnico-materială modernă, cercetătorii catedrei menționate au efectuat studii experimentale complexe de vibrații vibropercuții, atît în laborator, cît și pe mecanisme și utilaje reale din diferite unități economice.

Monografia „Sisteme vibropercutante" reprezintă o sinteză a lucrărilor publicate de-a lungul anilor de profesorii Gheorghe Silaș și Liviu Brîndeu și, în același timp, a celor mai importante rezultate obținute pe plan mondial, cu privire la studiul vibrațiilor în condiții speciale și al vibropercuțiilor ; bibliografia cuprinde aproape 450 lucrări dintre care circa 80 elaborate de profesorii menționați. Ea constituie o fundamentare teoretică a problemelor care intervin în studiul sistemelor vibratorii și vibropercutante. Se remarcă profunzimea investigațiilor prezentate în lucrare, precum și volumul mare pe care îl au contribuțiile originale ale autorilor, metodele elaborate de către aceștia. De altfel, autorii monografiei au prioritate în țara noastră în domeniul cercetărilor teoretice și aplicative ale vibropercuțiilor. Rezultatele studiilor și cercetărilor lor stau la baza unor tehnologii de înaltă eficiență în domeniul construcțiilor de mașini.

Lucrarea constituie o bază teoretică importantă pentru perfecționarea studiilor fundamentale și aplicative din domeniul sistemelor vibropercutante, cu posibilități largi de utilizare în domeniul construcțiilor de mașini.

Gh. Buzdugan și I. Mincă

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 46, nr. 4 iulie—august 1987

SUMAR

STUDII

E. SOÓS, Condiţii de salt în electrodinamica corpurilor continue, mobile şi deformabile. II. Confruntarea teorie — experiment 299

N. MARCOV, Mişcări fluide în jurul unor profile simetrice 308

V. HANDRA-LUCA, M. C. BRIŞAN, Sinteza geometrică a mecanismelor cu oscilaţii reglabile 313

B. PLOSCEANU, R. C. BOGDAN, Transmisii mecanice diferenţiale cu variator la ieşire 323

I. MARŢIAN, Plăci plane circulare cu deformaţii mari supuse acţiunii unei variaţii de temperatură 331

M. V. SOARE, N. RĂDUICĂ, O comparaţie a eficienţei structurale a unor cupole reticulate 352

I. JELEV, Calculul amortizării oscilaţiilor de debit şi presiune în fenomenul de şoc hidraulic 362

GH. ZECHERU, GH. DRĂGHICI, AL. POPA, Simularea numerică a funcţionării cleştilor multidimensionali pentru foraj-extracţie. II. 378

NOTE

A. PAVEL, Forma practică a condiţiei de stabilitate, corespunzătoare structurilor de tip recipient, conductă sau coloană tubulară 394

IN MEMORIAM 400

RECENZII 403

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Articolele, originale și de înalt nivel științific, vor fi redactate într-un stil concis, evitîndu-se introducerile foarte lungi. Articolele vor fi dactilografiate la două rînduri, pe hîrtie albă de bună calitate, în două exemplare. Prima pagină trebuie să conțină titlul lucrării, numele autorului (autorilor) și locul de muncă precum și un rezumat de cel mult 150 cuvinte. Toate datele științifice și tehnice prezentate trebuie formulate în unități S I. Formulele trebuie dactilografiate sau scrise cu cerneală, clar și indicîndu-se caracterul literelor (aldine, italice etc.). Indicii inferiori și superiori trebuie indicați clar, pentru evitarea confuziilor. Ca semn zecimal se va utiliza virgula. Tabelele vor fi dactilografiate pe foi separate, cu indicarea titlurilor și cu numerotarea cu cifre arabe. Desenele și diagramele trebuie executate în tuș, pe hîrtie de calc, la dimensiuni aproximativ duble față de acelea finale și cu litere scrise cu îngrijire și suficient de mari pentru a fi vizibile după reproducere. Referințele bibliografice vor fi menționate, pe cît posibil, în ordine alfabetică, la sfîrșitul articolului. În text vor fi indicate prin numărul din lista referințelor, în paranteze drepte.

Referințele din reviste vor conține inițiala și numele autorului (autorilor), titlul articolului (subliniat cu o linie), numele revistei (prescurtat conform uzanțelor internaționale), numărul volumului (subliniat dublu), numărul fasciculei și anul de apariție în paranteză, de exemplu :

1. S. AIZICOVICI, C. FETECĂU, Existence of Couette flows in second grade fluids, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl. 31 5 (1986).

Referirea la o carte se face indicînd inițiala și numele autorului (autorilor), titlul cărții (subliniat cu o linie), editura, orașul, anul apariției și numerele paginilor, dacă referirea se face la o parte a cărții, de exemplu :

3. W. FLÜGGE, Tensor Analysis and Continuum Mechanics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972, p. 93—99.

Manuscrisele vor fi trimise la adresa : 79717 București 22, Calea Victoriei, 125.

CONDIȚII DE SALT ÎN ELECTRODINAMICA CORPURILOR CONTINUE, MOBILE ȘI DEFORMABILE. II. CONFRUNTAREA TEORIE–EXPERIMENT*

de E. SOÓS
INCREST, București

8. CONFRUNTAREA CELOR TREI TEORII CU EXPERIMENTUL LUI ROWLAND

Idealizînd situația reală, presupunem că armăturile condensatorului sînt modelate prin două suprafețe singulare plane, Σ_1 și Σ_2. În acest mod evităm dificila problemă a efectelor de contur. Soluția obținută va exprima valorile reale ale cîmpurilor numai la distanțe suficient de mari de marginile condensatorului și de axa de rotație a instalației. Alegem originea O a unui sistem cartezian ortogonal de coordonate $(O, \mathbf{e}_i)$ sau (O, x_i) în planul median al condensatorului, axa Ox_3 fiind dirijată în lungul axei de rotație. Ca reflectare a idealizării vom avea $-\infty < x_1, x_2 < \infty$. Fie h distanța dintre armături. Cu notațiile introduse vom avea: domeniul $V^+(-h/2 < x_3 < h/2)$ ocupat de izolator; planele $\Sigma_1(x_3 = -h/2)$ și $\Sigma_2(x_3 = h/2)$ ocupate de armături; domeniile $V_1^-(x_3 < -h/2)$ și $V_2^-(x_3 > h/2)$ ocupate de aer.

Presupunem că izolatorul și aerul sînt neconductori; deci

$$\sigma = 0 \text{ în } V^+ \cup V^-, \quad V^- = V_1^- \cup V_2^-. \tag{8.1}$$

Din (8.1), pe baza ecuațiilor constitutive (2.11), (3.10), respectiv (4.13), rezultă

$$\mathring{\mathbf{J}} = \mathbf{0} \text{ în } V^+ \cup V^-. \tag{8.2}$$

Admitem că în izolator și în aer nu există sarcini electrice libere; deci

$$\mathring{\rho} = 0 \text{ în } V^+ \cup V^-. \tag{8.3}$$

Acum, din (8.2) și (8.3), pe baza relațiilor de transformare (4.18), valabile în cadrul teoriei lui Minkowski, la viteze „mici", deducem:

$$\rho = 0, \ \mathbf{J} = \mathbf{0} \text{ în } V^+ \cup V^-. \tag{8.4}$$

---

* Bibliografia a apărut la partea I, în ST. CERC. MEC. APL., TOM 46, NR. 3.

Vom aproxima aerul cu vidul; în consecință,

$$\varepsilon = \mu = 1 \text{ în } V^-. \tag{8.5}$$

Presupunem că aerul ce înconjoară condensatorul se află în repaus relativ la reperul inerțial Pămînt; adică

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ în } V^-. \tag{8.6}$$

În acest caz, din ecuațiile constitutive (2.11) în cadrul teoriei lui Hertz găsim

$$\mathring{\mathbf{D}} = \mathring{\mathbf{E}}, \quad \mathring{\mathbf{H}} = \mathring{\mathbf{B}} \text{ în } V^-; \tag{8.7}$$

pe baza relațiilor (3.1) și a ecuațiilor constitutive (3.10) în cadrul teoriei lui Lorentz obținem

$$\hat{\mathbf{D}} = \overset{*}{\mathbf{E}}, \quad \hat{\mathbf{H}} = \overset{*}{\mathbf{B}} \text{ în } V^-; \tag{8.8}$$

în fine, folosind ecuațiile constitutive (4.16) în cadrul teoriei lui Minkowski conchidem

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} \text{ în } V^-. \tag{8.9}$$

Ținînd seama de faptul că izolatorul este nemagnetizabil, electric polarizabil, vom avea

$$\varepsilon = \text{const} > 1, \ \mu = 1 \text{ în } V^+. \tag{8.10}$$

Relațiile (8.1) — (8.10) sînt valabile în toate cazurile care vor fi analizate.

Admitem că armăturile, izolatorul sau condensatorul se rotesc cu viteza unghiulară constantă ω; de aici conchidem că fenomenele studiate sînt staționare. Prin urmare, toate cîmpurile sînt independente de variabila temporală t.

Ca și experimentele clasice, analiza teoretică are două etape:

a) În prima etapă presupunem că densitățile superficiale de sarcină electrică sînt nenule, date pe armăturile condensatorului; deci

$$\mathring{\gamma} = \tilde{\gamma} \text{ pe } \Sigma_2, \ \mathring{\gamma} = -\tilde{\gamma} \text{ pe } \Sigma_1, \ \tilde{\gamma} = \text{const} > 0. \tag{8.11}$$

În schimb, densitatea superficială a curentului de conducție este nulă pe armături, adică

$$\mathring{\mathbf{i}} = \mathbf{0} \text{ pe } \Sigma_1 \cup \Sigma_2. \tag{8.12}$$

În acest caz vom determina cîmpul electromagnetic care satisface ecuațiile diferențiale de cîmp în $V^+ \cup V^-$ și condițiile de salt pe $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

Vom constata în fiecare caz — în acord cu experimentul — existența unui cîmp magnetic nenul în domeniul V^-.

b) În etapa a doua presupunem că instalația este în repaus relativ la reperul Pămînt, deci

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ în } V^+ \cup V^-, \ \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ pe } \Sigma_1 \cup \Sigma_2. \tag{8.13}$$

Vom admite, de asemenea, că armăturile condensatorului sînt încărcate, în acord cu relațiile (8.11). Presupunem totodată că valorile cîmpului electric și magnetic sînt cele prezise de teorie și obținute pe baza procedeului indicat la etapa a). În această situație, prin utilizarea condițiilor de salt vom determina intensitatea curentului superficial de conducție necesar producerii cîmpului magnetic determinat în prima etapă. Valoarea teoretică, $\mathring{\mathbf{i}}_T$, prezisă de una sau alta din teoriile analizate, va fi confruntată cu valoarea $\mathring{\mathbf{i}}_E$ determinată experimental în unul sau altul din experimentele clasice. De îndată ce această comparație este efectuată, confruntarea teorie-experiment ia sfîrșit. Totuși, problema confruntării va putea fi considerată ca definitiv rezolvată numai în momentul în care vom dispune de teoreme care — în condiții raționale — vor garanta unicitatea soluției. Din păcate, în prezent electrodinamica nu poate satisface acest deziderat.

În încheierea acestor considerații accentuez încă o dată caracterul limitat al soluțiilor exacte care vor fi obținute. Din cauza idealizării situației reale, soluțiile matematice exacte, sînt, aplicativ, aproximative.

Condițiile specifice experimentului lui Rowland pot fi rezumate astfel:

— armăturile condensatorului se află în rotație uniformă; deci

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} \text{ pe } \Sigma; \tag{8.14}$$

— izolatorul se află în repaus; adică

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ în } V^+. \tag{8.15}$$

În (8.14) și în tot ce urmează cu $\mathbf{w}$ am notat un cîmp de viteze dat în $V^+ \cup V^- \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ și definit prin relația

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}, \ \boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_3, \ \omega = \text{const} > 0. \tag{8.16}$$

A. Teoria lui Hertz

Avînd în vedere relațiile (8.1)—(8.16), pe baza legilor locale de bilanț (2.5)—(2.10), conchidem că în cazul experimentului lui Rowland cîmpurile $\mathring{\mathbf{E}}$, $\mathring{\mathbf{B}}$ trebuie să satisfacă următoarele ecuații diferențiale și condiții de salt:

$$\operatorname{div} \mathring{\mathbf{E}} = 0, \ \operatorname{div} \mathring{\mathbf{B}} = 0, \ \operatorname{rot} \mathring{\mathbf{E}} = 0, \ \operatorname{rot} \mathring{\mathbf{B}} = 0 \text{ pentru } x_3 \neq \pm h/2, \tag{8.17}$$

$$(\varepsilon \mathring{\mathbf{E}}^+ - \mathring{\mathbf{E}}^-) \cdot \mathbf{e}_3 = -\tilde{\gamma}, \quad (\mathring{\mathbf{B}}^+ - \mathring{\mathbf{B}}^-) \cdot \mathbf{e}_3 = 0, \quad (\mathring{\mathbf{E}}^+ - \mathring{\mathbf{E}}^-) \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$$
$$\text{pentru } x_3 = \pm h/2, \tag{8.18}$$

$$(\mathring{\mathbf{B}}^+ - \mathring{\mathbf{B}}^-) \times \mathbf{e}_3 = \frac{1}{c} \tilde{\gamma} \mathbf{w} \text{ pentru } x_3 = \pm h/2. \tag{8.19}$$

La deducerea relațiilor de salt am ținut sema de faptul că

$$\mathbf{v}^+ = \mathbf{v}^- = u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \text{ pentru } x_3 = \pm h/2. \tag{8.20}$$

Pe baza unor considerații de simetrie rezultă, și prin calcul direct se constată, că *o soluție posibilă* a sistemului (8.16)—(8.18) este dată de relațiile

$$\mathring{\mathbf{E}} = -\tilde{E} \mathbf{e}_3 \text{ cu } \tilde{E} = \tilde{\gamma}/\varepsilon, \quad \mathring{\mathbf{B}} = 0 \text{ în } V^+, \tag{8.21}$$

$$\mathring{\mathbf{E}} = \mathbf{0}, \mathring{\mathbf{B}} = -\frac{1}{c} \tilde{\gamma} \mathbf{w} \times \mathbf{e}_3 - \frac{2}{c} \tilde{\gamma} \omega (x_3 + h/2) \mathbf{e}_3 \text{ în } V_1^-, \tag{8.22}$$

$$\mathring{\mathbf{E}} = \mathbf{0}, \mathring{\mathbf{B}} = \frac{1}{c} \tilde{\gamma} \mathbf{w} \times \mathbf{e}_3 - \frac{2}{c} \tilde{\gamma} \omega (x_3 - h/2) \mathbf{e}_3 \text{ în } V_2^-. \tag{8.23}$$

Termenul al doilea în (8.22) și (8.23) trebuie adăugat pentru satisfacerea ecuației diferențiale $(8.17)_2$. Existența și necesitatea acestei corecții sînt total ignorate de tratările uzuale consacrate problemei confruntării teoriei cu experimentul.

Cu obținerea soluției, modelarea primei etape a experimentului ia sfîrșit.

Analiza celei de a doua etape se face făcînd apel la relațiile (8.13). În acest moment cîmpul elctromagnetic este cunoscut, dat de (8.21)—(8.23). Urmărim determinarea densității superficiale a curentului de conducție $\mathring{\mathbf{i}}_T$, corespunzătoare cîmpului obținut în prima etapă. În acest scop facem apel la relația de salt (2.10) și ținem seama de faptul că

$$\mathring{\mathbf{B}}^+ = \mathbf{0}, \quad \mathring{\mathbf{B}}^- = \frac{1}{c} \tilde{\gamma} \mathbf{w} \times \mathbf{e}_3 \text{ pe } \Sigma_2 \tag{8.24}$$

după cum rezultă din $(8.21)_3$ și $(8.23)_2$. Efectuînd calculele obținem:

$$\mathring{\mathbf{i}}_T = \tilde{\gamma} \mathbf{w} = \varepsilon \tilde{E} \mathbf{w}. \tag{8.25}$$

În experimentele clasice diferența de potențial între armăturile condensatorului, deci mărimea $\tilde{E}$, este fixată. Densitatea superficială a curentului de conducție $\mathring{\mathbf{i}}_E$, obținută în experimentul lui Rowland, este dată de relația

$$\mathring{\mathbf{i}}_E = \varepsilon \tilde{E} \mathbf{w}. \tag{8.26}$$

Pe baza rezultatelor obținute (modulo teorema de unicitate!), putem conchide că teoria lui Hertz este în acord calitativ și cantitativ cu rezultatul experimentului lui Rowland.

B. Teoria lui Lorentz

Pe baza relațiilor (8.1)—(8.16), avînd în vedere legile locale de bilanț (3.6)—(3.9), conchidem că în cazul experimentului lui Rowland cîmpurile $(\overset{*}{\mathbf{E}}, \overset{*}{\mathbf{B}})$ trebuie să satisfacă aceleași ecuații diferențiale și condiții de salt ca și cîmpurile hertziene $(\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{B}})$. În consecință, putem afirma că teoria lui Lorentz este în acord calitativ și cantitativ cu rezultatul experimentului lui Rowland (modulo teorema de unicitate). În plus, în acest caz trebuie să admitem că reperul lorentzian privilegiat este identificat (contrar ipotezelor inițiale ale teoriei) cu reperul Pămînt.

C. Teoria lui Minkowski

În experimentele clasice sînt implicate viteze relativ mici. În consecință, vom utiliza teoria minkowskiană în aproximația de ordinul 1. Dacă apelăm din nou la relațiile (8.1)—(8.16) și ținem seama de legile locale de bilanț (4.9)—(4.12), ajungem la concluzia că în cazul experimentului lui Rowland cîmpurile $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ trebuie să satisfacă aceleași ecuații diferențiale și condiții de salt ca și cîmpurile hertziene $(\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{B}})$ sau lorentziene $(\overset{*}{\mathbf{E}}, \overset{*}{\mathbf{B}})$. Prin urmare constatăm că teoria lui Minkowski este în acord calitativ și cantitativ cu rezultatul experimentului lui Rowland (modulo teorema de unicitate). În plus, în acest caz, cîmpurile sînt determinate în reperul inerțial Pămînt, deci inconsecvența logică specifică teoriei lorentziene este eliminată.

9. CONFRUNTAREA CELOR TREI TEORII CU EXPERIMENTUL LUI ROENTGEN

În experimentul lui Roentgen armăturile condensatorului sînt în repaus (relativ la Pămînt) și izolatorul se rotește uniform în jurul axei de simetrie a condensatorului. Relațiile (8.1)—(8.12) continuă să rămînă valabile. Condițiile specifice acestui experiment pot fi rezumate astfel:

— armăturile condensatorului sînt în repaus:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ pe } \Sigma; \tag{9.1}$$

— izolatorul se află în rotație uniformă;

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \text{ în } V^+. \tag{9.2}$$

Aici $\mathbf{w}$ este cîmpul de viteze definit prin relația (8.16).

A. Teoria lui Hertz

Folosind din nou (2.5)—(2.10), (8.1)—(8.12) și (9.1), (9.2), obținem ecuațiile diferențiale și condițiile de salt care trebuie să fie satisfăcute de cîmpurile herteziene (E, B):

$$\operatorname{div}\dot{\mathbf{E}} = 0,\ \operatorname{div}\dot{\mathbf{B}} = 0,\ \operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0},\ \operatorname{rot}\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{0} \text{ pentru } x_3 < -h/2 \text{ și } x_3 > h/2, \tag{9.3}$$

$$\operatorname{div}\dot{\mathbf{E}} = 0,\ \operatorname{div}\dot{\mathbf{B}} = 0,\ \operatorname{rot}(\dot{\mathbf{E}} - \frac{1}{c}\mathbf{w}\times\dot{\mathbf{B}}) = \mathbf{0},\ \operatorname{rot}(\dot{\mathbf{B}} + \frac{1}{c}\mathbf{w}\times\varepsilon\dot{\mathbf{E}}) = \mathbf{0} \text{ pentru } -h/2 < x_3 < h/2, \tag{9.4}$$

$$(\varepsilon\dot{\mathbf{E}}^+ - \dot{\mathbf{E}}^-)\cdot\mathbf{e}_3 = -\tilde{\gamma},\ (\dot{\mathbf{B}}^+ - \dot{\mathbf{B}}^-)\cdot\mathbf{e}_3 = 0,\ (\dot{\mathbf{E}}^+ - \frac{1}{c}\mathbf{w}\times\dot{\mathbf{B}}^+ - \dot{\mathbf{E}}^-)\times\mathbf{e}_3 = \mathbf{0} \text{ pentru } x_3 = \pm h/2, \tag{9.5}$$

$$(\dot{\mathbf{B}}^+ + \frac{1}{c}\mathbf{w}\times\varepsilon\dot{\mathbf{E}}^+ - \dot{\mathbf{B}}^-)\times\mathbf{e}_3 = 0 \text{ pentru } x_3 = \pm h/2. \tag{9.6}$$

O soluție posibilă a acestui sistem de ecuații este dată de următoarele relații:

$$\dot{\mathbf{E}} = -\tilde{E}\,\mathbf{e}_3 \text{ cu } \tilde{E} = \tilde{\gamma}/\varepsilon,\ \dot{\mathbf{B}} = \mathbf{0} \text{ în } V^+, \tag{9.7}$$

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0},\ \dot{\mathbf{B}} = -\frac{1}{c}\tilde{\gamma}\mathbf{w}\times\mathbf{e}_3 + \frac{2}{c}\tilde{\gamma}\omega(x_3 + h/2)\mathbf{e}_3 \text{ în } V_1^-, \tag{9.8}$$

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0},\ \dot{\mathbf{B}} = -\frac{1}{c}\tilde{\gamma}\mathbf{w}\times\mathbf{e}_3 + \frac{2}{c}\tilde{\gamma}\omega(x_3 - h/2)\mathbf{e}_3 \text{ în } V_2^-. \tag{9.9}$$

Pentru tratarea celei de a doua etape a experimentului facem apel la relațiile (8.13). Deoarece conform lui (9.7)—(9.9)

$$\dot{\mathbf{B}}^+ = \mathbf{0},\ \dot{\mathbf{B}}^- = -\frac{1}{c}\tilde{\gamma}\mathbf{w}\times\mathbf{e}_3 \text{ pe } \Sigma_2, \tag{9.10}$$

cu ajutorul relației de salt (2.10) obținem următoarea valoare teoretică a densității curentului superficial de conducție

$$\dot{\mathbf{i}}_T = -\varepsilon\tilde{E}\mathbf{w}. \tag{9.11}$$

Valoarea $\dot{\mathbf{i}}_E$, obținută experimental, este dată de relația

$$\dot{\mathbf{i}}_E = -(\varepsilon - 1)\tilde{E}\mathbf{w}. \tag{9.12}$$

Rezumînd, putem spune că teoria lui Hertz este în acord calitativ, dar în dezacord cantitativ cu fenomenul pus în evidență de experimentul lui Roentgen.

B. Teoria lui Lorentz

Din (3.6)—(3.9), (8.1)—(8.12) și (9.1), (9.2) rezultă că ecuațiile diferențiale și condițiile de salt ce trebuie să fie satisfăcute de cîmpurile lorentziene $(\overset{*}{\mathbf{E}}, \overset{*}{\mathbf{B}})$ au următoarea formă:

$$\operatorname{div} \overset{*}{\mathbf{E}} = 0, \operatorname{div} \overset{*}{\mathbf{B}} = 0, \operatorname{rot} \overset{*}{\mathbf{E}} = \mathbf{0}, \operatorname{rot} \overset{*}{\mathbf{B}} = \mathbf{0} \text{ pentru } x_3 < -h/2 \text{ și } x_3 > h/2, \tag{9.13}$$

$$\operatorname{div} (\varepsilon \overset{*}{\mathbf{E}} + \frac{\varepsilon - 1}{c} \mathbf{w} \times \overset{*}{\mathbf{B}}) = 0, \operatorname{div} \overset{*}{\mathbf{B}} = 0, \operatorname{rot} \overset{*}{\mathbf{E}} = \mathbf{0},$$

$$\operatorname{rot} (\overset{*}{\mathbf{B}} + \frac{\varepsilon - 1}{c} \mathbf{w} \times \overset{*}{\mathbf{E}}) = \mathbf{0} \text{ pentru } -h/2 < x_3 < h/2, \tag{9.14}$$

$$(\varepsilon \overset{*}{\mathbf{E}}^+ + \frac{\varepsilon - 1}{c} \mathbf{w} \times \overset{*}{\mathbf{B}}^+ - \overset{*}{\mathbf{E}}^-) \cdot \mathbf{e}_3 = -\tilde{\gamma}, (\overset{*}{\mathbf{B}}^+ - \overset{*}{\mathbf{B}}^-) \cdot \mathbf{e}_3 = 0,$$

$$(\overset{*}{\mathbf{E}}^+ - \overset{*}{\mathbf{E}}^-) \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ pentru } x_3 = \pm h/2, \tag{9.15}$$

$$(\overset{*}{\mathbf{B}}^+ - \overset{*}{\mathbf{B}}^-) \times \mathbf{e}_3 = \frac{\varepsilon - 1}{c} (\overset{*}{\mathbf{E}}^+ \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{w} \text{ pentru } x_3 = \pm h/2. \tag{9.16}$$

O soluție posibilă a sistemului este dată de următoarele relații:

$$\overset{*}{\mathbf{E}} = -\tilde{E} \mathbf{e}_3 \text{ cu } \tilde{E} = \gamma/\varepsilon, \overset{*}{\mathbf{B}} = \mathbf{0} \text{ în } V^+, \tag{9.17}$$

$$\overset{*}{\mathbf{E}} = \mathbf{0}, \overset{*}{\mathbf{B}} = -\frac{1}{c} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \tilde{\gamma} \mathbf{w} \times \mathbf{e}_3 + \frac{2}{c} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \tilde{\gamma} \omega (x_3 + h/2) \mathbf{e}_3 \text{ în } V_1^-, \tag{9.18}$$

$$\overset{*}{\mathbf{E}} = \mathbf{0}, \overset{*}{\mathbf{B}} = -\frac{1}{c} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \tilde{\gamma} \mathbf{w} \times \mathbf{e}_3 + \frac{2}{c} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \tilde{\gamma} \omega (x_3 - h/2) \mathbf{e}_3 \text{ în } V_2^-. \tag{9.19}$$

Pentru analiza celei de a doua etape a experimentului observăm că din (9.17)—(9.19) rezultă

$$\overset{*}{\mathbf{B}}^+ = \mathbf{0}, \overset{*}{\mathbf{B}}^- = -\frac{1}{c} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \tilde{\gamma} \mathbf{w} \times \mathbf{e}_3 \text{ pe } \Sigma_2. \tag{9.20}$$

În acest mod, pe baza condiției de salt (3.9) și a relațiilor (8.13), obținem următoarea valoare teoretică

$$\overset{*}{\mathbf{i}}_T = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \tilde{\gamma} \mathbf{w} = -(\varepsilon - 1) \tilde{E} \mathbf{w}. \tag{9.21}$$

Comparînd (9.21) cu valoarea experimentală (9.12) conchidem că teoria lui Lorentz este în acord calitativ şi cantitativ cu fenomenul pus în evidenţă de experimentul lui Roentgen. Acordul se obţine din nou, identificînd reperul lorentzian privilegiat cu reperul Pămînt. Prin urmare, inconsistenţa logică semnalată persistă.

C. Teoria lui Minkowski

Pentru modelarea matematică a experimentului trebuie să utilizăm din nou relaţiile (8.1)—(8.12) şi (9.1), (9.2), în combinaţie cu legile locale de bilanţ (4.9)—(4.12), suplimentate atît cu ecuaţiile constitutive (4.16)—(4.17), cît şi cu formulele de transformare (7.8) ale densităţilor superficiale. La capătul analizei putem conchide că perechea minkowskiană ($\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$) trebuie să satisfacă aceleaşi ecuaţii diferenţiale şi relaţii de salt ca şi cea lorentziană ($\overset{*}{\mathbf{E}}$, $\overset{*}{\mathbf{B}}$). În consecinţă, putem afirma că teoria lui Minkowski este în acord calitativ şi cantitativ cu fenomenul specific experimentului lui Roentgen. În plus, inconsecvenţa logică distinctivă a modelului lorentzian nu mai apare, deoarece în cadrul teoriei lui Minkowski este permisă utilizarea oricărui reper inerţial.

10. CONFRUNTAREA CELOR TREI TEORII CU EXPERIMENTUL LUI EICHENWALD

În experimentul lui Eichenwald condensatorul încărcat se roteşte în jurul axei sale de simetrie cu viteză unghiulară constantă. Relaţiile (8.1)—(8.12) rămîn valabile. Condiţiile specifice ale experimentului sînt caracterizate de :

— armăturile condensatorului se află în rotaţie uniformă; deci

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} \text{ pe } \Sigma_1 \cup \Sigma_2 ; \tag{10.1}$$

— izolatorul se roteşte solidar cu condensatorul; adică

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \text{ în } V^+. \tag{10.2}$$

Ca şi mai înainte, $\mathbf{w}$ este cîmpul de viteze definit prin relaţia (2.16).

A. Teoria lui Hertz

În vederea obţinerii valorii teoretice $\mathring{\mathbf{i}}_T$ se poate aplica principiul suprapunerii efectelor. Procedînd în acest mod, din (8.25) şi (9.11) obţinem

$$\mathring{\mathbf{i}}_T = \mathbf{0}. \tag{10.3}$$

Valoarea pusă în evidenţă experimental de Eichenwald este dată de relaţia

$$\mathring{\mathbf{i}}_E = \tilde{E}\,\mathbf{w}, \tag{10.4}$$

$\tilde{E}$ fiind intensitatea electrică impusă în experiment prin fixarea diferenței de potențial existent între armături.

Rezumînd analiza putem conchide că teoria lui Hertz este în dezacord calitativ și cantitativ cu fenomenul constatat experimental de Eichenwald.

B. Teoria lui Lorentz

Aplicînd din nou principiul suprapunerii efectelor, din (8.25) și (9.21) deducem

$$\mathring{\mathbf{i}}_T = \tilde{E}\,\mathbf{w}. \tag{10.5}$$

Comparînd (10.4) cu (10.5) putem afirma că teoria lui Lorentz este în acord calitativ și cantitativ cu determinările experimentale ale lui Eichenwald. Ca întotdeauna, prețul acordului este inconsistența logică ce decurge din identificarea reperului lorentzian privilegiat cu reperul inerțial Pămînt.

C. Teoria lui Minkowski

Făcînd apel din nou la principiul suprapunerii efectelor, pe baza celor de mai sus putem afirma că teoria lui Minkowski este în acord calitativ și cantitativ cu fenomenul pus în evidență de Eichenwald. În plus, modelul relativist minkowskian elimină inconsistența logică inerentă teoriei lorentziene.

Primit la redacție la 6 decembrie 1986

MIȘCĂRI FLUIDE ÎN JURUL UNOR PROFILE SIMETRICE

de N. MARCOV

Universitatea din București

Particulele unui fluid incompresibil se deplasează în prezența unui profil plan simetric semiinfinit. Ecuațiile bordului de impact al profilului depind de un parametru real $a > 1$ și ele sînt specificate în formulele (21). Potențialul complex $f(z)$ al mișcării fluide este precizat sub formă parametrică în formulele (5) și (9) prin intermediul vitezei complexe w. Formulele (10) și (11) permit calculul vitezei particulelor fluide aflate pe profil. Figurile doi și trei arată corespondența dintre forma bordului de impact al profilului și graficul coeficientului de presiune pe profil.

Soluția propusă de H. Blasius pentru problema mișcării laminare a unui curent uniform de fluid incompresibil în prezența unei plăci plane așezată paralel cu direcția curentului la mari distanțe, are o importanță deosebită pentru teoria stratului limită [1, 2, 3, 4]. Această soluție este dedusă în ipoteza că placa plană are grosime zero, iar coeficientul de presiune pe placă este nul. Din punct de vedere experimental nu se poate realiza un profil subțire cu grosimea zero. Testele efectuate în tunelul aerodinamic EOLIN 350 CE 5V arată că în vecinătatea bordului de atac al unui profil fizic subțire are loc o scădere sensibilă a presiunii statice în raport cu presiunea statică din camera de experiențe, altfel spus coeficientul de presiune nu verifică ipoteza teoretică de a se anula la frontierea stratului limită în vecinătatea bordului de atac al unui profil plan subțire. Se pune astfel problema alegerii unei forme a bordului de atac pentru care valoarea minimă a coeficientului de presiune să fie apropiată de zero. Pe de altă parte este dificil să se caracterizeze numeric prin măsurători experimentale forma bordului unui profil fizic subțire. Prin urmare se impune considerarea unei clase de profile care să furnizeze un profil teoretic apropiat de un profil fizic dat. Criteriul de apropiere între aceste profile subțiri l-ar constitui coincidența valorilor minime ale coeficienților de presiune teoretic, respectiv experimental. În continuare se precizează o clasă de profile subțiri pentru care coeficientul de presiune are valoarea minimă, $1 - a^2$ cu $a > 1$.

Se consideră mișcarea plană potențială [5, 6, 7] a unui fluid incompresibil în jurul unei plăci simetrice cu grosimea adimensională 2π. La mari distanțe de bordul de atac al plăcii semiinfinite, particulele fluide au o aceeași viteză de mărime adimensională 1 și paralelă cu axa de simetrie a plăcii. Viteza maximă pe placă are valoarea $a > 1$.

Se alege ca domeniu D a variației vitezei complexe w, un disc de diametru a, cu o tăietură pe segmentul I al axei reale,

$$D = \{w = u - iv \in \mathbb{C} \mid |w - a/2| < a/2\} \setminus I, \; I = [1, a) \qquad (1)$$

Frontiera acestui domeniu este reuniunea segmentului I cu cercul C,

$$C = \{w \in \mathbb{C} \mid (w - a/2)(\bar{w} - a/2) = a^2/4\}. \qquad (2)$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 46, NR. 4, 1987, P. 308–312

Ecuația ce definește acest cerc poate fi retranscrisă sub forma

$$\bar{w} = w^*(w), \tag{3}$$

unde funcția $w^* : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ este definită prin egalitatea următoare :

$$w^* = aw/(2w - a). \tag{4}$$

Funcția potențial complex $f : (\bar{D} \setminus \{1\}) \to \mathbb{C}$ este definită prin egalitatea

$$f = \varphi + i\psi = \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-1} + 2 =$$

$$= \frac{w}{w-1} + \frac{aw}{(a-2)w + a} = \frac{2(a-1)w^2}{(a-2)w^2 + 2w - a}. \tag{5}$$

Partea imaginară a acestei funcții sau funcția de curent ψ se anulează în punctele cercului C și segmentelor $[0,1)$ și $(1,a]$.

$$w \in C \Rightarrow w^* = \bar{w} \Rightarrow f = 1/(w-1) + 1/(\bar{w} - 1) + 2 \Rightarrow f = \bar{f} \Rightarrow \psi = 0,$$

$$w \in [0,1) \cup (1,a] \Rightarrow \bar{w} = w \Rightarrow \overline{f(w)} = f(\bar{w}) = f(w) \Rightarrow \psi = 0. \tag{6}$$

În figura următoare se arată domeniul D al variabilei hodrografice $w = u - iv$.

Coordonata complexă $z = x + iy$ a particulei fluide având viteza complexă w și potențialul complex f, se obține pe baza definiției vitezei complexe [5, 6].

$$w = df/dz. \tag{7}$$

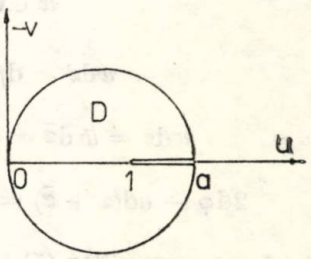


Fig. 1

Prin urmare funcția $z : (\bar{D} \setminus \bar{I}) \to \mathbb{C}$ este dată de relațiile următoare :

$$z = \int_0^w \frac{df}{w} = \frac{f}{w} + \int_0^w \frac{f}{w^2}\,dw = \frac{f}{w} + \int_0^w \left(\frac{1}{w-1} - \frac{a-2}{(a-2)w + a}\right) dw, \tag{8}$$

$$z = x + iy = \frac{1}{w-1} + \frac{a}{(a-2)w + a} + \ln(1-w) -$$

$$- \ln(1 + (1 - 2/a)w). \tag{9}$$

În particular,

$$V \in [0,1),\ w = V \Rightarrow z = x,$$

$$x = \frac{1}{V-1} + \ln(1-V) + \frac{a}{(a-2)V + a} - \ln(1 + (1 - 2/a)V). \tag{10}$$

Pentru punctele segmentului $(1, a]$ se obţin următoarele valori limită din semiplanul superior, respectiv din semiplanul inferior.

$$V \in (1,\ a],\ w = V \pm 0\mathrm{i} \Rightarrow z = x \pm \pi\mathrm{i},$$

$$x = \frac{1}{V-1} + \ln(1-V) + \frac{a}{(a-2)V + a} - ln(1 + (1 - 2/\mathrm{a})V). \tag{11}$$

Mulţimea acestor valori limită reprezintă două semidrepte paralele care definesc profilul plan simetric în jurul căruia se deplasează particulele fluide. Bordul de atac al profilului este constituit de imaginea prin aplicaţia (9) a cercului (2).

Propoziţia 1. Restricţiile potenţialului real φ şi a funcţiei de curent ψ la bordul profilului au valorile următoare:

$$\varphi = ax,\ \psi = 0\ \forall z = x + \mathrm{i}y \in G = z(C). \tag{12}$$

Într-adevăr, conform relaţiilor (6), (7) şi (3) obţinem succesiv

$$w \in \mathrm{C} \Rightarrow \psi = 0 \Rightarrow \mathrm{d}\psi = 0\ \forall z \in G,$$

$$w\mathrm{d}z = \mathrm{d}f = \mathrm{d}\varphi + \mathrm{i}\mathrm{d}\psi = \mathrm{d}\varphi = \overline{\mathrm{d}\varphi} = \overline{w}\mathrm{d}\bar{z},$$

$$w\mathrm{d}z = \bar{w}\,\mathrm{d}\bar{z} = aw\,\mathrm{d}\bar{z}/(2w - a) \Rightarrow (2w - a)\mathrm{d}z = a\mathrm{d}\bar{z} \Rightarrow$$

$$2\mathrm{d}\varphi - a\mathrm{d}(z + \bar{z}) = 0 \Rightarrow \mathrm{d}(\varphi - ax) = 0 \Rightarrow \varphi - ax = \text{constant}.$$

Conform expresiilor (5) şi (9), atît funcţia f cît şi z se anulează în punctul $w = 0 \in C$. Prin urmare constanta precedentă are valoarea zero.

Relaţiile de legătură între componentele reale u şi v ale particulei fluide, potenţialul real φ şi funcţia de curent ψ se obţin din egalitatea (7).

$$u = \partial\varphi/\partial x = \partial\psi/\partial y, \qquad v = \partial\varphi/\partial y = -\partial\psi/\partial x. \tag{13}$$

Notăm

$$V^2 = u^2 + v^2. \tag{14}$$

Ecuaţia cercului C precizată în formula (2) poate fi retranscrisă sub forma

$$au = V^2, \qquad \forall z \in G. \tag{15}$$

Propoziția 2. Mărimea V a vitezei unei particule fluide aflate pe bordul profilului, avînd abscisa x, are valoarea

$$V^2 = \frac{a^2 x}{2(a-1) - a(a-2)x}, \qquad \forall\, x \in \left[0, \frac{2}{a-1}\right]. \tag{16}$$

Într-adevăr, conform formulelor (6), (14) și (15), în punctele cercului C avem

$$\varphi = \frac{1}{u - iv - 1} + \frac{1}{u + iv - 1} + 2 = \frac{2u - 2}{(u-1)^2 + v^2} + 2 = \frac{2V^2 - 2u}{V^2 - 2u + 1}. \tag{17}$$

Substituind pe φ și u conform relațiilor (12) și (15) rezultă că în punctele bordului de atac al profilului avem egalitatea

$$ax = \frac{2V^2(1 - 1/a)}{V^2(1 - 2/a) + 1}, \qquad \forall\, V \in [0,\ a]. \tag{18}$$

Inversînd această funcție se obține formula (16).

Lemă. Ecuația diferențială a bordului profilului este dată de egalitățile următoare :

$$y(0) = 0,\ (dy/dx)^2 = 2(a-1)/x - (a-1)^2, \qquad \forall\, x \in \left(0, \frac{2}{a-1}\right]. \tag{19}$$

Într-adevăr, derivînd funcțiile compuse din formulele (12), obținem succesiv

$$u + v\,dy/dx = a,\ -v + u\,dy/dx = 0,\ (u^2 + v^2)[1 + (dy/dx)^2] = a^2.$$

Aplicînd formulele (14) și (16), rezultă

$$(dy/dx)^2 = a^2/V^2 - 1 = 2(a-1)/x - a(a-2) - 1. \tag{20}$$

Soluția ecuației diferențiale (18) este specificată parametric.

Propoziția 3. Ecuațiile parametrice ale bordului profilului simetric sînt următoarele :

$$x = (1 - \cos\theta)/(a-1), \qquad y = \theta + \sin\theta, \qquad \forall\, \theta \in [-\pi, \pi]. \tag{21}$$

În figura 2 se precizează forma profilului pentru cazurile particulare $a=2$, $a=1{,}5$, respectiv $a = 1{,}2$. Profilul fiind simetric, se consideră numai punctele situate în semiplanul superior $y \geqslant 0$.

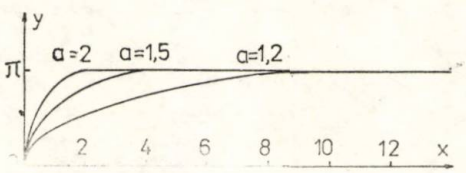


Fig. 2

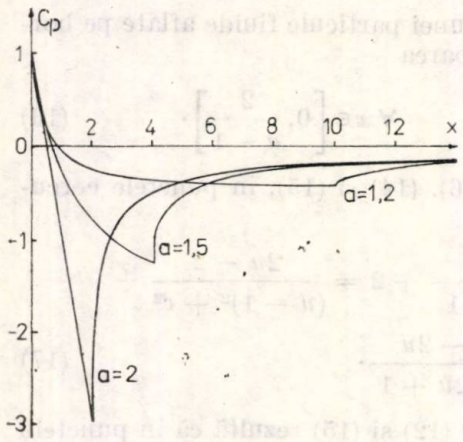


Fig. 2

Coeficientul de presiune corespunzător acestor forme ale profilului,

$$C_p = 1 - V^2, \qquad (22)$$

este definit pentru variabile adimensionale și se poate calcula pe baza formulelor (16) și (11).

În figura 3 se arată graficele coeficientului de presiune pentru mișcarea fluidului perfect incompresibil în jurul profilelor precizate în figura 2, funcție de abscisa x a punctelor profilelor.

Primit la redacție la 30 ianuarie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. ȘT. N. SĂVULESCU, *Tranziția de la scurgerea laminară la cea turbulentă*, Edit. Academiei R.S. România, București, 1968.
2. ȘT. I. GHEORGHIȚĂ, *Teoria stratului limită și turbulență*, Centrul de multiplicare al Universității din București, 1973.
3. V. N. CONSTANTINESCU, ST. GĂLETUȘE, *Mecanica fluidelor și elemente de aerodinamică*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1983.
4. P. BRĂDEANU, *Mecanica fluidelor*, Edit. Tehnică, București, 1973.
5. C. IACOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Edit. Academiei, București, Gauthier-Villars, Paris, 1959.
6. L. DRAGOȘ, *Principiile mecanicii mediilor continue*, Edit. Tehnică, București, 1983.
7. T. PETRILĂ, *Modele matematice în hidrodinamica plană. Cercetări asupra influenței pereților nelimitați*, Edit. Academiei R.S. România, București, 1981.

SINTEZA GEOMETRICĂ A MECANISMELOR CU OSCILAȚII REGLABILE

de V. HANDRA - LUCA și M. C. BRIȘAN

Institutul Politehnic, Cluj-Napoca

În lucrare se prezintă modul în care se face sinteza geometrică a mecanismelor cu oscilații reglabile la care elementul conducător execută o mișcare de du-te-vino, mișcare asigurată de un motor hidraulic sau pneumatic liniar. La stabilirea lungimilor elementelor se are în vedere respectarea condițiilor funcționale și limitarea unghiului de transmitere, unghi ce are o mare importanță în buna transmitere a forțelor de la elementul conducător la cel condus.

1. INTRODUCERE

Adesea în construcția de mașini sînt necesare mecanisme la care elementul condus trebuie să execute fie o mișcare de oscilație, fie una de du-te-vino a căror amplitudine să poată fi reglată chiar în timpul funcționării mașinii sau la o oprire foarte scurtă. Este cazul dispozitivelor alimentatoare-dozatoare, al mașinilor textile, al mașinilor unelte de tip șeping etc. Soluția cea mai ieftină sub aspectul prețului de cost, al amortizării și intreținerii o oferă mecanismele cu bare articulate.

În această lucrare se prezintă un mecanism cu oscilații reglabile căruia i se face sinteza geometrică punîndu-se condiția de limitare a unghiului de transmitere.

Considerînd mecanismul cu oscilații reglabile din figura 1, la diferite reglări ale articulației O_2 se schimbă amplitudinea unghiului de oscilație a elementului condus. La acest mecanism elementul *1* este conducător, elementul *5* este condus, iar elementul *3* este element de reglare. În

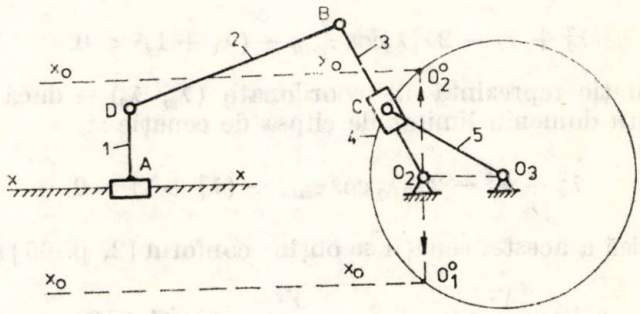


Fig. 1

vederea obținerii unor oscilații variabile mecanismul se reglează astfel: se deplasează ghidajul $x - x$ paralel cu el însuși și O_2 pe aceeași direcție. Cînd ghidajul $x_0 - x_0$ trece prin O_2^0 sau O_1^0 (care coincid cu C^0), atunci elementul condus *5* nu va mai oscila (oscilație zero). Prin această reglare

ST. CERC. MEC. APL., TOM 46, NR. 4, 1987, P. 313–322

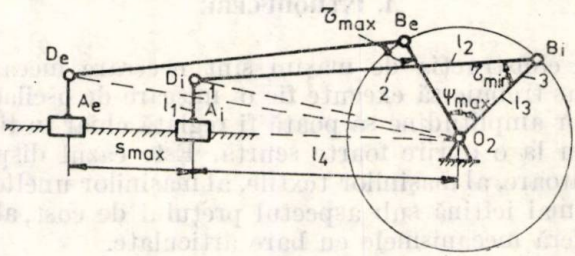
2—c. 1250

geometria (și implicit starea cinematică) a mecanismului format din batiu și elementele *1*, *2*, *3* nu se modifică.

Deoarece mecanismul cu oscilații reglabile luat în discuție (fig. 1) se compune din mecanismul de bază $ADBO_2$ și din mecanismul cu culisă $O_2C\ O_3$ se va face mai întîi sinteza fiecărui mecanism.

2. SINTEZA MECANISMULUI $ADBO_2$

Sinteza mecanismului de bază $ADBO_2$ se va face pe baza limitării unghiului de transmitere τ. Pe baza figurii 2 facem următoarele notații: $AD = l_1$, $DB = l_2$, $BO_2 = l_3$, $A_iO_2 = l_4$, $A_eA_i = s_{max}$.



Fid. 2

Se pot defini următoarele lungimi relative: $\lambda_1 = l_1/l_4$; $\lambda_2 = l_2/l_4$; $\lambda_3 = l_3/l_4$; $\lambda_4 = l_4/l_4 = 1$; $k = s_{max}/l_4$.

Dacă $\tau = \tau_{min}$ rezultă

$$l_1 + l_4 \geq \sqrt{l_1^2 + l_3^2 - 2l_2l_3\cos\tau_{min}}$$

sau

$$\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2\lambda_2\lambda_3\cos\tau_{min} - (\lambda_1 + 1)^2 \leq 0. \tag{1}$$

Această inecuație reprezintă în coordonate (λ_2, λ_3) — dacă se adoptă τ_{min} și λ_1 — un domeniu limitat de elipsa de ecuație:

$$\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2\lambda_2\lambda_3\cos\tau_{min} - (\lambda_1^2 + 1) = 0.$$

Forma canonică a acestei ecuații se obține conform [2, p. 65] și este:

$$\frac{X^2}{\dfrac{(\lambda_1+1)^2}{1-\cos\tau_{min}}} + \frac{Y^2}{\dfrac{(\lambda_1+1)^2}{1+\cos\tau_{min}}} - 1 = 0,$$

unde axele (X, Y) sînt rotite în sens antiorar cu unghiul $\alpha = \pi/4$ față de axele (λ_2, λ_3).

Notăm:

$$a = \frac{\lambda_1+1}{\sqrt{1-\cos\tau_{min}}};\quad b = \frac{\lambda_1+1}{\sqrt{1+\cos\tau_{min}}} \tag{2}$$

Deoarece $\sqrt{1 - \cos\tau_{min}} \leqslant \sqrt{1 + \cos\tau_{min}}$ $(\forall)\tau_{min} \in [0, \pi/2]$, rezultă că

$$a > b, \ (\forall)\ \tau \in [0, \pi/2].$$

Dacă $\tau = \tau_{max} = 180° - \tau_{min}$ rezultă

$$l_4 + s_{max} - l_1 \leqslant \sqrt{l_2^2 + l_3^2 + 2l_2l_3\cos\tau_{min}}$$

sau

$$\lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2\lambda_2\lambda_3\cos\tau_{min} - (1 + k - \lambda_1)^2 \geqslant 0. \tag{3}$$

Această inecuație reprezintă în coordonate (λ_2, λ_3) — dacă se adoptă τ_{min}, λ_1, k — un domeniu limitat de elipsa de ecuație :

$$\lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2\lambda_2\lambda_3\cos\tau_{min} - (1 + k - \lambda_1)^2 = 0.$$

Forma canonică a acestei ecuații se obține similar [2, p. 65] și este

$$\frac{X^2}{\frac{(1 + k - \lambda_1)^2}{1 + \cos\tau_{min}}} + \frac{Y^2}{\frac{(1 + k - \lambda_1)^2}{1 - \cos\tau_{min}}} - 1 = 0.$$

Notăm

$$a_1 = \frac{1 + k - \lambda_1}{\sqrt{1 + \cos\tau_{min}}}; \quad b_1 = \frac{1 + k - \lambda_1}{\sqrt{1 - \cos\tau_{min}}}. \tag{4}$$

Deoarece

$$\sqrt{1 + \cos\tau_{min}} \geqslant \sqrt{1 - \cos\tau_{min}}, \quad (\forall)\tau_{min} \in [0, \pi/2]$$

rezultă că

$$a_1 < b_1, \quad (\forall)\tau_{min} \in [0, \pi/2].$$

Se observă că a este funcție de λ_1 și că a_1 este funcție de λ_1 și k. Funcție de acești parametri deosebim (fig. 3) situațiile :
1°) Cînd $k \geqslant k^*$, funcție de valoarea :

$$\lambda_1' = \frac{(1 + k)\sqrt{1 - \cos\tau_{min}} - \sqrt{1 + \cos\tau_{min}}}{\sqrt{1 + \cos\tau_{min}} + \sqrt{1 - \cos\tau_{min}}} \tag{5}$$

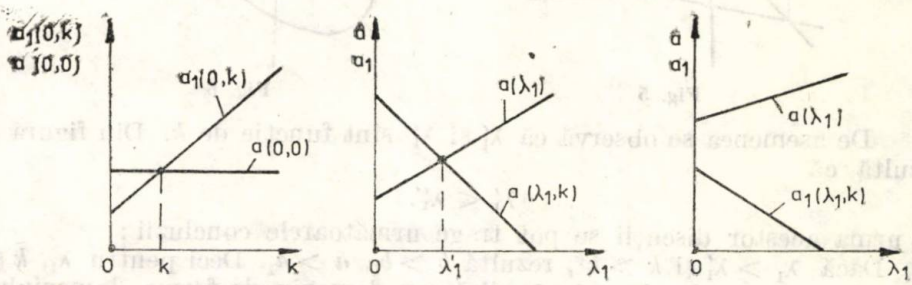


Fig. 3

deosebim două cazuri :

a) $\lambda_1 \geqslant \lambda_1' \Rightarrow a \geqslant a_1$

b) $\lambda_1 < \lambda_1' \Rightarrow a < a_1$ (V) $\lambda_1 > 0$.

2°) Cînd $k < k^* \Rightarrow a > a_1$, (V) $\lambda_1 > 0$,

unde

$$k^* = \frac{\sqrt{1 + \cos\tau_{min}} - \sqrt{1 - \cos\tau_{min}}}{\sqrt{1 - \cos\tau_{min}}}, \tag{6}$$

Se observă că b este funcţie de λ_1 şi b_1 este funcţie de λ_1 şi k.

Funcţie de aceşti parametri deosebim (fig. 4) situaţiile :

1°) Dacă $\lambda_1 \geqslant \lambda_1'' \Rightarrow b \geqslant b_1$,

2°) Dacă $\lambda_1 < 1_1'' \Rightarrow b_1 > b$, (7)

unde

$$\lambda_1'' = \frac{(1 + k)\sqrt{1 + \cos\tau_{min}} - \sqrt{1 - \cos\tau_{min}}}{\sqrt{1 - \cos\tau_{min}} + \sqrt{1 + \cos\tau_{min}}}.$$

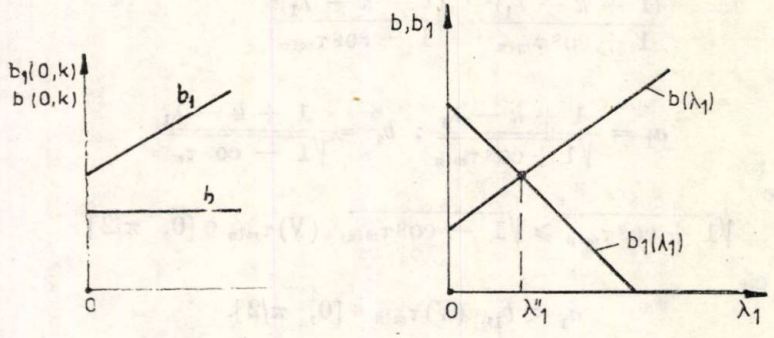


Fig. 4

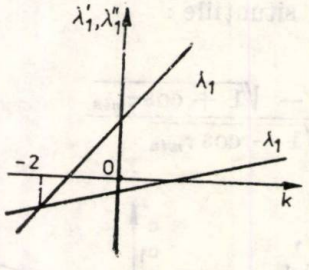


Fig. 5

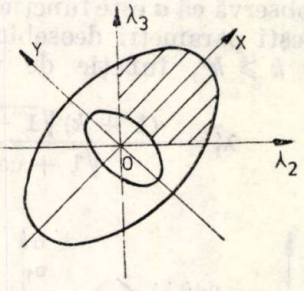


Fig. 6

De asemenea se observă că λ_1' şi λ_1'' sînt funcţie de k. Din figura 5 rezultă că

$$\lambda_1' < \lambda_1''.$$

În urma acestor discuţii se pot trage următoarele concluzii :

1°) Dacă $\lambda_1 > \lambda_1'$ şi $k > k^*$, rezultă $b > b_1$, $a > a_1$. Deci pentru λ_1, k şi τ_{min} adoptaţi se pot alege λ_2, λ_3 dintr-un domeniu de forma domeniului haşurat în figura 6.

2°) Dacă $\lambda_1' < \lambda_1 < \lambda_1''$ și $k > k^*$, rezultă $a > a_1$ și $b_1 > b$.
Se pot distinge două situații :

a) pentru τ_{min}, λ_1, k adoptați astfel încît $\lambda_1 > k/2$. se pot alege λ_2, λ_3 dintr-un domeniu de forma domeniului haşurat din figura 7*a*.

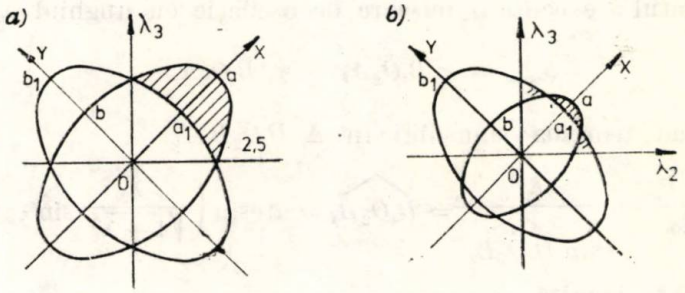


Fig. 7

b) pentru τ_{min}, λ_1, k adoptați astfel încît $\lambda_1 < k/2$, se pot alege λ_2, λ_3 dintr-un domeniu de forma domeniului haşurat din figura 7*b*.

3°) Dacă $\lambda_1 < \lambda_1'$ și $k > k^*$, rezultă $b_1 > b$ și $a_1 > a$.
Se observă că domeniul din care se pot alege λ_2, λ_3 este mulțimea vidă (fig. 8).

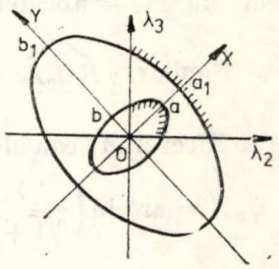


Fig. 8

4°) Dacă $\lambda_1 > \lambda_1''$ și $k < k^*$. rezultă $a > a_1$ și $b > b_1$.
Situația este identică cu cea din cazul (1°).

5°) Dacă $\lambda_1 < \lambda_1''$ și $k < k^*$, rezultă $a > a_1$ și $b_1 > b$. Situația este identică cu cea din cazul (2°).
Se poate concluziona că sinteza mecanismului $ADBO_2$ se face astfel :

— se adoptă λ_1, τ_{min}, k astfel încît $k < k^*$;
— se determină λ_2, λ_3 după algoritmul prezentat ; sau dacă $k > k^*$:
— se adoptă $k > k^*$, τ_{min}, λ_1 astfel încît $\lambda_1 > \lambda_1'$;
— se determină λ_2, λ_3 după algoritmul prezentat.

În figura 9 sînt prezentate două cazuri concrete de sinteză :
a) $\lambda_1 = 0{,}005$, $\tau_{min} = 40°$, $k = 2$. Se observă că $k > k^* = 1{,}748$; $\lambda_1 < \lambda_1' = 0{,}067$.

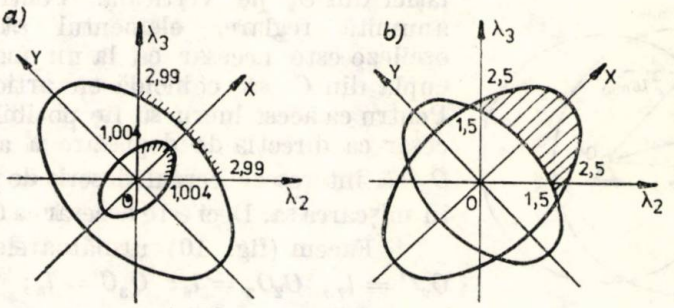


Fig. 9

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA 1848

Se observă că în acest caz sinteza mecanismului nu este posibilă.

b) $\lambda_1 = 1{,}5$, $k = 2$, $\tau_{min} = 40°$. Se observă că $k > k^* = 1{,}748$; $\lambda_1 > \lambda_1' = 0{,}067$.

Se poate alege $\lambda_2 = 1{,}75$, $\lambda_3 = 2$.

Elementul *3* execută o mișcare de oscilație cu unghiul ψ_{max}(fig. 2)

$$\psi_{max} = \sphericalangle B_i O_2 A_i - \sphericalangle B_e O_2 A_e.$$

Aplicînd teorema sinusului în $\Delta\, D_i O_2 B_i$,

$$\frac{\sqrt{l_1^2 + l_4^2}}{\sin\tau_{min}} = \frac{l_2}{\sin \widehat{D_i O_2 B_i}} \Rightarrow \widehat{D_i O_2 B_i} = \arcsin\left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} \sin\tau_{min}\right).$$

Din $\Delta\, D_i O_2 A_i$ rezultă

$$\widehat{D_i O_2 A_i} = \operatorname{arctg}\, \lambda_1.$$

Deci $\widehat{B_i O_2 A_i} = \arcsin\left((\lambda_2/\sqrt{1+\lambda_1^2})\sin\tau_{min}\right) + \operatorname{arctg}\ \lambda_1$.

Similar, $\widehat{B_e O_2 A_e} = \arcsin\left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{(1+k)^2+\lambda_1^2}} \sin\tau_{min}\right) + \operatorname{arctg}\frac{\lambda_1}{1+k}$.

Efectuînd calculele se obține:

$$\psi_{max} = \arcsin\left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} \sin\tau_{min}\right) + \arcsin\left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{(1+k)^2+\lambda_1^2}} \sin\tau_{min}\right) + \operatorname{arctg}\frac{1+k-\lambda_1^2}{k+2\lambda_1}. \tag{8}$$

2. SINTEZA MECANISMULUI CU CULISĂ O_2CO_3

Reglarea mecanismului cu oscilații reglabile din figura 1 se face, după cum s-a mai arătat prin deplasarea ghidajului $x - x$ și a articulației din O_2 pe verticală. Pentru ca la o anumită reglare, elementul să nu mai oscileze este necesar ca la un moment dat cupla din C să coincidă cu articulația O_2. Pentru ca acest lucru să fie posibil este necesar ca direcția de deplasare a articulației O_2 să intereseze cercul descris de punctul C în mișcarea sa. Deci este necesar ca $O_3C > O_2C$.

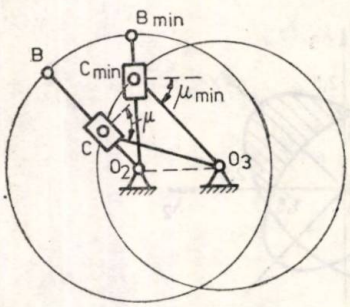


Fig. 10

Facem (fig. 10) următoarele notații: $O_2C = l_7$; $O_2O_3 = l_6$; $O_3C = l_5$; $\lambda_7 = l_7/l_4$; $\lambda_6 = l_6/l_4$; $\lambda_5 = l_5/l_4$.

Din $\Delta\ O_2CO_3$ rezultă

$$l_6^2 = l_5^2 + l_7^2 - 2l_5l_7\ \sin\mu \Rightarrow \sin\mu = \frac{l_5^2 + l_7^2 - l_6^2}{2l_5\ l_7}$$

sau

$$\mu = \arcsin \frac{\lambda_5^2 + \lambda_7^2 - \lambda_6^2}{2\lambda_5\ \lambda_7}, \tag{9}$$

Pentru a găsi poziția mecanismului unde unghiul μ are valoarea cea mai mică se va anula derivata în raport cu λ_7 a funcției $\mu = \mu(\lambda_7)$.

$$\frac{d\mu}{d\lambda_7} = 0 \Rightarrow \lambda_7 = \sqrt{\lambda_5^2 - \lambda_6^2}.$$

Se obține astfel

$$\mu_{min} = \arcsin \frac{\sqrt{\lambda_5^2 - \lambda_6^2}}{\lambda_5}. \tag{10}$$

Se observă că $\mu = \mu_{min} \Rightarrow O_2C \perp O_2O_3$

$$\cos\mu_{min} = \frac{\lambda_6}{\sqrt{\lambda_7^2 + \lambda_6^2}} \quad \cos\mu_{min} = \frac{\lambda_6}{\lambda_5}.$$

$$\lambda_7 = \sqrt{\lambda_5^2 - \lambda_6^2}$$

Deci, dacă se adoptă $\mu_a = \mu_{min}$ și λ_5 se poate calcula

$$\lambda_6 = \lambda_5 \cos\mu_a. \tag{11}$$

Se pot întocmi astfel nomograme care folosesc la sinteza mecanismului cu culisă O_2CO_3.

4. SINTEZA MECANISMULUI CU OSCILAȚII REGLABILE

Facem (fig. 11) următoarele notații : $O_2O_2' = h$; $t = h/l_4$; $O_3C = l_5$; $\lambda_5 = l_5/l_4$; $O_2'C = l_7$; $\lambda_7 = l_7/l_4$; $O_2O_3 = l_6$; $\lambda_6 = l_6/l_4$.

Din $\Delta\ O_2O_2'O_3$

$$l_6^2 + h^2 = l_7^2 + l_5^2 - 2l_7l_5\sin\mu.$$

Cu notațiile făcute rezultă

$$\mu = \arcsin \frac{\lambda_7^2 + \lambda_5^2 - \lambda_6^2 - t^2}{2\lambda_7\lambda_5}. \tag{12}$$

Pentru a găsi poziția mecanismului unde unghiul μ are valoarea cea mai mică se va anula derivata în raport cu λ_7 a funcției $\mu = \mu(\lambda_7)$:

$$\frac{d\mu}{d\lambda_7} = 0 \Rightarrow \lambda_7 = \sqrt{\lambda_5^2 - \lambda_6^2 - t^2},$$

$$\mu_{min} = \arcsin \frac{\sqrt{\lambda_5^2 - \lambda_6^2 - t^2}}{\lambda_5}; \tag{13}$$

$$\cos\mu_{min} = \frac{\sqrt{\lambda_6^2 + t^2}}{\lambda_5}.$$

Deci $\mu = \mu_{min} \Rightarrow O_3O_2' \perp O_2'C$.

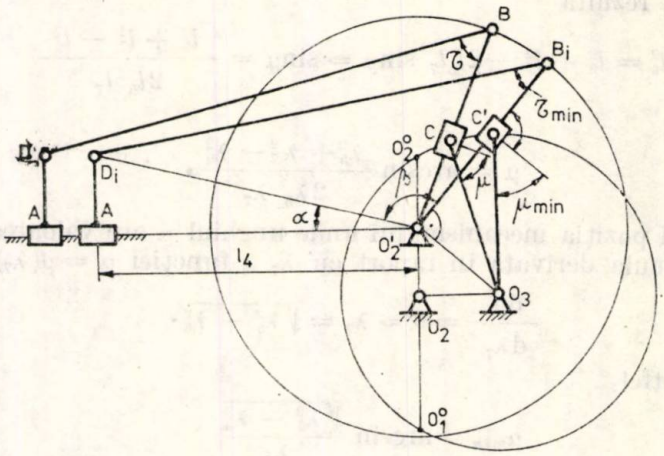


Fig. 11

Se impun două observaţii :

1°) pentru ca mecanismul să nu se blocheze este necesar ca elementul *3* să nu ajungă în poziţia în care $\mu = \mu_{min}$;

2°) pentru a realiza reglarea propusă este necesar ca elementul *3* să oscileze la stînga poziţiei pentru care $\mu = \mu_{min}$. Adică este necesar ca atunci cînd $\mu = \mu_{min}$ să avem şi condiţia $\tau = \tau_{min}$.

Din $\Delta\ D_i O_2' B_i$ rezultă

$$\frac{\sqrt{l_1^2 + l_4^2}}{\sin \tau_{min}} = \frac{l_2}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\beta = \frac{l_2 \sin \tau_{min}}{\sqrt{l_1^2 + l_4^2}},$$

$$l_2^2 = l_3^2 + l_1^2 + l_4^2 - 2l_3\sqrt{l_1^2 + l_4^2}\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{l_1^2 + l_3^2 + l_4^2 - l_2^2}{2l_3\sqrt{l_1^2 + l_4^2}}.$$

$$\text{Din } \Delta\ A_i D_i O_2' \Rightarrow \sin\alpha = \frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + l_4^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{l_4}{\sqrt{l_1^2 + l_4^2}}.$$

Folosind lungimile relative $\lambda_i (i = 1 \div 4)$ notăm :

$$p = \cos(\alpha + \beta) = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_3^2 + 1 - \lambda_2^2}{2\lambda_3(\lambda_1^2 + 1)} - \frac{\lambda_1\lambda_2 \sin \tau_{min}}{\lambda_1^2 + 1}. \tag{14}$$

Se observă că $\cos\mu_{min} = -\cos(\alpha + \beta) = -p$.

$$\text{Dar } \cos\mu_{min} = \frac{\sqrt{\lambda_6^2 + t^2}}{\lambda_5}.$$

$$\text{Deci } t = \sqrt{p^2\ \lambda_5^2 - \lambda_6^2}.$$

Avem condiția $t > \Leftrightarrow p^2\lambda_5^2 > \lambda_6^2 \Leftrightarrow \lambda_6 < -\lambda_5 p$, $(p < 0)$. (15)

Deci sinteza mecanismului cu oscilații reglabile se face astfel :

— se adoptă λ_1, k, τ_a, μ_a ținînd cont de discuția făcută la sinteza mecanismului $ADBO_2$;

— se determină λ_2, λ_3 ;

— se calculează $p = \dfrac{\lambda_1^2 + \lambda_3^2 + 1 - \lambda_2^2}{2\lambda_3(\lambda_1^2 + 1)} - \dfrac{\lambda_1\lambda_2 \sin\tau_a}{\lambda_1^2 + 1}$;

— se alege λ_5 ;

— se alege λ_6 astfel încît $\lambda_6 < -p\,\lambda_5$;

— se calculează

$$h_{max} = \sqrt{p^2 l_5^2 - l_6^2}, \tag{16}$$

care reprezintă înălțimea maximă la care poate ajunge articulația O_2 pentru λ_1, k, τ_a, μ_a, λ_5 adoptați, astfel încît mecanismul să funcționeze în bune condiții.

Unghiul maxim de oscilație ψ'_{max} a elementului 5 se poate deduce din figura 12 după cum urmează.

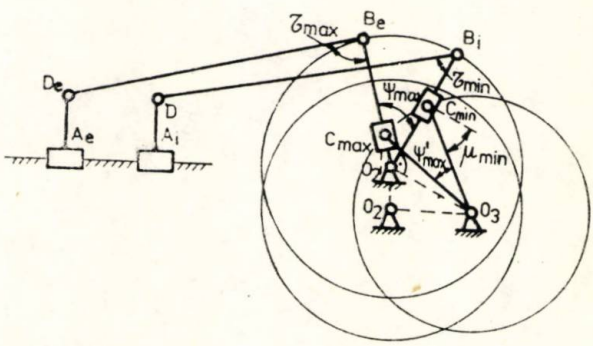


Fig. 12

Din $\Delta\, O_2' C_{max} O_3$ rezultă

$$\frac{l_5}{\sin(90° + \psi_{max})} = \frac{O_2' O_3}{\sin \widehat{O_2' C_{max} O_3}} \Rightarrow \sphericalangle\, O_2' C_{max} O_3 = \arcsin\left(\frac{\sqrt{l_6^2 + h^2}}{l_5} \cos\psi_{max}\right),$$

$$\widehat{O_2' O_3 C_{max}} = 180° - 90° - \psi_{max} - \arcsin\left(\frac{\sqrt{l_6^2 + h^2}}{l_5} \cos\psi_{max}\right),$$

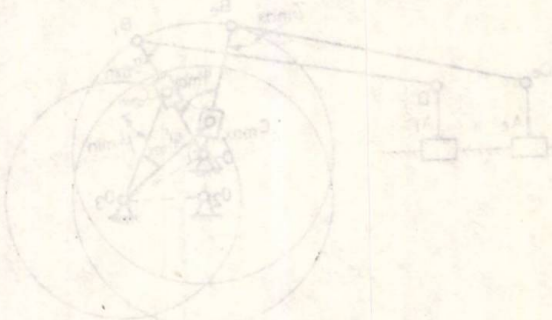
$$\psi'_{max} = \mu_{min} + \psi_{max} + \arcsin\left(\frac{\sqrt{l_6^2 + h^2}}{l_5} \cos\psi_{max}\right) - 90°. \tag{17}$$

Se observă că, practic, nu se poate obţine oscilaţie nulă pentru elementul 5 deoarece în această situaţie $\mu_{min} = 0$ ceea ce echivalează cu autoblocarea mecanismului.

Primit la redacţie la 29 noiembrie 1986.

BIBLIOGRAFIE

1. V. HANDRA-LUCA, *Contribuţii la sinteza mecanismelor cu oscilaţii reglabile*, Simpozionul de mecanisme şi transmisii mecanice, Reşiţa, 1976.
2. L. BITAY, *Geometrie diferenţială şi analitică*. Lito. I. P. Cluj-Napoca (1971).
3. V. HANDRA-LUCA., I. A. STOICA, *Introducere în teoria mecanismelor*, Vol. I, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1982.



TRANSMISII MECANICE DIFERENȚIALE CU VARIATOR LA IEȘIRE

de B. PLOSCEANU și R. C. BOGDAN

Institutul Politehnic, București

În lucrare se studiază cinematica și dinamica transmisiilor mecanice diferențiale cu variator la ieșire, în regim de funcționare permanent. Se stabilesc condițiile în care aceste transmisii funcționează cu o încărcare subunitară a variatorului ca amplificatoare sau reducătoare de turație. De asemenea, se stabilesc condițiile în care se obține un randament optim sau o transmisie cu autoblocare.

INTRODUCERE

Transmisiile mecanice diferențiale cu variator la ieșire [1], [3], [4], [5], indiferent de soluția constructivă, se realizează după schema de principiu din figura 1, unde MM — mașina motoare, ML — mașina de lucru, D — mecanismul diferențial simplu, R_i — reductor de turație.

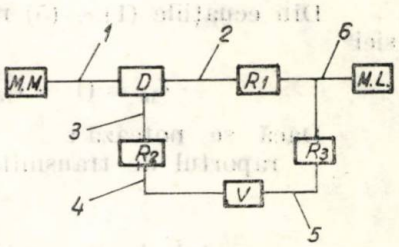


Fig 1

Folosirea unor astfel de transmisii — cu variator legat în paralel — a fost impusă în primul rînd de puterea limitată pe care o pot transmite variatoarele în comparație cu restul transmisiei și apoi de posibilitățile cinematice și dinamice ale transmisiei.

CINEMATICA TRANSMISIEI

Cinematica transmisiei este descrisă de ecuațiile rapoartelor de transmitere ale mecanismelor componente și conform schemei de principiu din figura 1, de ecuațiile:

$$n_1 = i_{12}^{3} n_2 + (1 - i_{12}^{3}) n_3 \quad (1); \quad n_2 = i_{26} n_6, \quad (2)$$

$$n_3 = i_{31} n_4, \ (3) \quad n_4 = i_{45} n_5, \quad (4) \quad n_5 = i_{56} n_6. \quad (5)$$

Ecuația (1) — ecuația lui Willis — descrie cinematica mecanismului diferențial, cînd elementul cinematic numărul *3* este brațul portsatelit. Dacă elementul *1* sau *2* este roata centrală cu numărul cel mai mic de dinți rezultă din valoarea absolută a raportului de transmitere de bază i_0, egală aici cu i_{12}^{3}.*

* Indicele superior indică elementul considerat fix, în raport cu care se calculează raportul de transmitere.

Raportul de transmitere de bază i_{12}^3 este supraunitar dacă elementul *1* este roata dințată cu numărul cel mai mic de dinți și subunitar în caz contrar.

O poziție diferită a brațului portsatelit se identifică tot prin intermediul raportului de transmitere de bază; $i_0 = i_{31}^2 = 1/(1 - i_{12}^3)$ dacă elementul 2 este brațul portsatelit și $i_0 = i_{23}^1 = (i_{12}^3 - 1)/i_{12}^3$ dacă elementul *1* este brațul portsatelit. În aceste ultime două cazuri ecuația lui Willis se scrie:

$$n_3 = i_{31}^2 n_1 + (1 - i_{31}^2)\, n_2, \tag{1'}$$

respectiv

$$n_2 = i_{23}^1 n_2 + (1 - i_{23}^1)\, n_1. \tag{1''}$$

Din ecuațiile (1) — (5) rezultă raportul de transmitere al transmisiei

$$i_{16} = (1 - i_{12}^3) i_{134} \cdot i_{56} \cdot i_{45} + i_{12}^3 \cdot i_{26}. \tag{6}$$

Dacă se notează:

— raportul de transmitere al transmisiei

$$i_{16} = y,$$

— raportul de transmitere al variatorului

$$i_{45} = x.$$

— raportul de transmitere al mecanismului diferențial simplu

$$i_0 = i_{12}^3 = a,$$

— produsul rapoartelor de transmitere ale reductoarelor necesare cuplării variatorului cu diferențial și respectiv cu mașina de lucru

$$i_{34} \cdot i_{56} = b,$$

raportul de transmitere al reductorului necesar cuplării diferențialului cu mașina de lucru

$$i_{26} = c,$$

ecuația raportului de transmitere al transmisiei se scrie:

$$y = (1 - a)\, bx + ac. \tag{7}$$

Relația (7) reprezintă ecuația unei drepte de pantă (1 — a)b și de ordonată la origină ac (fig. 2).

Corespunzător semnelor coeficienților a, b și c se pot obține patru drepte două câte două paralele între ele. În continuare se consideră cazul pentru care $ac > 0$ și $ac/(a - 1)b > 0$.

Pentru celelalte poziții ale brațului portsatelit, deci cu ecuația (1′) și, respectiv, (1″), în loc de (1), rezultă:

$$y = \frac{b}{a}\,x + \frac{(a-1)c}{a} \tag{7'}$$

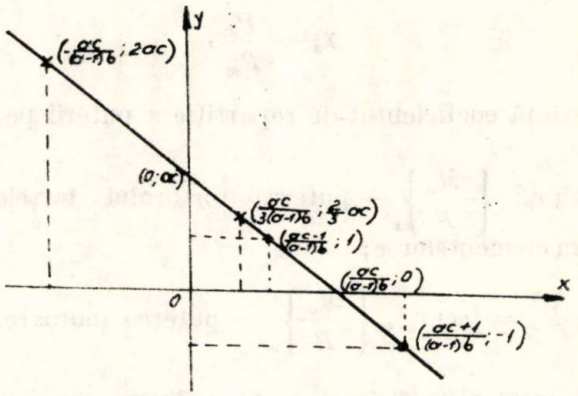


Fig. 2

și, respectiv,

$$y = \frac{ab}{a-1}\,x - \frac{c}{a-1}. \tag{7''}$$

Relațiile (7) și (7″) reprezintă drepte de pantă b/a, respectiv $ab/(a-1)$ și ordonată la origină $(a-1)\,c/a$, respectiv $c/(1-a)$.

Transmisia are o variație mai mare a raportului de transmitere decît a variatorului component, ori unde în intervalul de reglare, dacă panta dreptei este mai mare în modul ca unu, adică $|(1-a)b| > 1$, respectiv $|b/a| > 1$ și, respectiv, $|ab/(a-1)| > 1$.

Transmisia este amplificatoare de turație, pe intervalele pentru care $|y| < 1$, și reducătoare de turație, pe intervalele pentru care $|y| < 1$.

Din ecuațiile (7)—(7″) rezultă că transmisia este amplificatoare dacă raportul de transmitere al variatorului se găsește în intervalul:

$$x \in \left[\frac{ac+1}{(a-1)b};\ \frac{ac-1}{(a-1)b}\right],$$

respectiv

$$x \in \left[\frac{(1-a)c+a}{b};\ \frac{(1-a)\,c-a}{b}\right],$$

și, respectiv,

$$x \in \left[\frac{c+a-1}{ab};\ \frac{c-a+1}{ab}\right],$$

și devine reductoare de turație dacă x se găsește în afara acestui interval (fig. 2), pentru fiecare caz în parte.

CIRCULAȚIA DE PUTERE

Repartiția puterii de intrare pe mecanismele componente, respectiv pe elementele cinematice se calculează așa cum rezultă din [1], [2] și [3] cu relația

$$\lambda_x = \frac{P_x}{P_m}, \tag{8}$$

unde λ_x reprezintă coeficientul de repartiție a puterii pe elementul cinematic x;

$P_x = \{\omega : v_0\}_x \left\{\frac{M_0}{R}\right\}_x$ — puterea torsorului forțelor exterioare ce lucrează asupra elementelor x;

$P_m = \{\omega : v_0\}_m \left\{\frac{M_0}{R}\right\}_m$ — puterea motoare.

Calculul acestor coeficienți se face direct din condiții cinematice [2] cu relația:

$$\lambda_x = \frac{i_x}{i_t} \cdot \frac{\partial i_t}{\partial i_x}, \tag{9}$$

unde i_x este raportul de transmitere al mecanismului a cărui încărcare se calculează; i_t — raportul de transmitere al transmisiei.

Astfel, coeficientul de încărcare al variatorului este

$$\lambda_v = \frac{(1-a)\,bx}{(1-a)bx + ac}. \tag{10}$$

Relația (10) este ecuația unei hiperbole echilatere ce trece prin origină și are ca asimptote dreptele $x = ac/(a-1)b$ și $\lambda_v = 1$ (fig. 3).

Pentru celelalte cazuri rezultă:

$$\lambda_v = \frac{bx}{bx + (a-1)c}, \tag{10'}$$

respectiv

$$\lambda_v = \frac{a\,b\,x}{abx - c}. \tag{10''}$$

Ecuațiile (10') și (10'') reprezintă tot hiperbole echilatere ce trec prin origină și au ca asimptote dreptele $x = (1-a)c/b$ și $\lambda_v = 1$, respectiv $x = c/ab$ și $\lambda_v = 1$.

Pentru reductoarele R_2 și R_3 coeficienții de încărcare λ_{R_2} și λ_{R_3} sînt egali cu ai variatorului, astfel încît $\lambda_{R_2} = \lambda_{R_3} = \lambda_v$.

Coeficientul de încărcare al reductorului R_1 calculat cu relația (9) este :

$$\lambda_{R_1} = \lambda_R = \frac{ac}{(1-a)bx + ac}. \tag{11}$$

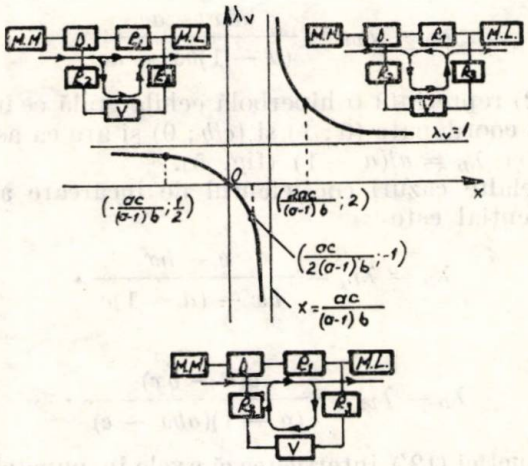


Fig. 3

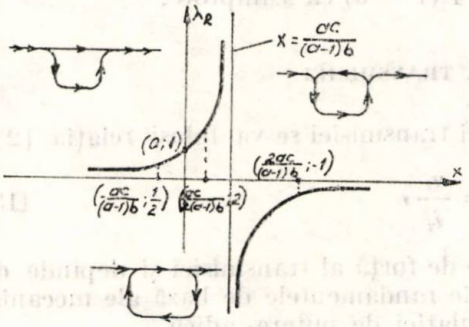


Fig. 4

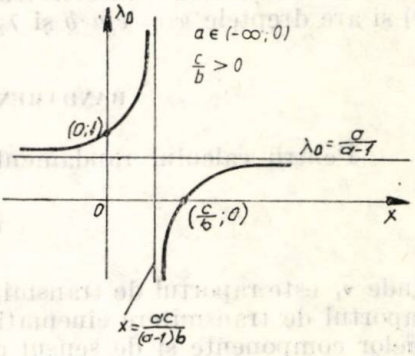


Fig. 5

Graficul funcției (11), reprezentat în figura 4, este al unei hiperbole echilaterale ce trece prin punctul de coordonate (0 ; 1) și are ca asimptote dreptele $x = ac/(a-1)\,b$ și $\lambda_R = 0$. (fig. 4).

În celelalte cazuri coeficientul de încărcare al reductorului R_1 este

$$\lambda_R = \frac{(a-1)c}{bx + (a-1)c}, \tag{11'}$$

respectiv

$$\lambda_R = \frac{c}{c - a\,b\,x}. \tag{11''}$$

Graficele funcţiilor (11′) şi (11″) sînt hiperbole echilatere ce trec prin punctul de coordonate (0,1) şi au ca asimptote dreptele $x = (1 - a)c/b$ şi $\lambda_R = 0$, respectiv $x = c/ab$ şi $\lambda_R = 0$.

Coeficientul de încărcare a pinionului mecanismului diferenţial se calculează tot cu relaţia (9) şi este

$$\lambda_D = \lambda_{D1} = \frac{abx - ac}{(a-1)bx - ac}. \tag{12}$$

Ecuaţia (12) reprezintă o hiperbolă echilaterală ce intersectează axele în punctele de coordonate (0 ; 1) şi $(c/b ; 0)$ şi are ca asimptote dreptele $x = ac/(a-1)b$ şi $\lambda_D = a/(a-1)$ (fig. 5).

Pentru celelalte cazuri coeficientul de încărcare al pinionului mecanismului diferenţial este

$$\lambda_D = \lambda_{D_3} = \frac{c - bx}{bx + (a-1)c}, \tag{12'}$$

respectiv

$$\lambda_D = \lambda_{D2} = \frac{a(c - bx)}{(a-1)(abx - c)}. \tag{12''}$$

Graficul funcţiei (12′) intersectează axele în punctele $(0 ; 1)/(a-1)$ şi $(c/b ; 0)$ şi au ca asimptote dreptele $\lambda_D = -1$ şi $x = (1 - a)c/b$, iar graficul funcţiei (12″) intersectează axele în punctele $(0 ; a/(1-a)$ şi $(c/b ; 0)$ şi are dreptele $x = c/a \cdot b$ şi $\lambda_D = 1/(1 - a)$ ca asimptote.

RANDAMENTUL TRANSMISIEI

Pentru calculul randamentului transmisiei se va folosi relaţia [2];

$$\eta_t = \frac{\nu_t}{i_t}, \tag{13}$$

unde ν_t este raportul de transmitere de forţă al transmisiei şi depinde de raportul de transmitere cinematic, de randamentele de bază ale mecanismelor componente şi de sensul circulaţiei de putere, adică

$$\nu_t = f(i\ \eta_1^{x_1} ;\ i_2\eta_2^{x_2} ;\ \ldots\ i_n\eta_n^{x_n}). \tag{14}$$

Exponenţii $x_1 \ldots x_n$ din (14) arată sensul circulaţiei de putere prin mecanism şi reprezintă semnul coeficientului de repartiţie a puterii, adică $x_i = \operatorname{sgn} \lambda_i$.

Atunci, din relaţia (7) rezultă că

$$\nu_{16} = (1 - a\eta_D^{x_D})\, b\eta_R^{2x_\nu} \cdot x\eta_\nu^{x_\nu} + a\eta_D^{x_D} c\eta_R^{x_R}. \tag{15}$$

Urmează că

$$\eta_{16} = \frac{\eta_R^{2x_\nu}\, \eta_\nu^{x_\nu}(1 - a\eta_D^{x_D})\, bx + \eta_D^{x_D}\eta_R^{x_R}\, ac}{(1-a)\, bx + ac}. \tag{16}$$

Relația (16), care dă randamentul transmisiei, este o funcție definită pe $R - \{ac/(a-1)b\}$.

În funcție de caracteristicile cinematice ale transmisiei, adică în funcție de a, b, c și x, se disting 24 de grupe de valori pentru exponenții randamentului și în consecință 24 de expresii pentru randament, din care numai șase sînt distincte între ele.

În toate cazurile (fig. 6) graficul funcției (16) admite ca asimptotă verticală dreapta $x = ac/(a-1)b$ și ca asimptotă orizontală dreapta $\eta = \eta_R^2\eta_v(1 - a\eta_D)/(1-a)$, dacă $a \in R-(0,1)$ și $\eta = \eta_R^2\eta_v(\eta_D - a)/(1-a)\eta_D$, dacă $a \in (0\,;\,1)$.

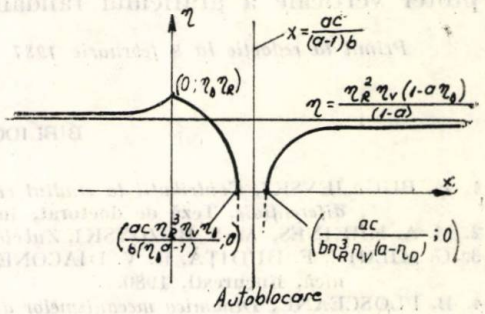


Fig. 6

Graficul funcției întîlnește ordonata în punctul $(0\,;\,\eta_R\eta_D)$ — — punct de extrem — iar axa O_x în punctele $ac\,\eta_R^3\eta_v\eta_D/b(a\eta_D - 1)$ și $ac/b\eta_R^3\eta_v(a - \eta_D)$ dacă $a \in R - (0\,;\,1)$ și în punctele $ac\eta_R^3\eta_v/b(a - \eta_D)$ și $ac\ \eta_D/b(a\eta_D - 1)\eta_R^3\eta_v$ dacă $a \in (0\,;\,1\,;\,1)$.

Punctele de intersecție cu axa Ox definesc intervalul pentru care transmisia este cu autoblocare.

În celelalte cazuri randamentul are expresia

$$\eta_{16} = \frac{\eta_R^{2x_v}\eta_v^{x_v}bx + (a\eta_D^{x_D} - 1)c\eta_R^{x_R}}{\eta_D^{x_D}[bx + (a-1)c]} \tag{16'}$$

și, respectiv.

$$\eta_{16} = \frac{(\eta^{2x_v}\eta_v^{x_v}\eta_D^{x_D}abx - \eta_R^{x_R}c)(a-1)}{(a\eta_D^{x_D} - 1)(abx - c)}. \tag{16''}$$

CONCLUZII

Prin introducerea în schema funcțională a reductoarelor de pe ramurile transmisiei lucrarea extinde structuri anterior tratate, dîndu-le un caracter general și pune în evidență fenomenul de supraîncărcare sau subîncărcare a ramurilor transmisiei.

Transmisiile diferențiale cu variator la ieșire se recomandă să fie folosite pe segmentul orientat de la asimptota verticală spre origine și dincolo de origine (uneori numai dincolo de origine).

Pe segmentul astfel orientat, se obține o transmisie cu încărcarea variatorului sub 50% dacă, conform primei variante, raportul de transmitere al variatorului ia valori în intervalul $[-ac/(a-1)b\,;\,ab/3(a-1)b]$.

Pentru celelalte variante este necesar ca $x \in [-(1-a)c/b\,;\,(1-a)c/3b]$, și, respectiv, $x \in [-c/ab\,;\,c/3\ ab]$.

Mai mult, pe un astfel de interval, randamentul transmisiei este optim, în comparație cu orice alt interval de aceeași lungime.

Transmisia poate fi folosită atît ca amplificatoare, cît şi ca reductoare de turaţie.

Pentru ca transmisia să fie amplificatoare pe intervalul menţionat este necesar ca în primul caz, cu ipotezele admise asupra semnelor coeficienţilor, $ac < 1/2$, iar în celelalte cazuri este necesar ca $2(1 - a)c + a > 0$ şi, respectiv, $2c + a - 1 > 0$.

În toate cazurile transmisia este cu autoblocare în vecinătatea asimptotei verticale a graficului randamentului.

Primit la redacţie la 9 februarie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. E. BUGAJEVSKI, *Contribuţii la studiul cinematic şi dinamic al mecanismelor cu trenuri diferenţiale*, Teză de doctorat, Institutul Politehnic Bucureşti, 1971.
2. M. A. KREINES, M. S. ROZOVSKI, *Zubciatiie mehanismi*. Nauka, Moskva, 1972.
3. G. MILOIU, F. DUDIŢĂ, D. V. DIACONESCU, *Transmisii mecanice moderne*. Edit. Tehnică, Bucureşti, 1980.
4. B. PLOSCEANU, *Dinamica mecanismelor diferenţiale cu legături neolonome*, În : IFToMM. International Symposium an Linkages and Computer Aided Design Methods. Bucharest, July 4...9, 1985. Vol. III-2. Papper 44.
5. I. VOLMER, *Getriebetechnik, Umlaufrädergetriebe*. VEB Verlag Technik, Berlin, 1978.

PLĂCI PLANE CIRCULARE CU DEFORMAȚII MARI SUPUSE ACȚIUNII UNEI VARIAȚII DE TEMPERATURĂ

de I. MARȚIAN

Institutul Politehnic, Cluj-Napoca

Obiectul lucrării este determinarea stărilor de eforturi și deformații în plăcile plane avînd deplasările transversale de același ordin de mărime cu grosimea, rezemate fix și mobil pe contur, admițîndu-se două situații de variație a temperaturii :
a) variație uniformă de temperatură T pe ambele fețe ale plăcii și pe toată suprafața și b) variație neuniformă de temperatură ΔT între fețe, distribuită uniform pe suprafață.

1. GENERALITĂȚI

Acțiunea variației de temperatură, ca rezultat al înmagazinării unor lichide sau gaze fierbinți, al efectului radiației solare zilnice sau sezoniere, al desfășurării unor procese tehnologice care implică temperaturi înalte etc., se manifestă cînd deformațiile construcției în ansamblu și ale elementelor de construcție componente sînt împiedicate. În cazul elementelor bidimensionale, de tipul plăcilor plane, atîta timp cît marginile sînt rezemate mobil, iar deplasările transversale sînt mici comparativ cu grosimea (între sarcina exterioară și deplasări există o legătură liniară), variațiile de temperatură nu dau naștere la eforturi. În acest fapt constă deosebirea esențială între modul de comportare al plăcilor rezemate deplasabil în planul median și cel al plăcilor avînd marginile fixe. Dacă însă deplasările sînt de același ordin de mărime cu grosimea acestor elemente, efectul acțiunii temperaturii determină apariția unei stări de eforturi corespunzătoare și în primul mod de rezemare, care urmează să se evalueze pe baza unui calcul în teoria neliniară (de ordinul doi).

Conform prevederilor STAS 10101/23 — 75[1], pentru elementele de construcție subțiri, se acceptă considerarea unei distribuții simplificate a cîmpului de temperatură, sub forma distribuției liniare pe grosime.

În prezenta lucrare ne propunem stabilirea stărilor de eforturi și deformații în plăcile plane circulare cu deformații mari, rezemate fix și mobil pe contur, admițînd două situații de variație a temperaturii [2] :

a) variație uniformă (constantă) de temperatură T pe ambele fețe ale plăcii și pe toată suprafața ;

b) variație neuniformă (liniară) de temperatură ΔT între fețele plăcii, distribuită uniform pe suprafață.

Cele două situații pot fi privite ca rezultat al descompunerii distribuției liniare a variației de temperatură pe grosimea plăcii în două efecte independente (fig. 1).

Considerînd că fața de jos a plăcii este menținută la o temperatură t_i superioară celei de pe fața de sus t_s ($t_i > t_s$), vom găsi creșterea tempe-

raturii în planul median al plăcii $T = (t_i + t_s)/2$ și, respectiv, diferența de temperatură între fețe $\Delta T = t_i - t_s$.

Cum, în calcul, variația de temperatură intervine numai în relațiile de elasticitate, în prima situație se modifică deformațiile specifice ale suprafeței mediane devenind

$$\varepsilon_r^0 = \frac{1}{Eh}(N_r - \mu N_t) + \alpha_t T\,; \quad \varepsilon_t^0 = \frac{1}{Eh}(N_t - \mu N_r) + \alpha_t T, \tag{1}$$

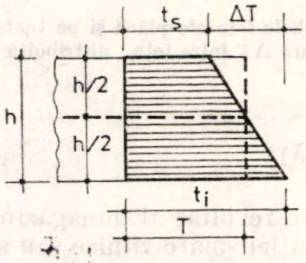


Fig. 1. — Variația de temperatură pe grosimea plăcii.

de unde rezultă eforturile de membrană din variația de temperatură uniformă

$$N_r^T = N_r - \frac{Eh}{1-\mu}\alpha_t T\,; \quad N_t^T = N_t - \frac{Eh}{1-\mu}\alpha_t T, \tag{2}$$

iar în a doua situație intervin curburile suplimentare

$$\frac{1}{\rho_r} = \frac{1}{\rho_t} = -\frac{\alpha_t \cdot \Delta T}{h}, \tag{3}$$

astfel încît momentele de încovoiere produse de variația neuniformă de temperatură pe grosimea plăcii vor fi

$$M_r^T = M_r - D\frac{\alpha_t \cdot \Delta T}{h}(1+\mu)\,; \quad M_t^T = M_t - D\frac{\alpha_t \cdot \Delta T}{h}(1+\mu), \tag{4}$$

în care h reprezintă grosimea plăcii ; E și μ — constantele elastice ale materialului plăcii (modulul de elasticitate și, respectiv, coeficientul lui Poisson) ; α_t — coeficientul de dilatare termică liniară ; $D = Eh^3/(12(1-\mu^2))$ — rigiditatea la încovoiere a plăcii.

În absența sarcinii transversale continuu distribuite p, ecuațiile de echilibru ale plăcilor plane circulare cu deformații mari au forma [3], [4], [5], [6]

$$r\frac{dN_r}{dr} + N_r - N_t = 0\,; \tag{5}$$

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_t}{r} = -N_r\frac{dw}{dr}, \tag{6}$$

pe baza cărora se deduc formulările în deplasări și mixtă ale rezolvării problemei.

Formularea în deplasări, indicată a se folosi în cazul marginilor nedeplasabile în planul median al plăcii, se obține introducînd în ecuațiile (5) și (6) eforturile de membrană, exprimate în funcție de săgeata plăcii w și deplasarea radială u,

$$N_r = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left[\frac{du}{dr} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2 + \mu\frac{u}{r}\right],$$
$$N_t = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left[\frac{u}{r} + \mu\frac{du}{dr} + \mu\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2\right], \tag{7}$$

iar în ecuația (6) înlocuind expresiile cunoscute ale momentelor de încovoiere,

$$M_r = -D\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \mu\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right);\quad M_t = -D\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \mu\frac{d^2w}{dr^2}\right), \tag{8}$$

rezultînd, după efectuarea calculelor,

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru)\right] = -\frac{1-\mu}{2}\frac{1}{r}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2 - \frac{dw}{dr}\cdot\frac{d^2w}{dr^2},$$
$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right] = \frac{1}{D}N_r\frac{dw}{dr}. \tag{9}$$

Formularea mixtă, convenabil de utilizat dacă marginile plăcii sînt deplasabile în planul median, se găsește exprimînd eforturile de membrană cu ajutorul unei funcții de eforturi $F(r)$, astfel ca

$$N_r = \frac{1}{r}\frac{dF}{dr};\quad N_t = \frac{d^2F}{dr^2}, \tag{10}$$

încît ecuația (5) este identic satisfăcută, iar celei de a doua ecuații din (9), în care N_r este dat de prima relație din (10), urmînd să i se asocieze condiția de continuitate a deformațiilor suprafeței mediane

$$\frac{d}{dr}(\nabla^2 F) = -\frac{Eh}{2r}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2. \tag{11}$$

2. CAZUL VARIAȚIEI UNIFORME DE TEMPERATURĂ T PE GROSIMEA PLĂCII ȘI PE TOATĂ SUPRAFAȚA

Pentru placa circulară rezemată pe contur de rază a (fig. 2 *a*, *b*), se alege săgeata plăcii w, într-o primă aproximație, sub forma celei date de

teoria liniară [5],

$$w = w_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{1+\mu}{5+\mu}\frac{r^2}{a^2}\right), \tag{12}$$

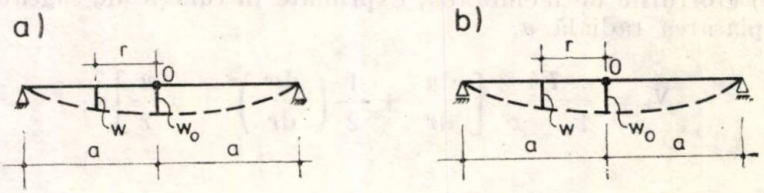


Fig. 2.— Placa circulară rezemată pe contur; *a*) rezemare fixă; *b*) rezemare mobilă.

satisfăcînd condițiile de margine

$$r = a;\ w = 0,\ M_r = 0. \tag{13}$$

a) PLACA CIRCULARĂ CU DEFORMAȚII MARI REZEMATĂ FIX (ARTICULAT) PE CONTUR

Eforturile de membrană din variația de temperatură (2), duse în (5), conduc la prima ecuației (9), în al cărei membru drept dacă se introduce expresia săgeții plăcii w (12) se obține ecuația diferențială de ordinul doi, liniară și neomogenă, de tip Euler ($\mu = 0{,}3$)

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{h^2}{a^3}\left(\frac{w_0}{h}\right)^2\left(-8{,}37388\frac{r}{a} + \right.$$

$$\left. + 11{,}48473\frac{r^3}{a^3} - 3{,}22475\frac{r^5}{a^5}\right), \tag{14}$$

cu soluția reprezentînd prima aproximație a deplasării radiale u a plăcii

$$u = \frac{h^2}{a}\left(\frac{w_0}{h}\right)^2\left(0{,}63539\frac{r}{a} - 1{,}04674\frac{r^3}{a^3} + 0{,}47853\frac{r^5}{a^5} - 0{,}06718\frac{r^7}{a^7}\right), \tag{15}$$

care satisface condițiile la limită

$$r = 0,\ r = a;\ u = 0. \tag{16}$$

Se calculează, mai departe, N_r din prima relație (7), unde w este dat de (12), iar u de (15), și introducîndu-l apoi în prima relație (2), care determină efortul de membrană din variația de temperatură N_r^T, după înlocuirea acestuia în membrul drept al celei de a doua ecuații (9), rezultă ecuația

diferențială de ordinul trei, liniară și neomogenă, de tip Euler

$$\frac{d^3w}{dr^3}+\frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr}=\left[38{,}85247\,\frac{\alpha_t T}{ah}\left(\frac{w_0}{h}\right)-\right.$$

$$\left.-24{,}68643\,\frac{h}{a^3}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\right]\frac{r}{a}+\left[-15{,}30551\,\frac{\alpha_t T}{ah}\left(\frac{w_0}{h}\right)+\right.$$

$$\left.+20{,}26899\,\frac{h}{a^3}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\right]\frac{r^3}{a^3}+\frac{h}{a^3}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\left(-6{,}92241\,\frac{r^5}{a^5}+\right.$$

$$\left.+1{,}36296\,\frac{r^7}{a^7}-0{,}10725\,\frac{r^9}{a^9}\right). \tag{17}$$

Cu substituția $r=e^t$, se obține soluția generală a ecuației diferențiale omogene

$$w_1=A_1+A_2r^2+A_3\ln r, \tag{18}$$

iar o soluție particulară a ecuației neomogene este de forma

$$\bar{w}_0=a_4r^4+a_6r^6+a_8r^8+a_{10}r^{10}+a_{12}r^{12}, \tag{19}$$

în care coeficienții

$$a_4=1{,}21413\,\frac{\alpha_t T}{a^2h}\left(\frac{w_0}{h}\right)-0{,}77145\,\frac{h}{a^4}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3,$$

$$a_6=-0{,}10628\,\frac{\alpha_t T}{a^4h}\left(\frac{w_0}{h}\right)+0{,}14075\,\frac{h}{a^6}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3,$$

$$a_8=-0{,}01802\,\frac{h}{a^8}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3, \tag{20}$$

$$a_{10}=0{,}00170\,\frac{h}{a^{10}}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3,$$

$$a_{12}=-0{,}00007\,\frac{h}{a^{12}}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3$$

s-au stabilit astfel încît $\bar{w}_0$ să satisfacă ecuația diferențială (17).

Constantele de integrare A_1, A_2 și A_3 se deduc din condițiile la limită impuse săgeții plăcii

$$w=w_1+\bar{w}_0, \tag{21}$$

$$r=0;\ w \text{ trebuie să fie finit } \rightarrow A_3=0,$$

$$r=a;\ w=0,\ M_r=0, \tag{22}$$

din ultimele două condiții rezultînd

$$A_1 = 3{,}75631\,\frac{\alpha_t T a^2}{h}\left(\frac{w_0}{h}\right) - 1{,}89582\,h\left(\frac{w_0}{h}\right)^3,$$

$$A_2 = -4{,}86416\,\frac{\alpha_t T}{h}\left(\frac{w_0}{h}\right) + 2{,}54291\,\frac{h}{a^2}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3, \tag{23}$$

obținîndu-se, în final, forma celei de a doua aproximații a săgeții plăcii

$$w = \frac{\alpha_t T a^2}{h}\left(\frac{w_0}{h}\right)\left(3{,}75631 - 4{,}86416\,\frac{r^2}{a^2} + 1{,}21413\,\frac{r^4}{a^4} - \right.$$

$$\left. - 0{,}10628\,\frac{r^6}{a^6}\right) + h\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\left(-1{,}89582 + 2{,}54291\,\frac{r^2}{a^2} - 0{,}77145\,\frac{r^4}{a^4} + \right.$$

$$\left. + 0{,}14075\,\frac{r^6}{a^6} - 0{,}01802\,\frac{r^8}{a^8} + 0{,}00170\,\frac{r^{10}}{a^{10}} - 0{,}00007\,\frac{r^{12}}{a^{12}}\right). \tag{24}$$

Din condiția ca în centrul plăcii ($r = 0$) $w = w_0$, se determină w_0/h, condiție din care rezultă

$$\frac{w_0}{h} = \pm\sqrt{1{,}98136\,\alpha_t T\left(\frac{a}{h}\right)^2 - 0{,}52747}, \tag{25}$$

semnele $\pm$ arătînd că săgeata plăcii se poate produce într-o parte sau alta a planului median. Relația (25) are sens numai dacă

$$T \geqslant 0{,}26621\left(\frac{h}{a}\right)^2\frac{1}{\alpha_t}, \tag{26}$$

valoarea minimă a lui T putînd fi privită ca o *variație de temperatură critică*, pentru care sînt posibile două forme de echilibru ale plăcii, una plană și alta deformată.

Introducînd săgeata plăcii w (24) în relațiile (8), se obțin momentele de încovoiere ($\mu = 0{,}3$)

$$M_r = D\left[\frac{\alpha_t T}{h}\left(\frac{w_0}{h}\right)\left(12{,}64681 - 16{,}02651\,\frac{r^2}{a^2} + 3{,}37970\,\frac{r^4}{a^4}\right) + \right.$$

$$+ \frac{h}{a^2}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\left(-6{,}61156 + 10{,}18367\,\frac{r^2}{a^2} - 4{,}47585\,\frac{r^4}{a^4} + \right.$$

$$\left.\left. + 1{,}05236\,\frac{r^6}{a^6} - 0{,}15810\,\frac{r^8}{a^8} + 0{,}00948\,\frac{r^{10}}{a^{10}}\right)\right], \tag{27}$$

$$M_t = D\left[\frac{\alpha_t T}{h}\left(\frac{w_0}{h}\right)\left(12{,}64681 - 9{,}22738\,\frac{r^2}{a^2} + 1{,}59420\,\frac{r^4}{a^4}\right) + \right.$$

$$+\frac{h}{a^2}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\left(-6{,}61156+5{,}86302\frac{r^2}{a^2}-2{,}11125\frac{r^4}{a^4}+0{,}44689\frac{r^6}{a^6}-\right.$$

$$\left.-0{,}06290\frac{r^8}{a^8}+0{,}00361\frac{r^{10}}{a^{10}}\right)\Bigg]$$

În centrul plăcii ($r=0$)

$$M_r=M_t=\left[12{,}64681\alpha_t T\left(\frac{a}{h}\right)^2-6{,}61156\left(\frac{w_0}{h}\right)^2\right]\left(\frac{w_0}{h}\right)\frac{hD}{a^2},$$

iar pe reazem ($r=a$)

$$M_r=0, \tag{28}$$

$$M_t=\left[5{,}01363\alpha_t T\left(\frac{a}{h}\right)^2-2{,}47202\left(\frac{w_0}{h}\right)^2\right]\left(\frac{w_0}{h}\right)\frac{hD}{a^2}.$$

Eforturile de membrană din variația de temperatură se determină din relațiile (2), după ce, în prealabil, s-au înlocuit deplasările (15) și (24) în (7). În centrul plăcii ($r=0$), se găsește

$$N_r^T=N_t^T=\left[-15{,}6\alpha_t T\left(\frac{a}{h}\right)^2+9{,}91208\left(\frac{w_0}{h}\right)^2\right]\frac{D}{a^2}, \tag{29}$$

iar pe reazem ($r=a$)

$$N_r^T=\left\{-15{,}6\alpha_t T\left(\frac{a}{h}\right)^2-6{,}98928\left(\frac{w_0}{h}\right)^2+\right.$$

$$\left.+6\left[-5{,}50948\,\alpha_t T\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{w_0}{h}\right)+2{,}71652\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\right]^2\right\}\frac{D}{a^2},$$

$$N_t^T=\left\{-15{,}6\,\alpha_t T\left(\frac{a}{h}\right)^2-2{,}09676\left(\frac{w_0}{h}\right)^2+\right.$$

$$\left.+1{,}8\left[-5{,}50948\alpha_t T\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{w_0}{h}\right)+2{,}71652\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\right]^2\right\}\frac{D}{a^2},$$

b) PLACA CIRCULARĂ CU DEFORMAȚII MARI SIMPLU REZEMATĂ PE CONTUR

Cu expresia săgeții plăcii, în prima aproximație, dată de (12), ecuația diferențială (11) devine

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\nabla^2 F)=-\frac{D}{a^3}\left(\frac{w_0}{h}\right)^2\left(33{,}86728\frac{r}{a}-26{,}68323\frac{r^3}{a^3}+5{,}25579\frac{r^5}{a^5}\right), \tag{30}$$

soluția acesteia fiind convenabil de determinat sub forma derivatei întîi a funcției de eforturi $F(r)$

$$\frac{dF}{dr} = \frac{D}{a^2}\left(\frac{w_0}{h}\right)^2 r\left(3{,}23111 - 4{,}23346\,\frac{r^2}{a^2} + 1{,}11182\,\frac{r^4}{a^4} - \right.$$

$$\left. - 0{,}10947\,\frac{r^6}{a^6}\right), \tag{31}$$

din relațiile (10) rezultînd mai departe eforturile de membrană

$$N_r = \frac{D}{a^2}\left(\frac{w_0}{h}\right)^2\left(3{,}23111 - 4{,}23346\,\frac{r^2}{a^2} + 1{,}11182\,\frac{r^4}{a^4} - 0{,}10947\,\frac{r^6}{a^6}\right), \tag{32}$$

$$N_t = \frac{D}{a^2}\left(\frac{w_0}{h}\right)^2\left(3{,}23111 - 12{,}70039\,\frac{r^2}{a^2} + 5{,}55909\,\frac{r^4}{a^4} - 0{,}76631\,\frac{r^6}{a^6}\right),$$

iar cele din variația de temperatură T se găsesc pe baza relațiilor (2)

$$N_r^T = \frac{1}{r}\frac{dF}{dr} - \frac{Eh}{1-\mu}\alpha_t T;\quad N_t^T = \frac{d^2F}{dr^2} - \frac{Eh}{1-\mu}\alpha_t T. \tag{33}$$

Introducînd săgeata plăcii w (12) și N_r^T dat de (33) în membrul drept al celei de a doua ecuații (9), se obține

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right] = \frac{1}{D}\left(\frac{1}{r}\frac{dF}{dr} - \frac{Eh}{1-\mu}\alpha_t T\right)\frac{dw}{dr}, \tag{34}$$

iar după efectuarea calculelor ($\mu = 0{,}3$) ecuația diferențială de același tip cu (17)

$$\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr} = \left[38{,}85247\,\frac{\alpha_t T}{ah}\left(\frac{w_0}{h}\right) - \right.$$

$$\left. - 8{,}04720\,\frac{h}{a^3}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\right]\frac{r}{a} + \left[-15{,}30551\,\frac{\alpha_t T}{ah}\left(\frac{w_0}{h}\right) + \right.$$

$$\left. + 13{,}71370\,\frac{h}{a^3}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\right]\frac{r^3}{a^3} + \frac{h}{a^3}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\left(-6{,}92241\,\frac{r^5}{a^5} + \right.$$

$$\left. + 1{,}36296\,\frac{r^7}{a^7} - 0{,}10725\,\frac{r^9}{a^9}\right). \tag{35}$$

Soluția generală a ecuației omogene este de forma (18) și o soluție particulară a ecuației neomogene de forma (19), coeficienții

$$a_4 = 1{,}21413\,\frac{\alpha_t T}{a^2 h}\left(\frac{w_0}{h}\right) - 0{,}25147\,\frac{h}{a^4}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3,$$

$$a_6 = -0{,}10628\frac{\alpha_t T}{a^4 h}\left(\frac{w_0}{h}\right) + 0{,}09523\frac{h}{a^6}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3,$$

$$a_8 = -0{,}01802\frac{h}{a^8}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3;\quad a_{10} = 0{,}00170\frac{h}{a^{10}}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3; \tag{36}$$

$$a_{12} = -0{,}00007\frac{h}{a^{12}}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3$$

determinîndu-se astfel ca soluția particulară să satisfacă ecuația (35), iar constantele de integrare

$$A_1 = 3{,}75631\frac{\alpha_t T a^2}{h}\left(\frac{w_0}{h}\right) - 0{,}28692\,h\left(\frac{w_0}{h}\right)^3,$$

$$A_2 = -4{,}86416\frac{\alpha_t T}{h}\left(\frac{w_0}{h}\right) + 0{,}45955\frac{h}{a^2}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3, \tag{37}$$

$$A_3 = 0,$$

din aceleași condiții la limită (22).

În acest fel expresia celei de a doua aproximații a săgeții plăcii va fi

$$w = \frac{\alpha_t T a^2}{h}\left(\frac{w_0}{h}\right)\left(3{,}75631 - 4{,}86416\frac{r^2}{a^2} + 1{,}21413\frac{r^4}{a^4} - \right.$$

$$\left. - 0{,}10628\frac{r^6}{a^6}\right) + h\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\left(-0{,}28692 + 0{,}45955\frac{r^2}{a^2} - \right.$$

$$- 0{,}25147\frac{r^4}{a^4} + 0{,}09523\frac{r^6}{a^6} - 0{,}01802\frac{r^8}{a^8} +$$

$$\left. + 0{,}00170\frac{r^{10}}{a^{10}} - 0{,}00007\frac{r^{12}}{a^{12}}\right). \tag{38}$$

Punînd iarăși condiția ca în centrul plăcii ($r = 0$) $w = w_0$, găsim

$$\frac{w_0}{h} = \pm\sqrt{13{,}09180\,\alpha_t T\left(\frac{a}{h}\right)^2 - 3{,}48529}, \tag{39}$$

relația avînd sens numai dacă

$$T \geqslant 0{,}26621\left(\frac{h}{a}\right)^2\frac{1}{\alpha_t},$$

adică aceeași expresie (26) ca în primul caz de rezemare a plăcii pe contur.

Momentele de încovoiere se obțin introducînd expresia săgeții w (38) în relațiile (8)

$$M_r = D\left[\frac{\alpha_t T}{h}\left(\frac{w_0}{h}\right)\left(12{,}64681 - 16{,}02651\,\frac{r^2}{a^2} + 3{,}37970\,\frac{r^4}{a^4}\right) + \right.$$
$$+ \frac{h}{a^2}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\left(-1{,}19483 + 3{,}31940\,\frac{r^2}{a^2} - 3{,}02831\,\frac{r^4}{a^4} + \right.$$
$$\left.\left. + 1{,}05236\,\frac{r^6}{a^6} - 0{,}15810\,\frac{r^8}{a^8} + 0{,}00948\,\frac{r^{10}}{a^{10}}\right)\right], \qquad (40)$$

$$M_t = D\left[\frac{\alpha_t T}{h}\left(\frac{w_0}{h}\right)\left(12{,}64681 - 9{,}22738\,\frac{r^2}{a^2} + 1{,}59420\,\frac{r^4}{a^4}\right) + \right.$$
$$+ \frac{h}{a^2}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\left(-1{,}19483 + 1{,}91117\,\frac{r^2}{a^2} - 1{,}42845\,\frac{r^4}{a^4} + \right.$$
$$\left.\left. + 0{,}44689\,\frac{r^6}{a^6} - 0{,}06290\,\frac{r^8}{a^8} + 0{,}00361\,\frac{r^{10}}{a^{10}}\right)\right],$$

în centrul plăcii ($r = 0$) avînd aceeași valoare

$$M_r = M_t = \left[12{,}64681\,\alpha_t T\left(\frac{a}{h}\right)^2 - 1{,}19483\left(\frac{w_0}{h}\right)^2\right]\left(\frac{w_0}{h}\right)\frac{hD}{a^2},$$

iar pe reazem ($r = a$)

$$M_r = 0, \qquad (41)$$

$$M_t = \left[5{,}01363\,\alpha_t T\left(\frac{a}{h}\right)^2 - 0{,}32451\left(\frac{w_0}{h}\right)^2\right]\left(\frac{w_0}{h}\right)\frac{hD}{a^2}.$$

Cum N_r din (32) se anulează pe controlul plăcii ($r = a$), înseamnă că rămîne termenul

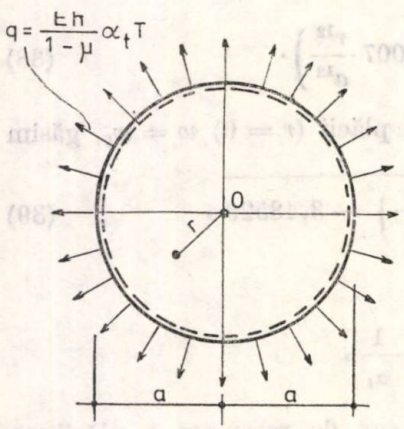


Fig. 3. — Efectul de șaibă.

$$N_r^T = -\frac{Eh}{1-\mu}\,\alpha_t T,$$

efort de compresiune ce nu poate fi preluat de reazemul deplasabil. Anularea acestui efort de compresiune este posibilă dacă se asimilează, în mod fictiv, placa plană circulară cu o șaibă acționată de sarcina radială pe contur $q = \dfrac{Eh}{1-\mu}\,\alpha_t T$ (fig. 3), încărcare din care, în toate punctele plăcii, se obțin eforturi de întindere egale pe ambele direcții

$$N_r'^T = N_t'^T = q = \frac{Eh}{1-\mu}\,\alpha_t T. \qquad (42)$$

Suprapunînd efectele (42) și (33), rezultă că eforturile de membrană din variația de temperatură T vor fi date de relațiile (32)

$$N_r^T = N_r; \qquad N_t^T = N_t. \tag{43}$$

c) EXEMPLU DE CALCUL

Să considerăm o plă circulară realizată din oțel OL 37, cu elementele geometrice $a = 1{,}50$ m, $h = 2$ cm și coeficientul de dilatare termică liniară al materialului $\alpha_t = 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{°C}$. În funcție de variația cîmpului de temperatură T, parabolele (25) și (39) corespunzătoare celor două moduri de rezemare sînt reprezentate în figura 4, valoarea critică a lui T dată de relația (26) fiind

$$T_{cr} = 0{,}26621 \left(\frac{2}{150}\right)^2 \frac{1}{12 \cdot 10^{-6}} \simeq 4°C.$$

Presupunînd că temperatura pe fața de jos a plăcii este $t_i = 20°C$, iar pe fața de sus $t_s = -10°C$, variația de temperatură în planul median va fi

$$T = \frac{t_i + t_s}{2} = \frac{20 - 10}{2} = 5°C.$$

Cu aceste date, din relațiile (25) și (39) se găsește raportul w_0/h în centrul plăcii în cele două moduri de rezemare pe contur :

$\frac{w_0}{h} = \pm\, 0{,}37581$, în cazul reazemului fix (articulat) și, respectiv, $w_0/h = \pm\, 0{,}96601$, în cazul simplei rezemări.

Luînd semnul plus, momentele de încovoiere (cu semnul minus al raportului w_0/h momentele schimbă semnul) și eforturile de membrană vor avea valorile :

— cazul rezemării fixe pe contur, relațiile (28) și, respectiv, (29)

$$r = 0; \quad M_r = M_t = 1{,}25314 \frac{hD}{a^2},$$

$$N_r^T = N_t^T = -\,3{,}86508 \frac{D}{a^2},$$

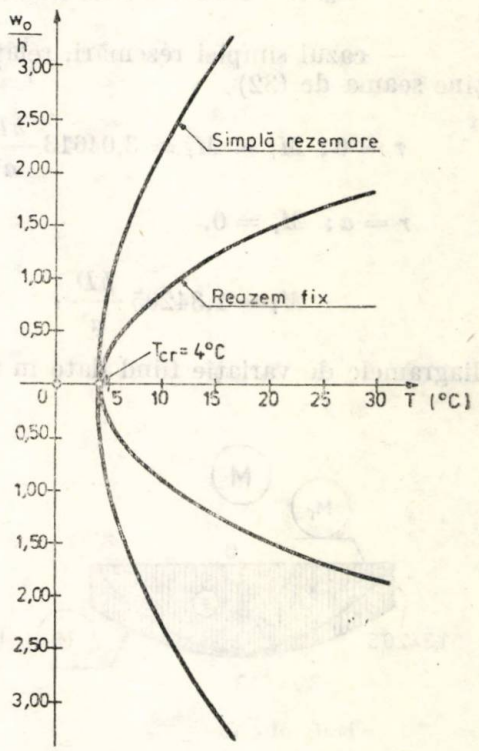


Fig. 4. — Diagramele de variație ale raportului w_0/h în centrul plăcii, în funcție de T.

$$r = a;\quad M_r = 0, \qquad N_r^T = -4{,}40652\frac{D}{a^2},$$

$$M_t = 0{,}50470\frac{hD}{a^2}, \qquad N_t^T = -5{,}00745\frac{D}{a^2},$$

iar diagramele de variație sînt prezentate în figura 5.

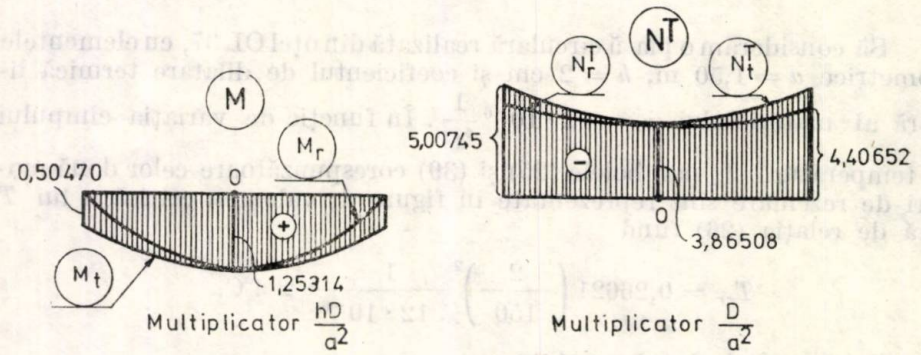


Fig. 5. — Eforturi în placa circulară rezemată fix pe contur (din T).

— cazul simplei rezemări, relațiile (41) și, respectiv, (43) în care se ține seama de (32)

$$r = 0;\ M_r = M_t = 3{,}04613\frac{hD}{a^2}, \quad N_r^T = N_t^T = 3{,}01519\frac{D}{a^2},$$

$$r = a;\ M_r = 0, \qquad N_r^T = 0;$$

$$M_t = 1{,}34205\frac{hD}{a^2}, \qquad N_t^T = -4{,}36399\frac{D}{a^2},$$

diagramele de variație fiind date în figura 6.

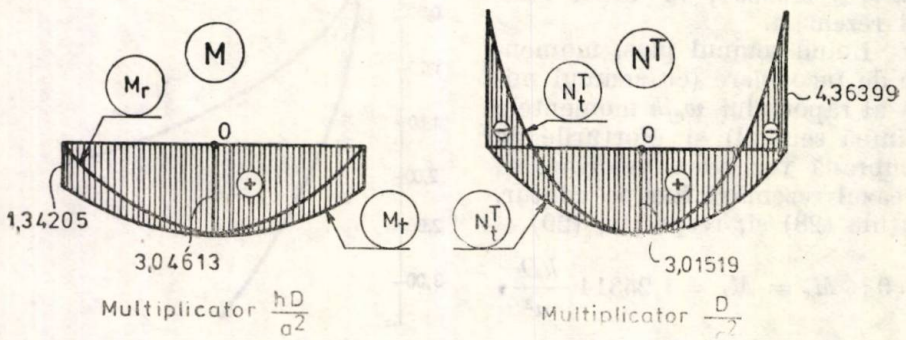


Fig. 6. — Eforturi în placa circulară simplu rezemată pe contur (din T).

3. CAZUL VARIAȚIEI NEUNIFORME DE TEMPERATURĂ ΔT PE GROSIMEA PLĂCII, DISTRIBUITĂ UNIFORM PE SUPRAFAȚĂ

Se evaluează și în această situație de acțiune a variației de temperatură stările de eforturi și deformații, evidențiindu-se din nou modurile diferite de comportare a plăcilor plane circulare cu deformații mari în funcție de natura rezemării pe contur — fixă sau mobilă.

a) PLACA CIRCULARĂ CU DEFORMAȚII MARI REZEMATĂ FIX (ARTICULAT) PE CONTUR

Cu forma suprafeței mediane deformate a plăcii, într-o primă aproximație, dată de relația (12), din prima ecuație a formulării în deplasări (9) se găsește aceeași expresie a deplasării radiale u din (15), respectînd condițiile la limită (16). Cum momentele de încovoiere din variața de temperatură neuniformă ΔT (4) trebuie să satisfacă ecuația de echilibru (6), după explicitarea lui N_r (7) în funcție de w (12) și u (15) și introducerea acestui efort în membrul drept al ultimei ecuații (9), ecuația diferențială astfel obținută are soluția

$$w = h\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\left(-1{,}89582 + 2{,}54291\,\frac{r^2}{a^2} - 0{,}77145\,\frac{r^4}{a^4} + \right.$$

$$\left. + 0{,}14075\,\frac{r^6}{a^6} - 0{,}01802\,\frac{r^8}{a^8} + 0{,}00170\,\frac{r^{10}}{a^{10}} - 0{,}00007\,\frac{r^{12}}{a^{12}}\right), \qquad (44)$$

care, de fapt, rezultă din (24) făcînd $T = 0$.

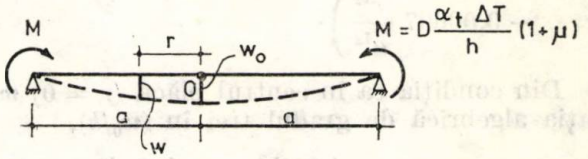


Fig. 7. — Placa circulară rezemată articulat, acționată pe contur de un moment uniform distribuit.

Îndeplinind condițiile la limită (22), săgeata plăcii (44) înlocuită în prima relație (4) conduce la apariția unui moment de încovoiere pe contur cu valoarea

$$M_r^T = -D\,\frac{\alpha_t \Delta T}{h}(1 + \mu).$$

Anularea acestui moment se realizează introducînd, fictiv, acțiunea unui moment distribuit uniform pe conturul plăcii, egal și de semn contrar primului (fig. 7).

O asemenea problemă a fost studiată în lucrarea [6] și, plecînd inițial de la expresia săgeții plăcii din teoria liniară

$$w = w_0\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right), \qquad (45)$$

s-au găsit soluțiile sistemului de ecuații diferențiale (9) sub forma ($\mu = 0{,}3$)

$$u = 0{,}675\,\frac{h^2}{a}\left(\frac{w_0}{h}\right)^2\frac{r}{a}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right), \tag{46}$$

$$w = 0{,}5\,\frac{\alpha_t \Delta T a^2}{h}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right) + h\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\left(-2{,}25729 + \right.$$

$$\left. + 2{,}87750\,\frac{r^2}{a^2} - 0{,}65812\,\frac{r^4}{a^4} + 0{,}03791\,\frac{r^6}{a^6}\right), \tag{47}$$

după înlocuirea momentului uniform distribuit pe contur M prin valoarea $D\,\frac{\alpha_t \Delta T}{h}(1+\mu)$.

Expresiile deplasărilor u și w ale punctelor din suprafața mediană deformată a plăcii se vor găsi atunci prin însumarea efectelor (15) cu (46) și, respectiv, (44) cu (47):

$$u = \frac{h^2}{a}\left(\frac{w_0}{h}\right)^2\left(1{,}31039\,\frac{r}{a} - 1{,}72174\,\frac{r^3}{a^3} + 0{,}47853\,\frac{r^5}{a^5} - 0{,}06718\,\frac{r^7}{a^7}\right), \tag{48}$$

$$w = 0{,}5\,\frac{\alpha_t \Delta T a^2}{h}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right) + h\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\left(-4{,}15311 + 5{,}42041\,\frac{r^2}{a^2} - \right.$$

$$- 1{,}42957\,\frac{r^4}{a^4} + 0{,}17866\,\frac{r^6}{a^6} - 0{,}01802\,\frac{r^8}{a^8} + 0{,}00170\,\frac{r^{10}}{a^{10}} -$$

$$\left. - 0{,}00007\,\frac{r^{12}}{a^{12}}\right). \tag{49}$$

Din condiția ca în centrul plăcii ($r = 0$) $w = w_0$, din (49) se obține ecuația algebrică de gradul trei în (w_0/h),

$$\left(\frac{w_0}{h}\right)^3 + 3s\left(\frac{w_0}{h}\right) + 2q = 0, \tag{50}$$

în care s-au făcut notațiile

$$s = 0{,}08026\,;\; q = -\,0{,}06019\,\alpha_t \Delta T\left(\frac{a}{h}\right)^2. \tag{51}$$

Cum realizantul $\Delta = s^3 + q^2 > 0$, înseamnă că ecuația (50) admite o singură soluție reală, care este dată de relația

$$\frac{w_0}{h} = \sqrt[3]{-q+\sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-q-\sqrt{\Delta}}. \tag{52}$$

Momentele de încovoiere se vor calcula acum cu ajutorul relațiilor (4), ținînd seama de (8), unde săgeata plăcii în a doua aproximație este

dată de (49). Astfel, vom avea

$$M_r^T = -D\frac{h}{a^2}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\left(14{,}09270 - 18{,}87026\frac{r^2}{a^2} + 5{,}68189\frac{r^4}{a^4} - \right.$$
$$\left. - 1{,}05295\frac{r^6}{a^6} + 0{,}15810\frac{r^8}{a^8} - 0{,}00948\frac{r^{10}}{a^{10}}\right),$$
$$M_t^T = -D\frac{h}{a^2}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\left(14{,}09270 - 10{,}86469\frac{r^2}{a^2} + 2{,}68014\frac{r^4}{a^4} - \right. \tag{53}$$
$$\left. - 0{,}44714\frac{r^6}{a^6} + 0{,}06290\frac{r^8}{a^8} - 0{,}00361\frac{r^{10}}{a^{10}}\right),$$

iar în centrul plăcii ($r = 0$)

$$M_r^T = M_t^T = -14{,}09270\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\frac{hD}{a^2}$$

și pe reazem ($r = a$) (54)

$$M_r^T = 0\,;\quad M_t^T = -5{,}52030\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\frac{hD}{a^2}$$

Eforturile de membrană, obținute din relațiile (7) în care u și w vor fi date de (48) și, respectiv, (49) au mărimile :

— în centrul plăcii ($r = 0$)

$$N_r = N_t = 20{,}44208\left(\frac{w_0}{h}\right)^2\frac{D}{a^2},$$

— pe reazem ($r = a$) (55)

$$N_r = \left\{-23{,}18928\left(\frac{w_0}{h}\right)^2 + 6\left[-\alpha_t\Delta T\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 6{,}06625\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\right]^2\right\}\frac{D}{a^2},$$

$$N_t = \left\{-6{,}95678\left(\frac{w_0}{h}\right)^2 + 1{,}8\left[-\alpha_t\Delta T\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 6{,}06625\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\right]^2\right\}\frac{D}{a^2}.$$

b) PLACA CIRCULARĂ CU DEFORMAȚII MARI SIMPLU REZEMATĂ PE CONTUR

Formularea mixtă permite determinarea cu ușurință a stărilor de eforturi și deformații în plăcile circulare rezemate deplasabil în planul median din acțiunea variației de temperatură neuniformă pe grosime și distribuită uniform pe întreaga suprafață a plăcii. Astfel, luînd iarăși pentru suprafața mediană deformată a plăcii mai întîi forma (12) și introducînd-o în ecuația (11), se găsește prin integrare derivata dF/dr a funcției de eforturi (31) și, mai departe, eforturile de membrană (32). Cu expresiile

N_r(32) și w (12) duse în cea de a doua ecuație (9), rezultă a doua aproximație a săgeții plăcii ca soluție a ecuației diferențiale obținute în acest mod

$$w = h\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\left(-0{,}28692 + 0{,}45955\,\frac{r^2}{a^2} - 0{,}25147\,\frac{r^4}{a^4} + \right.$$

$$\left. + 0{,}09523\,\frac{r^6}{a^6} - 0{,}01802\,\frac{r^8}{a^8} + 0{,}00170\,\frac{r^{10}}{a^{10}} - 0{,}00007\,\frac{r^{12}}{a^{12}}\right), \qquad (56)$$

identică celei date de (38) după ce s-a făcut $T = 0$.

Anularea și în acest caz a momentului de încovoiere $M_r^T = -D\,\frac{\alpha_t \Delta T}{h}(1+\mu)$, care apare pe contur din prima relație (4) după înlocuirea săgeții plăcii w (56) în (8), este posibilă prin acțiunea unui moment egal și de semn contrar cu primul (fig. 8).

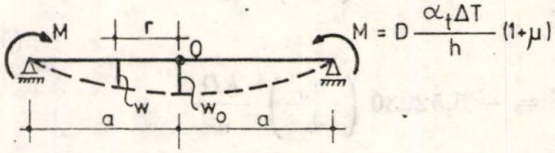


Fig. 8. — Placa circulară simplu rezemată, acționată pe contur de un moment uniform distribuit.

Pornind tot de la expresia săgeții plăcii (45), în urma integrării iterative a sistemului de ecuații diferențiale constituind formularea mixtă a rezolvării problemei, în [6] s-au obținut soluțiile dF/dr, respectiv eforturile de membrană N_r și N_t

$$N_r = 2{,}73\,\frac{D}{a^2}\left(\frac{w_0}{h}\right)^2\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right); \quad N_t = 2{,}73\,\frac{D}{a^2}\left(\frac{w_0}{h}\right)^2\left(1 - 3\,\frac{r^2}{a^2}\right) \qquad (57)$$

și, după înlocuirea lui M prin valoarea sa pe contur $D\,\frac{\alpha_t \Delta T}{h}(1+\mu)$ și luînd $\mu = 0{,}3$, săgeata plăcii în a doua aproximație

$$w = 0{,}5\,\frac{\alpha_t \Delta T a^2}{h}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) + h\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\left(-0{,}26979 + 0{,}40250\,\frac{r^2}{a^2} - \right.$$

$$\left. - 0{,}17062\,\frac{r^4}{a^4} + 0{,}03791\,\frac{r^6}{a^6}\right). \qquad (58)$$

În final, forma suprafeței mediane deformate a plăcii va fi dată de suma expresiilor (56) și (58), rezultînd

$$w = 0{,}5\,\frac{\alpha_t \Delta T a^2}{h}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) + h\left(\frac{w_0}{h}\right)^3\left(-0{,}55671 + 0{,}86205\,\frac{r^2}{a^2} - \right.$$

$$- 0{,}42209 \frac{r^4}{a^4} + 0{,}13314 \frac{r^6}{a^6} - 0{,}01802 \frac{r^8}{a^8} + 0{,}00170 \frac{r^{10}}{a^{10}} -$$

$$- 0{,}00007 \frac{r^{12}}{a^{12}}\Bigg). \tag{59}$$

Din condiția ca în centrul plăcii ($r = 0$) $w = w_0$, se găsește o ecuație algebrică de gradul trei în (w_0/h) de forma (50), în care noii coeficienți sînt

$$s = 0{,}59874\,; \quad q = - 0{,}44905\, \alpha_t \Delta T \left(\frac{a}{h}\right)^2, \tag{60}$$

avînd soluția reală dată de (52) deoarece condiția $\Delta > 0$ este și în acest caz îndeplinită.

Deoarece în teoria deformațiilor mici $\left(\frac{w_0}{h}\right)^3 = 0$, din (50) rezultă în ambele cazuri de rezemare a plăcii pe contur

$$\frac{w_0}{h} = - \frac{2q}{3s} = 0{,}5\, \alpha_t \Delta T \left(\frac{a}{h}\right)^2. \tag{61}$$

Momentele de încovoiere se determină, în continuare, introducînd (59) în relațiile (4)

$$M_r^T = - D \frac{h}{a^2} \left(\frac{w_0}{h}\right)^3 \left(2{,}24164 - 5{,}57165 \frac{r^2}{a^2} + 4{,}23434 \frac{r^4}{a^4} -\right.$$

$$\left. - 1{,}05295 \frac{r^6}{a^6} + 0{,}15810 \frac{r^8}{a^8} - 0{,}00948 \frac{r^{10}}{a^{10}}\right), \tag{62}$$

$$M_t^T = - D \frac{h}{a^2} \left(\frac{w_0}{h}\right)^3 \left(2{,}24164 - 3{,}20792 \frac{r^2}{a^2} + 1{,}99719 \frac{r^4}{a^4} -\right.$$

$$\left. - 0{,}44689 \frac{r^6}{a^6} + 0{,}06290 \frac{r^8}{a^8} - 0{,}00361 \frac{r^{10}}{a^{10}}\right).$$

În centrul plăcii ($r = 0$) valorile sînt:

$$M_r^T = M_t^T = - 2{,}24164 \left(\frac{w_0}{h}\right)^3 \frac{hD}{a^2},$$

iar pe reazem ($r = a$) (63)

$$M_r^T = 0\,; \quad M_t^T = - 0{,}64331 \left(\frac{w_0}{h}\right)^3 \frac{hD}{a^2}$$

Eforturile de membrană se găsesc însumînd efectele (32) și (57);

$$N_r = \frac{D}{a^2}\left(\frac{w_0}{h}\right)^2\left(5{,}96111 - 6{,}96346\,\frac{r^2}{a^2} + 1{,}11182\,\frac{r^4}{a^4} - 0{,}10947\,\frac{r^6}{a^6}\right),$$

$$N_t = \frac{D}{a^2}\left(\frac{w_0}{h}\right)^2\left(5{,}96111 - 20{,}89039\,\frac{r^2}{a^2} + 5{,}55909\,\frac{r^4}{a^4} - 0{,}76631\,\frac{r^6}{a^6}\right), \tag{64}$$

avînd valorile

— în centrul plăcii ($r = 0$)

$$N_r = N_t = 5{,}96111\left(\frac{w_0}{h}\right)^2\frac{D}{a^2};$$

— pe reazem ($r = a$)

$$N_r = 0\,;\quad N_t = -10{,}13650\left(\frac{w_0}{h}\right)^2\frac{D}{a^2}. \tag{65}$$

c) EXEMPLU DE CALCUL

Considerînd aceeași placă circulară ca în exemplul precedent, în funcție de valorile diferenței de temperatură ΔT între fețele plăcii, au fost calculate soluțiile w_0/h ale ecuației (50), date de relația (52), în cele două cazuri de rezemare a plăcii pe contur. Comparativ, în tabelul 1 sînt trecute și rapoartele w_0/h corespunzătoare teoriei deformațiilor mici obținute din relația (61). S-a ținut seama de prevederile STAS 10101/23 A—78 [7], conform cărora variațiile de temperatură normate nu pot depăși valorile $\Delta T = \pm 40°C$ „pentru construcțiile metalice neînglobate în elemente masive" și că, în vederea determinării diferențelor de temperatură de calcul, STAS 10101/0 A—77 [8] stabilește un coeficient al încărcării din variațiile de temperatură tehnologică egal cu 1,2 care se aplică asupra diferențelor de tempertură ΔT.

Analizînd datele din tabelul 1, pe baza cărora s-au obținut reprezentările din figura 9, se constată că dacă $\Delta T \leqslant 6°C$, teoriile liniară și neliniară conduc la aceleași rezultate, adică dreapta și curbele coincid. Dincolo de această limită, aplicarea teoriei liniare conduce la o subevaluare a rigidității plăcii, mai pronunțat în cazul rezemării fixe. Astfel, dacă $\Delta T = 20°C$, subevaluarea rigidității este cu 40,28%, în cazul rezemării fixe, și cu numai 15,37%, în cazul simplei rezemări. De aici rezultă că rezolvarea corectă a problemei plăcilor circulare în acest domeniu poate fi făcută doar aplicînd teoria neliniară.

Tabelul 1

Valorile $\frac{w_0}{h}$ în funcție de ΔT.

Nr. crt.	ΔT (°C)	$\frac{w_0}{h}$		
		Deformații mici	Deformații mari	
			Placă articulată	Placa simplu rezemată
1	0	0,00000	0,00000	0,00000
2	5	0,16875	0,15368	0,16617
3	6	0,20250	0,17877	0,19816
4	10	0,33750	0,26242	0,31936
5	15	0,50625	0,34123	0,45410
6	20	0,67500	0,40305	0,57122
7	25	0,84375	0,45430	0,67359
8	30	1,01250	0,49838	0,76410
9	35	1,18125	0,53724	0,84514
10	40	1,35000	0,57214	0,91854
11	50	1,68750	0,63318	1,04753

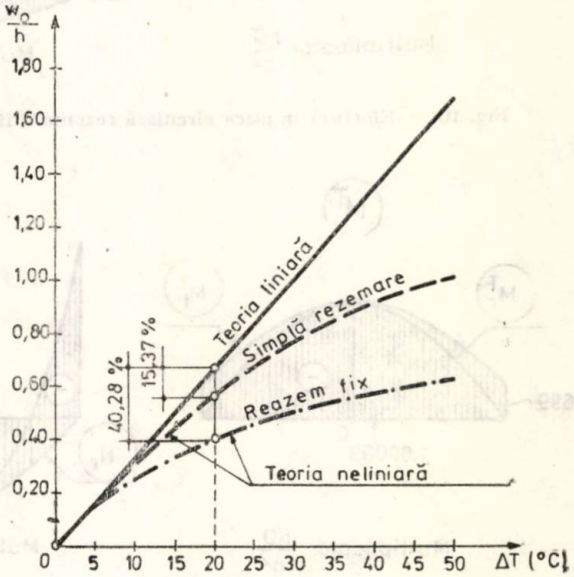


Fig. 9. — Diagramele de variație ale raportului w_0/h în centrul plăcii funcție de ΔT.

Cu temperaturile pe fețele plăcii $t_i = 20°C$ și $t_s = -10°C$, vom avea variația de temperatură $\Delta T = t_i - t_s = 20 - (-10) = 30°C$, iar din tabelul 1 găsim corespunzător valorile rapoartelor în centrul plăcii : $w_0/h = 0,49838$ și, respectiv, $w_0/h = 0,76410$, după cum rezemarea pe contur este fixă sau mobilă în planul median. Momentele de încovoiere și

eforturile de membrană se vor calcula după cum urmează :
— cazul rezemării fixe pe contur, cu relațiile (54) și, respectiv, (55)

$$r = 0\,;\ M_r^T = M_t^T = -1{,}74452\,\frac{hD}{a^2},\ N_r = N_t = 5{,}07745\,\frac{D}{a^2},$$

$$r = a\,;\ M_r^T = 0, \qquad N_r = 3{,}97964\,\frac{D}{a^2},$$

$$M_t^T = -0{,}68335\,\frac{hD}{a^2}, \qquad N_t = 1{,}19389\,\frac{D}{a^2},$$

cu diagramele de variație prezentate în figura 10.

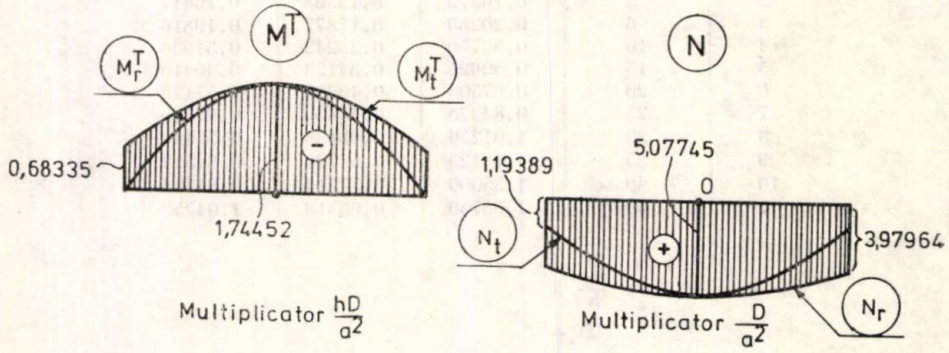


Fig. 10. — Eforturi în placa circulară rezemată fix pe contur (din ΔT).

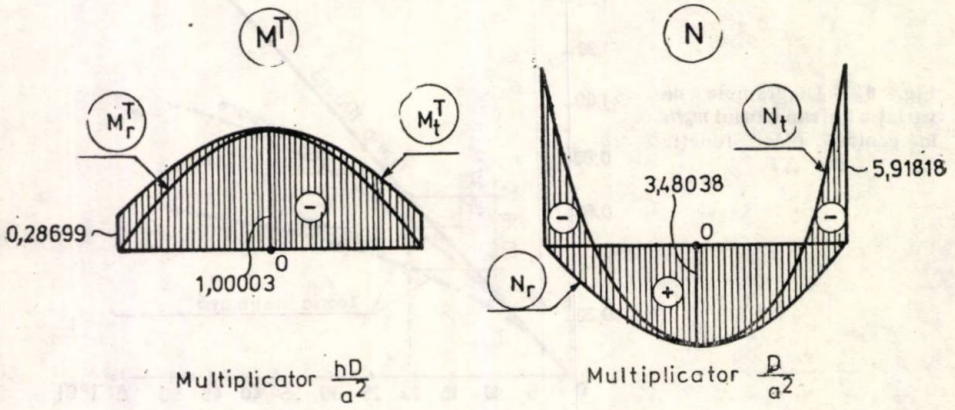


Fig. 11. — Eforturi în placa circulară simplu rezemată pe contur (din ΔT).

— cazul simplei rezemări, cu relațiile (63) și, respectiv, (65)

$$r = 0\,;\ M_r^T = M_t^T = -1{,}00003\,\frac{hD}{a^2},\ N_r = N_t = 3{,}48038\,\frac{D}{a^2},$$

$$r = a;\quad M_r^T = 0, \qquad N_r = 0,$$

$$M_t^T = -0{,}28699\,\frac{hD}{a^2}, \qquad N_t = -5{,}91818\,\frac{D}{a^2},$$

iar diagramele de variație sînt date în figura 11.

4. CONCLUZII

Prezentul studiu pune în evidență stările de eforturi și deformații care se nasc în plăcile plane circulare cu deformații mari din acțiunea variației de temperaturi uniformă și neuniformă pe grosime dar constantă pe întreaga suprafață a plăcii, analizîndu-se ambele posibilități de rezemare pe contur, cu precizarea diferenței calitative de comportare într-un caz față de celălalt. Este evidențiată, de asemenea, rezerva de rigiditate pe care o prezintă, în general, plăcile plane calculate în teoria liniară datorită neglijării deformațiilor suprafeței mediane și, în consecință, a eforturilor de membrană. Mai puțin rigidă rezultă a fi placa simplu rezemată pe contur, explicația decurgînd din faptul că eforturile de membrană, care diminuează efectul încovoierii, global sînt mai mici în acest caz. Din acest motiv momentele de încovoiere sînt mai mari în cazul simplei rezemări față de cazul rezemării fixe.

Stările de eforturi și deformații din acțiunea variației de temperatură nu pot fi determinate pe baza teoriei liniare dacă rezemarea plăcilor pe contur este mobilă. Față de acest neajuns, studiul întreprins conferă o contribuție la dezvoltarea calculului plăcilor plane.

Primit la redacție la 18 noiembrie 1986

BIBLIOGRAFIE

1. * * * STAS 10101/23 — 75, *Încărcări date de temperatura exterioară.*
2. A. A. BELEȘ, M. V. SOARE, — *Calculul plăcilor curbe subțiri*, Edit. Tehnică, București 1969, pag. 195; 542; 564—568.
3. S. P. TIMOSHENKO, S. WOINOWSKY — KRIEGER, — *Teoria plăcilor plane și curbe*, Edit. Tehnică, București 1968, pag. 420.
4. CHIEN WEI-ZANG, YEH KAI-YUAN, — *On the large deflection of circular plate*, Scientia Sinica — Physics, III, 4, (1954).
5. I. MARȚIAN, *Plăci plane cu deformații mari de diferite contururi*, Teză de doctorat, Institutul politehnic Cluj-Napoca, 1986.
6. I. MARȚIAN, — *Plăci plane circulare cu deformații mari*, Studii și cercetări de mecanică aplicată, 43, 1 (1984), p. 66—81.
7. * * * STAS 10101/23 A — 78, *Încărcări date de temperatura exterioară în construcții civile și industriale.*
8. * * * STAS 10101/0 A — 77, *Acțiuni în construcții. Clasificarea și gruparea acțiunilor pentru construcții civile și industriale.*

O COMPARAȚIE A EFICIENȚEI STRUCTURALE A UNOR CUPOLE RETICULATE

de M. V. SOARE și N. RĂDUICĂ
Institutul de Construcții București

Plecînd de la concepția obișnuită a cupolelor reticulate folosite pentru acoperirea rezervoarelor, a fost studiată optimizarea consumului de oțel ca funcție de următorii parametri : tipul de cupolă reticulată și forma secțiunii transversale a barelor. Au fost studiate următoarele patru geometrii : cupolele cu nervuri, cupolele tip Schwedler cu diagonale simple, avînd aceeași orientare sau orientare alternată și cupole tip Schwedler cu diagonale încrucișate. În ce privește secțiunile au fost examinate secțiunile alcătuite din profile laminate obișnuite și secțiunile alcătuite din profile cu pereți subțiri închise.
Concluziile principale ale cercetării sînt : 1° încărcarea cu zăpadă pe jumătate de cupolă constituie încărcarea cea mai defavorabilă ; 2° secțiunea casetată este mai avantajoasă decît cea deschisă ; 3° cupolele tip Schwedler sînt mai avantajoase decît cupolele cu nervuri (între cele trei variante nu există diferințe importante) ; 4° o configurație ciclică a cupolei reticulate îi asigură cea mai bună comportare statică.

Studiul de față își are originea într-o lucrare de cercetare științifică avînd drept obiect determinarea stării de eforturi și de deformații într-o cupolă reticulată de rezervor de mare capacitate, proiectată — prin extrapolare — la un diametru mai mare, în baza unor proiecte mai vechi. Cercetarea a avut drept rezultat consolidarea unor bare, cu respectarea geometriei adoptate inițial.

În baza rezultatelor numerice, obținute, autorii au continuat studiile pentru ca, prin îmbunătățirea conformării geometrice și a modificării secțiunilor barelor, să se ajungă la optimizarea soluției. Calea urmată și rezultatele obținute, comparate cu datele inițiale, au condus la o soluție mai rațională și cu consum de oțel mai redus, în comparație cu soluțiile aplicate pînă în prezent. Rezultatele preliminare, privind îmbunătățirea geometriei inițiale au fost publicate anterior de autori [12]. În lucrarea de față se dau rezultatele obținute pentru alte cinci geometrii ale cupolelor reticulate pe contur circular.

1. CLASIFICAREA CUPOLELOR RETICULATE

Clasificarea cupolelor reticulate, corespunzător conformării geometrice, are o influență hotărîtoare asupra stării de eforturi și de deformații. Din acest punct de vedere vom distinge :

— cupole cu configurație regulată, la care toate fusurile sînt identice ;

— cupole cu configurație semiregulată, la care un grup de fusuri se repetă (așa-numita simetrie ciclică) ;

— cupole cu configurație neregulată.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 46, NR. 4, 1987, P. 352—361

Sînt cunoscute mai multe tipuri de cupole reticulate [4], [5], [6], [7], [10] [11], [13], [14] dintre care citäm: cupolele cu nervuri, cupolele tip Schwedler, cupolele tip șaibă, cupolele tip zimmermann, cupolele tip cadru, cupolele în rețea, cupolele tridirecționale, cupolele lamelare, cupolele geodezice (tip Fuller) etc.

Ele se încadrează în tipul cupolelor cu configurație regulată și au fost utilizate, cu precădere, în construcțiile social-culturale, avînd caracter de unicat.

Unele cupole reticulate sînt structuri static determinate în ipoteza nodurilor articulate. Pentru cupolele tip Schwedler, de exemplu, sînt date formule simple pentru evaluarea eforturilor în bare [3], în special în cazul stării de eforturi simetrice în raport cu axa de rotație.

În construcțiile industriale, în particular la construcția rezervoarelor cilindrice cu ax vertical, sînt utilizate cu frecvență mai mare cupole reticulate semiregulate.

Geometria acestora este caracterizată prin absența a numeroase bare, în comparație cu cupola clasică tip Schwedler, multe ochiuri fiind trapezoidale, deci deformabile în ipoteza tuturor nodurilor articulate.

Invariabilitatea geometrică a cupolei este asigurată doar prin rigiditatea nodurilor, ceea ce impune luarea în considerare a efectului momentelor încovoietoare și de torsiune care apar din această cauză.

La cupolele semiregulate (cu simetrie ciclică) nu toate fusurile sînt identice, ci doar grupurile de fusuri; studiul stării de eforturi și de deformații poate fi redus la studiul unui asemenea grup, prin combinații convenabile ale încărcărilor.

2. ELEMENTE DE BAZĂ PENTRU CALCULUL CUPOLEI

2.1. GEOMETRIA CUPOLEI

Deoarece interesul principal a fost acela al îmbunătățirii modului de lucru al cupolei de rezervor și pentru a putea avea date de comparație a fost păstrată geometria inițială pentru toate cazurile studiate.

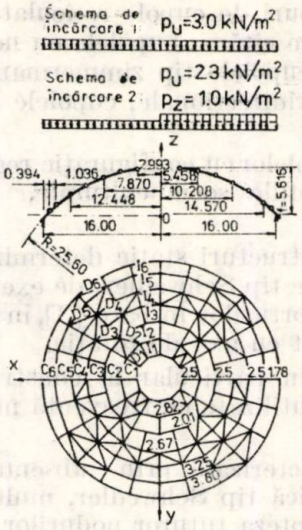
Suprafața mediană a cupolei, pe care sînt situate nodurile, este o calotă sferică de rază $R = 25{,}600$ m și diametrul cercului de rezemare $d = 32{,}000$ m (fig. 1*a*). De aici rezultă o săgeată

$$f = R - \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} = 5{,}616 \text{ m}$$

și un unghi la centru $\varphi_0 = 38{,}682187°$ ($\sin \varphi_0 = d/2R = 0{,}625$).

Atît unghiul φ_0, cît și raportul $f/d = 5{,}616/32 = 1/5{,}7$ arată că avem a face cu o cupolă pleoștită.

Configurația geometrică a barelor cupolei inițiale este indicată în figura 1*b*, din care reiese că există patru plane de simetrie, fiecare octant grupînd cîte șase fusuri.



Bare	Caracteristici secţionale
C_1, I_1 I_2, I_4	U 18 $A = 28.0 cm^2$
C_2, C_3 C_4, I_3, C_5	U18 + Ptb90×6 $A = 35.2 cm^2$
I_5	U18 + L60×60×6 $A = 34.1 cm^2$
I_6	U18 + L75×100×9 $A = 43.1 cm^2$
D_1	L 60×60×6 $A = 6.91 cm^2$
D_2, D_3 D_4	ø 60×60×6 $A = 13.82 cm^2$
D_5, D_6	L 100×100×10 ⌝ 60×60×6 $A = 26.11 cm^2$
C_6	U18 + Ptb8×160 $A = 50.6 cm^2$

Fig. 1

2.2. METODA DE CALCUL

Cupolele reticulate au fost calculate prin metoda stărilor limită în conformitate cu STAS 10108/0—78. Pentru un oţel de construcţie OL 52 rezistenţa de calcul pentru piese cu grosimi $t = 16$ mm este $R = 31{,}50$ kN/cm², iar pentru oţelul marca OL 37, $R = 22$ kN/cm².

Determinarea mărimilor secţionale (eforturi axiale, momente încovoietoare şi de torsiune) s-a făcut în stadiul liniar elastic.

2.3. ÎNCĂRCĂRI ŞI IPOTEZE DE ÎNCĂRCARE

Încărcările normate, coeficienţii încărcărilor şi încărcările de calcu sînt trecute în tabelul 1.

Tabelul 1

Nr. crt.	Încărcare	Încărcare normată (kN/m²)	Coeficientul încărcării $n=$	Încărcare de calcul (kN/m²)
1	Greutatea proprie (structura de rezistenţă + învelitoarea)	0,70	1,1	0,77
2	Zăpada			
	— uniformă pe întreaga cupolă	0,70	1,4	1,00
	— uniformă pe jumătate de cupolă	1,00	1,0	1,00
3	Vacuum	0,60	1,0	0,60
4	Încărcări din platforme	0,40	1,1	0,45
5	Încărcări accidentale şi rotunjiri	0,18	1,0	0,18

Încărcările din racorduri și conducte totalizînd circa 60 kN reprezintă o încărcare uniformă medie de 0,075 kN/m² care poate fi inclusă în încărcările accidentale.

La pleoștirea cupolei, acțiunea vîntului reprezintă secțiuni, avînd un efect de descărcare a încărcărilor gravitaționale; de aceea, efectul favorabil nu a mai fost luat în considerare.

Tot datorită pleoștirii, încărcările au fost considerate distribuite în plan orizontal, concentrarea la noduri făcîndu-se în baza suprafețelor aferente.

Mai trebuie precizat că încărcarea din zăpadă distribuită pe jumătate de cupolă s-a făcut prin analogie cu încărcarea nesimetrică a arcelor, situație care se dovedește mai defavorabilă decît încărcarea totală (uniformă) a cupolei.

În lipsa unor prevederi concrete ale standardului român pentru încărcări date de zăpadă (STAS 10101/21—78), cît și a standardelor străine, intensitatea încărcării normate a fost luată, de comun acord cu beneficiarul, $p = 1$ kN/m² cît încărcarea de calcul din ipoteza încărcării cu zăpadă pe toată cupola), însă cu un coeficient al încărcării $n = 1$.

Pentru determinarea solicitărilor maxime au fost stabilite două ipoteze de încărcare intermediare și anume:

a) încărcare uniformă pe toată cupola, exclusiv zăpada, de 2,3 kN/m²;

b) zăpada distribuită uniform pe jumătate de cupolă, de 1 kN/m².

În baza combinațiilor de încărcari precedente au fost stabilite următoarele ipoteze de încărcare de bază:

1° încărcare uniformă pe toată cupola, inclusiv zăpada, de 3 kN/m²,

2° încărcare uniformă pe toată cupola, de 2,3 kN/m², cu zăpada pe jumătate.

Ipoteza 2° s-a dovedit a fi cea care dimensionează cupola.

2.4. DATE GENERALE DE CALCUL

Calculele numerice au fost efectuate în baza unui program general de calcul reprezentînd o variantă a programului SAP IV, adaptat pentru calculatoarele românești FELIX.

Datele de intrare au fost:

— coordonatele nodurilor (exprimate în coordonate carteziene într-un sistem global X, Y, Z) în baza datelor privind geometria cupolei;

— barele au fost tratate ca elemente de grindă, avînd secțiuni inițiale date, apoi modificate, pentru fiecare geometrie de cupolă, pînă ce s-a obținut dimensionarea cea mai economică, în baza sortimentului de profile disponibil.

— încărcările (în cele două ipoteze amintite la § 2.3), concentrate la noduri;

— rezemarea cupolei se face prin articulații plasate la capătul inferior al tuturor meridianelor (căpriorilor).

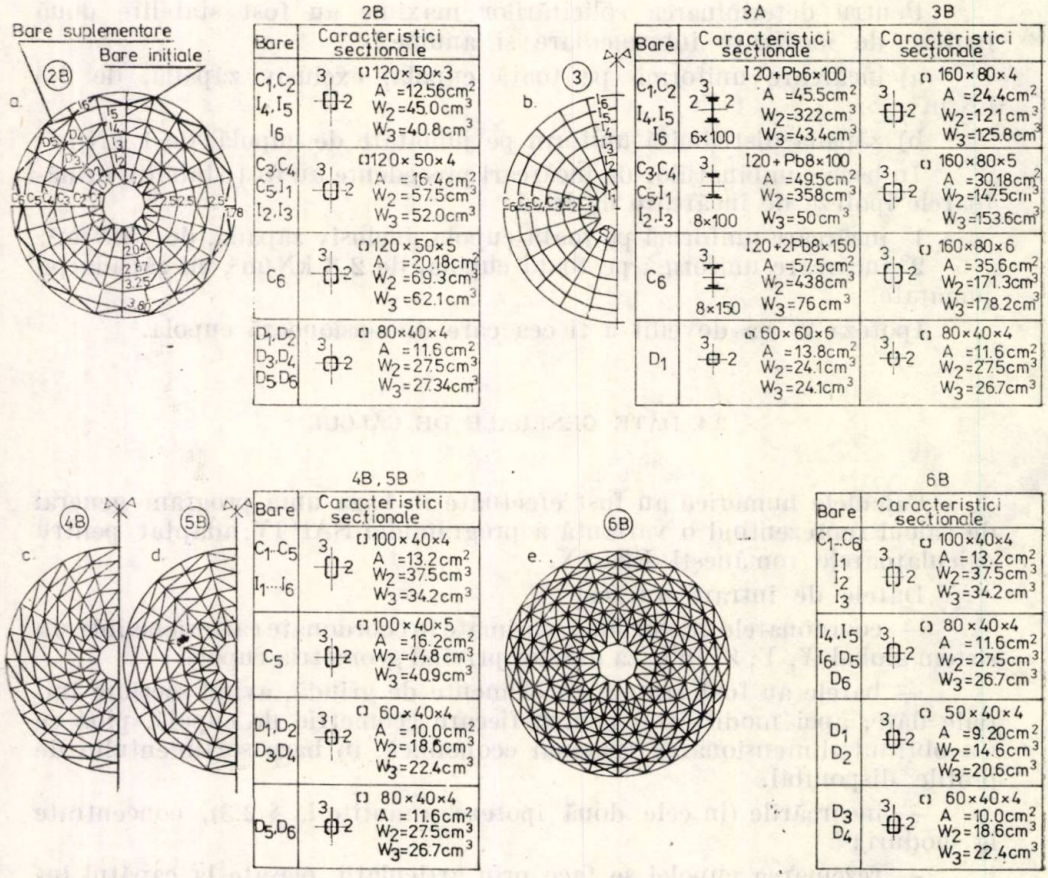
Programul amintit furnizează atît deplasările nodale în sistemul global de coordonate X, Y, Z, cît şi eforturile secţionale în raport cu un sistem local de coordonate 1, 2, 3 (coordonata 1 corespunde axei barei, coordonatele 2 şi 3 axelor din planul secţiunii transversale).

3. GEOMETRII ŞI VARIANTE STUDIATE

Au fost luate în considerare următoarele geometrii:

1° Cupola semiregulată (analizată iniţial în [12]).
2° Cupola semiregulată îmbunătăţită [12] (fig. 2a).
3° Cupola cu nervuri (fig. 2b).
4° Cupola Schwedler cu diagonale simple (fig. 2c).
5° Cupola Schwedler cu diagonale alternate (fig. 2d).
6° Cupola Schwedler cu diagonale încrucişate (fig. 2e).

O vedere perspectivă a cupolei tip Schwedler cu diagonale încrucişate, folosind un sistem de coordonate sferice, este redată în figura 3.



2B

Bare	Caracteristici secţionale
C_1, C_2 I_4, I_5 I_6	□120×50×3 A =12.56cm² W_2=45.0cm³ W_3=40.8cm³
C_3, C_4 C_5, I_1 I_2, I_3	□120×50×4 A =16.4cm² W_2=57.5cm³ W_3=52.0cm³
C_6	□120×50×5 A =20.18cm² W_2=69.3cm³ W_3=62.1cm³
D_1, D_2 D_3, D_4 D_5, D_6	□80×40×4 A =11.6cm² W_2=27.5cm³ W_3=27.34cm³

3A

Bare	Caracteristici secţionale
C_1, C_2 I_4, I_5 I_6	I20+Pb6×100 A =45.5cm² W_2=322cm³ W_3=43.4cm³
C_3, C_4 C_5, I_1 I_2, I_3	I20+Pb8×100 A =49.5cm² W_2=358cm³ W_3=50cm³
C_6	I20+2Pb8×150 A =57.5cm² W_2=438cm³ W_3=76cm³
D_1	□60×60×6 A =13.8cm² W_2=24.1cm³ W_3=24.1cm³

3B

Bare	Caracteristici secţionale
C_1, C_2 I_4, I_5 I_6	□160×80×4 A =24.4cm² W_2=121cm³ W_3=125.8cm³
C_3, C_4 C_5, I_1 I_2, I_3	□160×80×5 A =30.18cm² W_2=147.5cm³ W_3=153.6cm³
C_6	□160×80×6 A =35.6cm² W_2=171.3cm³ W_3=178.2cm³
D_1	□80×40×4 A =11.6cm² W_2=27.5cm³ W_3=26.7cm³

4B, 5B

Bare	Caracteristici secţionale
C_1-C_5 I_1···I_6	□100×40×4 A =13.2cm² W_2=37.5cm³ W_3=34.2cm³
C_5	□100×40×5 A =16.2cm² W_2=44.8cm³ W_3=40.9cm³
D_1, D_2 D_3, D_4	□60×40×4 A =10.0cm² W_2=18.6cm³ W_3=22.4cm³
D_5, D_6	□80×40×4 A =11.6cm² W_2=27.5cm³ W_3=26.7cm³

6B

Bare	Caracteristici secţionale
C_1-C_6 I_1 I_2 I_3	□100×40×4 A =13.2cm² W_2=37.5cm³ W_3=34.2cm³
I_4, I_5 I_6, D_5 D_6	□80×40×4 A =11.6cm² W_2=27.5cm³ W_3=26.7cm³
D_1 D_2	□50×40×4 A =9.20cm² W_2=14.6cm³ W_3=20.6cm³
D_3 D_4	□60×40×4 A =10.0cm² W_2=18.6cm³ W_3=22.4cm³

Fig. 2

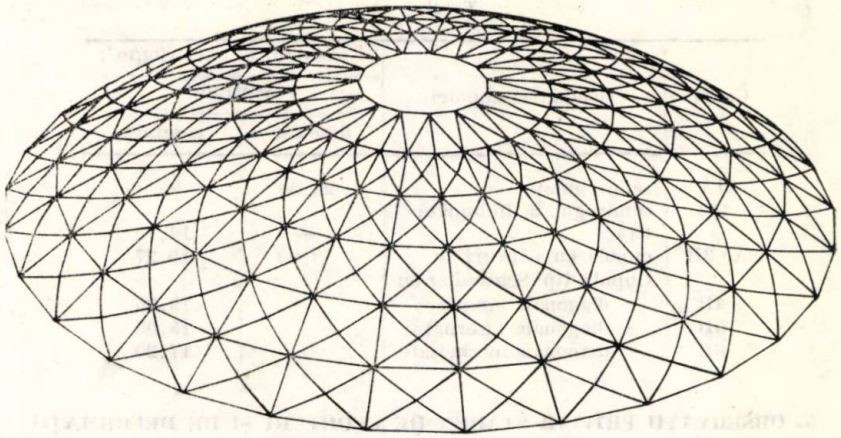


Fig. 3

În vederea alcătuirii unor secțiuni mai raționale, pentru tipurile 1 și 3 au fost studiate cîte două variante și anume una cu bare din profile laminate obișnuite și cealaltă cu bare din profile cu pereți subțiri închise. Notînd aceste secțiuni cu A, respectiv B, au fost studiate următoarele cazuri : 1A, 2B, 3A, 3B, 4B, 5B, 6B.

Numărul de noduri, de bare și tipurile distincte de secțiuni au fost trecute în tabelul 2.

Tabelul 2

Cazul	Numărul de noduri	Numărul de bare	Numărul de tipuri de secțiuni diferite	Figura
1A	152	320	8	1b
2B	160	348	4	2a
3A,3B	156	240	4	2b
4B	156	240	4	2c
5B	156	240	4	2d
6B	156	360	4	2e

4. CONSUMUL DE OȚEL

Drept criteriu pentru aprecierea eficienței economice a cupolelor descrise precedent a fost ales consumul de oțel. În acest scop au fost pregătite proiecte de execuție detaliate și, în baza lor, au fost evaluate consumurile trecute în tabelul 3.

Se remarcă avantajul net pe care îl prezintă soluțiile la care secțiunile sînt casetate din profile cu pereți subțiri, față de secțiunile din profile laminate.

Tabelul 3

Cazul	Geometria cupolei	Consumul de oţel (kg/m²)	
		Secţiuni	
		deschise	casetate
1A	semiregulată	25,58	—
2B	semiregulată îmbunătăţită	—	14,73
3A, 3B	cupolă cu nervuri	30,90	19,27
	Cupolă tip Schwedler cu		
4B	— diagonale simple	—	15,06
5B	— diagonale alternate	—	15,06
6B	— diagonale încrucişate	—	17,20

5. OBSERVAŢII PRIVIND STAREA DE EFORTURI ŞI DE DEFORMAŢII

Configuraţia iniţială a cupolei reticulate (1A) este caracterizată prin variaţii mari de eforturi şi de tensiuni în bare de acelaşi tip, ceea ce a antrenat un număr relativ mare (opt) de secţiuni distincte utilizate.

Prin modificarea geometriei, în speţă completarea inelelor de la partea superioară şi inferioară cu diagonale (2B), s-a realizat o relativă uniformizare valorică a eforturilor axiale în barele de acelaşi tip, precum şi o micşorare substanţială a momentelor încovoietoare (vezi tabelul 4) şi implicit reducerea tensiunilor maxime din bare.

Tabelul 4

Tipul cupolei	Eforturi secţionale în bare		
	Meridiane	Inele	Diagonale
1	2	3	4
1A	N_{max}=252	N_{max}=150	N_{max}= 83
	M_2 = 3,5	M_2 = 6,0	M_2 = 0,3
	M_3 = 3,6	M_3 = 1,0	M_3 = 0,15
	N =125	N = 70	
	M_2 = 2,2	N_{2max}= 11,6	—
	M_{3max}= 21	M_3 = 1,5	
2B	N_{max}=192	N_{max}=150	N_{max}= 78
	M_2 = 2,84	M_2 = 2,8	M_2 = 0,14
	M_3 = 0,06	M_3 = 0,2	M_3 = 0,1
	N =131	N = 93	
	M_{2max}= 4,56	M_{2max}= 4,8	—
	M_3 = 0,24	M_3 = 0,03	
3A	N_{max}=161	N_{max}=263	N_{max}= 82
	M_2 = 3,5	M_2 = 13,0	M_2 = 0,15
	M_3 = 8,7	M_3 = 0,01	M_3 = 0,1
	N = 62,4	N =21,7	
	M_{2max}= 31,6	M_2 = 2,6	—
	M_3 = 0,8	M_{3max}= 6,0	

1	2	3	4
3B	N_{max}=162	N_{max} =200	N_{max}= 46
	M_2 =4,5	M_2 = 1,5	M_2 = 0,72
	M_3 = 18,3	M_3 = 0,3	M_3 = 0,08
	N =142	N = 26	
	M_2 = 1,2	M_2 = 1,3	—
	M_{3max}= 21,9	M_{3max}= 18,5	
4B	N_{max}=194	N_{max} =167	N_{max}= 59
	M_2 = 0,8	M_2 = 0,07	M_2 =0,4
	M_3 = 0,23	M_3 = 0,03	M_3 = 0,5
	N =192	N =134	
	M_{2max}= 1,1	M_{2max}= 1,4	—
	M_3 = 0,01	M_3 = 0,1	
5B	N_{max} =194	N_{max} =176	N_{max}= 52
	M_{2max}= 1,0	M_2 = 0,1	M_2 = 0,23
	M_3 = 0,17	M_3 = 0,02	M_3 = 0,12
6B	N_{max} =148	N_{max} =138	N_{max}= 43
	M_2 = 0,08	M_{2max}= 1,36	M_2 = 0,1
	M_{3max}= 0,27	M_3 = 0,14	M_3 = 0,05

(N în kN, M în kNm)

La cupola cu nervuri este cunoscut faptul că, pentru încărcări nesimetrice, invariabilitatea geometrică este asigurată doar prin rigiditatea nodurilor, fapt care antrenează momente încovoietoare considerabile. Analiza efectuată pe acest tip de cupole (3A și 3B) a evidențiat atît valorile mari ale momentelor încovoietoare, cît și creșterea substanțială a valorilor maxime ale eforturilor axiale din barele inelare.

Cupolele tip Schwedler, în variantele studiate (4B, 5B, 6B), sînt static determinate dacă nodurile sînt articulații sferice; acest fapt are drept consecință, în cazul nodurilor rigide, momente practic neînsemnate.

În privința tipurilor de secțiune, din comparația cazurilor $1A$ și $2B$, respectiv $3A$ și $3B$ rezultă avantajul net pe care îl prezintă secțiunile cu pereți subțiri, casetate. La profilele laminate uzuale, secțiunile au momente de inerție mult diferite după cele două axe principale de inerție, ceea ce este dezavantajos atît pentru flambaj, cît și pentru încovoierea oblică. După mai multe încercări cu diferite tipuri de profile s-a adoptat ca secțiune de bară secțiunea casetată dreptunghiulară (realizată din două profile U cu pereți subțiri, grosimea minimă admisă fiind de 4 mm).

Datorită acestor considerente, cele trei variante de cupole tip Schwedler au fost studiate numai în varianta B (secțiune casetată). Diferența de consum de oțel este atît de mică între cele două variante (4B și 5B), încît alegerea geometriei urmează să fie făcută din alte considerente.

Tendința de deformare a cupolelor, în schema de încărcare nesimetrică 2° este următoarea:

— pe orizontală, deplasare dinspre jumătatea încărcată cu zăpadă spre aceea neîncărcată;

— pe verticală, tendința de coborîre neuniformă, în zona aglomerată cu zăpadă și de ridicare a părții opuse, neîncărcate.

6. OBSERVAŢII FINALE ŞI CONCLUZII

Pe marginea analizei făcute (şi care nu a fost detaliată în prezentul studiu) sînt de relevat o serie de probleme.

a) Încărcarea cu zăpadă pe jumătate de cupolă a fost luată în considerare prin extinderea încărcării în cazul încărcării uniforme a unei jumătăţi de arc.

Desigur că distribuţia uniformă în plan orizontal este o schematizare menită să simplifice, în anumită măsură, calculele intermediare. Intensitatea încărcării este însă subiect de discuţie şi eventual de introdus în prescripţii. Cu cît intensitatea va fi mai redusă în comparaţie cu restul încărcării — de exemplu 0,50 kN/m² sau 0,75 kN/m² — cu atîta efectul încărcării nesimetrice va fi mai puţin defavorabil la evaluarea stării de eforturi şi de deformaţii.

Trebuie semnalată lipsa unor asemenea date în prescripţiile din diferite ţări, fapt relevat şi pentru acţiunea vîntului, cu prilejul unei conferinţe organizate la Universitatea din Surrey în septembrie 1980 [1].

b) Cupolele semiregulate (cu simetrie ciclică) nu pot fi calculate prin metode aproximative — cum ar fi metoda plăcii înlocuitoare ; calculul trebuie să fie abordat prin metoda generală a deplasărilor, cu aplicare pe calculator.

c) Conformarea geometrică regulată este recomandabilă asigurînd o stare de eforturi mai uniformă, cu momente încovoietoare nesemnificative şi, implicit, un consum de metal mai redus.

d) Sînt recomandabile secţiunile casetate deoarece permit realizarea mai simplă a nodurilor şi necesită secţiuni mai reduse decît în cazul secţiunilor deschise.

Primit la redacţie la 24 februarie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. S. BAKER, *A comparison of the Codes of Practice used in different countries for the determination of wind loads on domes*, In : *Analysis, Design and Construction of Braced Domes*, ed. Z. S. Makowski, Granada, London, 1984, pp. 315—336.
2. V. GIONCU, *Probleme de instabilitate la structurile spaţiale*, Simpozionul Structuri spaţiale. Teorie şi practică. Cluj-Napoca, 16—18 mai 1985.
3. R. KIRCHHOFF, *Statik der Baukonstruktionen. III. Räumliches Fachwerk*, Hütte Des Ingenieurs Taschenbuch, Bd. III, 26 Aufl., Wilhelm Ernst Sohn, Berlin, 1936, pp. 77—80.
4. Z. S. MAKOWSKI, *Räumliche Tragwerke aus Stahl*, Stahleisen mbH, Düsseldorf, 1963.
5. Z. S. MAKOWSKI, *Trends and developments in space structures*, Bul. ştiinţ. al Institutului de Construcţii Bucureşti, **21**, *1—2*, 3—4 (1978).
6. Z. S. MAKOWSKI, *Wide span structures — braced domes*, Building specification, Oct. 1979.
7. Z. S. MAKOWSKI, *A history of the development of domes and a review of recent achievements world-wide*, In : *Analysis, Design and Construction of Braced Domes*, ed. Z. S. Makowski, Granda, London, 1984, pp. 1—85.
8. O. MOHR, *Technische Mechanik. Abhandlung XII. Das Raumfachwerk*, Verlag von Wilhelm Ernst Sohn, Berlin, 1906, pp. 435—459.

9. P. MULLORD, *Introduction to thè analysis of braced domes*, In : *Analysis, Design and Construction of Braced Domes*, ed. Z. S. Makowski, Granda, London, 1984, pp. 87—95.
10. E. W. PARKES, *Braced Framework*, 2nd edn, Pergamon Press, Oxford, 1974.
11. K. POHL, G. POHLMANN, *Statik der Baukonstruktionen*, Bd. **III**, 28 Aufl. Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1956, pp. 131—138.
12. N. RĂDUICĂ, M. V. SOARE, *Contribuții la calculul cupolelor reticulate*, Studii și cercetări de mecanică aplicată, **41**, 6 (1982).
13. D. L. RICHTER *Development in Temcor aluminium domes*, In : *Analysis Design and Construction of Braced Domes*, ed. Z. S. Makowski, Granada, London, 1984, pp. 521—539.
14. T.—SH. SNIH, *Analysis of ribbed domes with polygonal rings*, J. Structural Division, Proc. ASCE, **82**, ST 6, November 1956.
15. D. T. WRIGHT, *Membrane forces and buckling in reticulated shells*, J. Structural Division, Proc. ASCE, **91**, ST 1, January 1965.

CALCULUL AMORTIZĂRII OSCILAȚIILOR DE DEBIT ȘI PRESIUNE ÎN FENOMENUL DE ȘOC HIDRAULIC

de I. JELEV

Institutul de cercetări hidrotehnice, București

Formula Darcy-Weisbach folosită în majoritatea modelelor matematice pentru calculul pierderilor de sarcină în mișcarea nepermanentă a apei, nu modelează suficient de exact amortizarea în timp a oscilațiilor de presiune și debit în fenomenul de șoc hidraulic.

Ținînd seama de structura dinamică a mișcării coloanei de apă în interiorul unei conducte în ipoteza fluidului compresibil, precum și de energia disipată în pereții elastici ai conductei, se propune o formulă pentru calculul amortizării oscilațiilor de debit și presiune ale apei, ce ia în considerație forțele de frecare de tip structural ([1] și [2]). Forțele de amortizare de tip structural sînt proporționale cu forțele elastice, dar defazate față de acestea cu un sfert de perioadă.

Prin aplicarea practică a formulei propuse se obține o concordanță bună între calculele teoretice și măsurătorile experimentale.

1. INTRODUCERE

În fenomenele fizice se utilizează curent trei tipuri distincte de forțe de frecare: forțe de frecare coulombiană, proporționale cu forța normală la suprafața de contact dintre două corpuri solide (fig. 1*a*); forțe de frecare vîscoasă, proporționale cu viteza de deplasare a unui obiect în interiorul unei mase de lichid (fig. 1*b*) și forțe de frecare structurale (fig. 1*c*), propor-

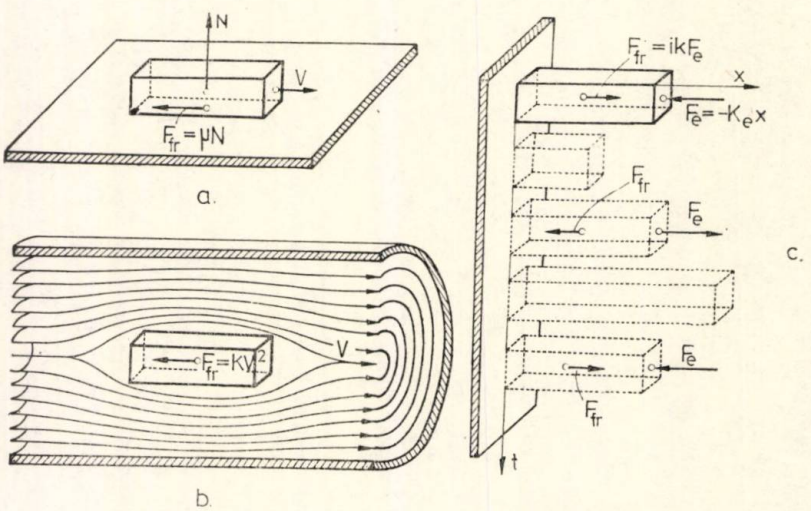


Fig. 1. Forțe de frecare: a—coulombiană; b—vîscoasă; c—structurală.

ționale cu forțele elastice ce se dezvoltă în interiorul unui corp supus unor deformații alternative ([1] și [2]).

În marea majoritate a aplicațiilor tehnice din mecanica fluidelor, pentru calculul pierderilor de sarcină în mișcarea permanentă și nepermanentă a apei, se folosește formula Darcy-Weisbach, formulă ce ia în considerație forțe de frecare de tip vîscos. Dacă pentru calculul pierderilor de sarcină în mișcarea permanentă și în mișcarea nepermanentă lent variabilă, formula Darcy conduce la rezultate în concordanță cu măsurătorile experimentale, în cazul mișcării nepermanente rapid variabile, rezultatele calculelor se abat sensibil de la valorile obținute experimental.

Preocupările pentru modelarea corectă a pierderilor de sarcină în fenomenul de șoc hidraulic, constituie obiectul multor lucrări din literatura de specialitate [3] — [7]. În continuare vom prezenta un model de calcul al atenuării oscilațiilor de debit și presiune în fenomenul de șoc hidraulic bazat pe amortizările de tip structural, utilizate în fizica corpurilor elastice.

Ținînd seama de compresibilitatea lichidului în fenomenul de șoc hidraulic (lichidul din conductă se comportă ca o coloană elastică de apă supusă la oscilații cu frecvență ridicată) se justifică introducerea unor forțe de frecare de tip structural pentru modelarea atenuării în timp a oscilațiilor de presiune și debit [8].

Într-adevăr, analizînd cinematica curgerii fluidului într-o conductă în regim permanent sau nepermanent, în ipoteza lichidului incompresibil (regim de curgere turbulent), distribuția vitezelor în două secțiuni diferite este cea reprezentată în figura 3*a*. Efortul tangențial proporțional cu variația vitezei în secțiune este concentrat în cea mai mare parte în stratul limită din imediata vecinătate a pereților. Forțele de frecare ce iau naștere în interiorul acestui strat, constituie cauza pierderilor de sarcină ce pot fi determinate cantitativ cu formula Darcy-Weisbach. Practic, pierderile de sarcină se realizează prin deplasarea particulelor de fluid în lungul conductei. În cazul fluidului compresibil (fig. 3*b*), profilul vitezelor în două secțiuni consecutive se modifică. Disiparea energiei se realizează în acest caz în întreaga masă a fluidului prin oscilații pozitive și negative ale particulelor fluide pe direcții paralele cu axa conductei. Ecartul în care are loc oscilația unei particule este neglijabil în comparație cu lungimea conductei.

Pe lîngă energia disipată datorită forțelor de frecare de tip structural în interiorul masei lichide, o parte mai mică de energie este disipată în pereții elastici ai conductei, printr-un mecanism similar.

2. ENERGIA DISIPATĂ PRIN FRECARE ÎN INTERIORUL PEREȚILOR ELASTICI AI CONDUCTEI

În timpul oscilațiilor rapid variabile ale apei în faza de creștere a presiunilor, conducta își mărește diametrul, preluînd o parte din energia de presiune a apei. În faza de scădere a presiunii, pereții elastici ai con-

ductei restituie energia primită lichidului, diminuată cu procentul disipat în pereții conductei. Pentru estimarea cantitativă a energiei disipate prin frecări structurale în pereții conductei, vom considera un tronson de conductă de lungime L (fig. 2), din care se izolează un inel circular de grosime egală cu grosimea pereților (e), și lățimea (Δx), măsurată în lungul generatoarei conductei. Elementul inelar desfășurat poate fi asimilat cu o bară cu secțiune dreptunghiulară $\Delta A = e\Delta x$ și lungimea l_0 (fig. 2). Elementul elastic de lungime l_0 și secțiune ΔA, este supus sub acțiunea variațiilor de presiune ale lichidului ($\pm\Delta p$) la comprimări și decomprimări succesive, similare unui resort. Ca urmare, în secțiunea ΔA apar eforturi unitare de întindere și compresiune σ, datorate forțelor elastice. Concomitent se dezvoltă în interiorul pereților conductei forțe de frecare de tip structural, ce se opun deformării elementului de lungime l_0.

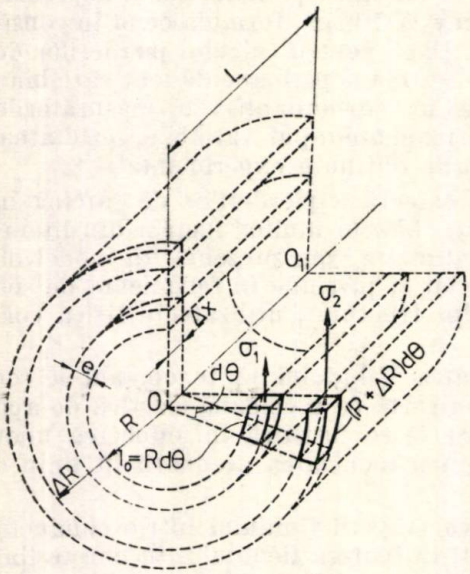


Fig. 2. — Deformarea unui tronson de conductă sub acțiunea forțelor de presiune

Conform definiției, forțele de frecare structurale [1], sînt proporționale cu forțele elastice, dar defazate față de acestea cu un sfert de perioadă ($T/4$). Forța elastică elementară ce acționează pe suprafața ΔA este

$$dF_e = \sigma\Delta A = \sigma e\Delta x. \tag{1}$$

Pe întreaga suprafață forța elastică (F_e) are expresia :

$$F_e = \int_0^L dF_e = \int_0^L \sigma e\, dx = \sigma eL. \tag{2}$$

Ținînd seama de faptul că $\sigma = \frac{R_0}{e}\Delta p$, expresia forței de frecare de tip structural (F_{fr}) devine :

$$F_{fr} = ik'F_e = ik'\sigma eL = ik'R_0L\,\Delta p, \tag{3}$$

unde k' este un coeficient de amortizare ce depinde de natura materialului peretelui conductei, iar i ține seama de defazajul cu un sfert de perioadă, față de forța elastică.

Lucrul mecanic efectuat de forța de frecare va fi :

$$L_{fr} = \frac{1}{2} F_{fr} \Delta l. \tag{4}$$

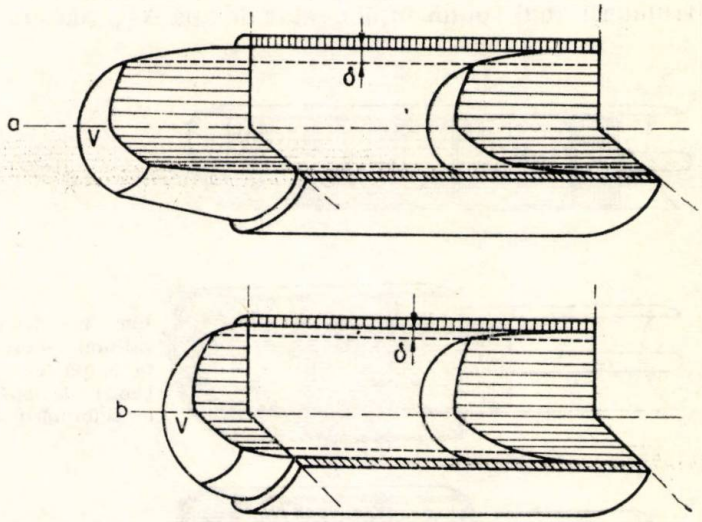


Fig. 3. — Distrbuții de viteze ale apei în secțiunea unei conducte: *a* — lichid incompresibil; *b* — lichid compresibil.

Coeficientul 1/2 ține seama de variația forței de frecare de la zero la maxim, iar Δl este deplasarea forței de frecare, identică cu deplasarea forței elastice (F_e), și având expresia :

$$\Delta l = \frac{2\pi R_0^2}{eE} \Delta p, \tag{5}$$

unde E reprezintă modulul de elasticitate al materialului din care este confecționată conducta.

Ținînd seama de formulele (3) și (5), expresia lucrului mecanic L_{fr} devine :

$$L_{fr} = \frac{1}{2} ik' R_0 L \Delta p \frac{2\pi R_0^2}{eE} \Delta p = ik' V_0 \frac{R_0}{eE} \Delta p^2, \tag{6}$$

unde V_0 este volumul de lichid din interiorul tronsonului de conductă analizat.

Raportat la unitatea de volum, lucrul mecanic disipat este :

$$\frac{L_{fr}}{V_0} = ik' \frac{R_0}{eE} \Delta p |\Delta p| = k' \frac{R_0}{eE} \Delta p_{-\frac{T}{4}} |\Delta p_{-\frac{T}{4}}|. \tag{7}$$

3. ENERGIA DISIPATĂ PRIN FRECARE ÎN COLOANA LICHIDĂ ÎN CAZUL UNOR OSCILAȚII RAPID VARIABILE

În fenomenul de șoc hidraulic, cantitatea de lichid cuprinsă într-un tronson de lungime inițială L crește, pe de o parte, datorită creșterii cu ΔR a razei conductei (ca urmare a creșterii presiunii cu Δp) pe de altă parte datorită pătrunderii unui volum suplimentar de apă ΔV_c (datorat compri-

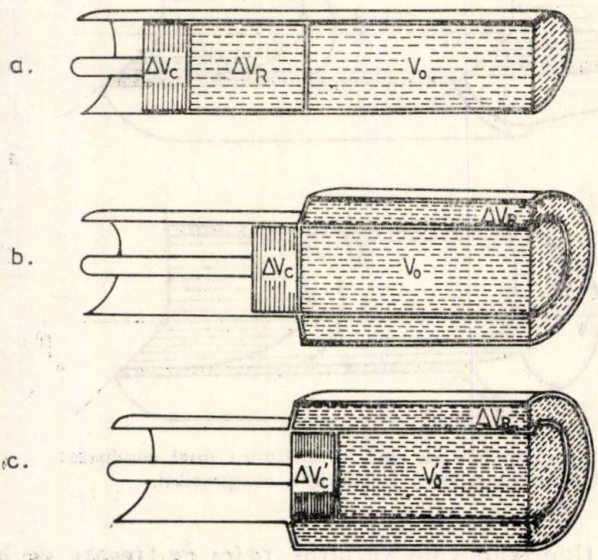


Fig. 4. — Scheme pentru calculul energiei disipate în timpul comprimării coloanei de apă, respectiv a deformării conductei.

mării apei din tronsonul de lungime L). Prin urmare, în tronsonul de conductă de lungime L (s-a neglijat variația lungimii tronsonului de conductă) și volum V_0, se va afla în final următoarea cantitate de apă corespunzătoare densității inițiale ρ_0 (fig. $4a \div c$) :

$$V = V_0 + \Delta V_R + \Delta V_c. \tag{8}$$

În relația (8), ΔV_R reprezintă volumul de apă suplimentar pătruns în tronsonul de conductă analizat, datorită creșterii razei conductei cu ΔR.

Forțele elastice de presiune vor efectua un lucru mecanic total :

$$L_p = L_R + L_c, \tag{9}$$

unde L_R este lucrul mecanic de deformație efectuat de forțele de presiune la creșterea razei conductei, iar L_c lucrul mecanic de compresiune efectuat de aceste forțe.

3.1. ENERGIA DISIPATĂ ÎN LICHID CA URMARE A CREȘTERII RAZEI CONDUCTEI

Pentru început vom evalua lucrul mecanic efectuat de forțele elastice de presiune datorită creșterii razei conductei cu valoarea ΔR (fig. 5).

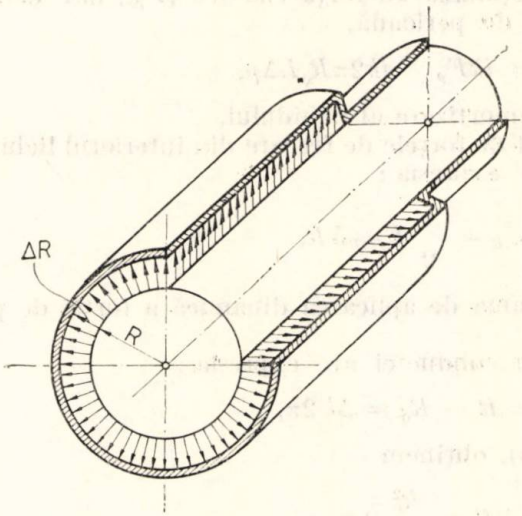


Fig. 5. — Schemă pentru calculul energiei disipate în timpul comprimării coloanei de apă, respectiv a deformării conductei.

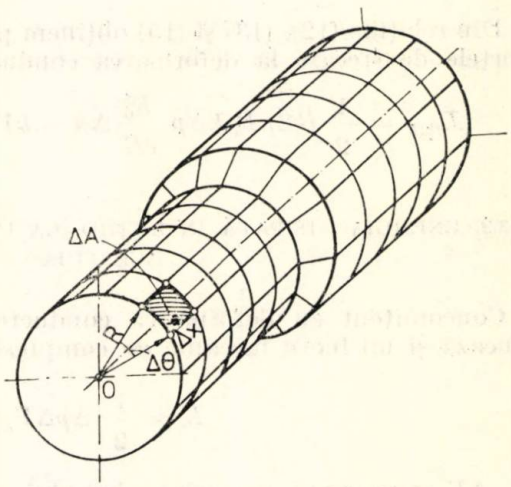


Fig. 6. — Notații utilizate pentru calculul forțelor de presiune și atenuarea oscilațiilor de presiune.

Forța elastică unitară exercitată pe pereții conductei este :

$$dF_p = \Delta A \, \Delta P, \tag{10}$$

unde $\Delta A = R_0 \Delta\theta \Delta x$ (fig. 6).

Forţa de presiune pe pereţii tronsonului de lungime L va fi :

$$F_p = \iint_{(S)} \Delta A \Delta p = 2\pi R_0 L \Delta p. \tag{11}$$

Forţa de frecare de tip structural, datorită deformării pereţilor conductei ($F_{fr,R}$), este proporţională cu forţa elastică (F_p), dar defazată faţă de aceasta cu un sfert de perioadă,

$$F_{fr,R} = ikF_p = ik2\pi R_0 L \Delta p, \tag{12}$$

unde k este coeficientul de amortizare al lichidului.

Lucrul mecanic efectuat de forţele de frecare din interiorul lichidului la deformarea conductei are expresia :

$$L_{fr,R} = \frac{1}{2} F_{fr,R} \Delta R, \tag{13}$$

unde coeficientul 1/2 ţine seama de aplicarea dinamică a forţei de presiune F_p.

Deoarece variaţia razei conductei are expresia :

$$\Delta R = R - R_0 = \Delta l / 2\pi, \tag{14}$$

înlocuind pe Δl cu relaţia (5), obţinem

$$\Delta R = \frac{R_0^2}{eE} \Delta p. \tag{15}$$

Din relaţiile (12), (13) şi (15) obţinem pentru lucrul mecanic efectuat de forţele de frecare la deformarea conductei :

$$L_{fr,R} = \frac{1}{2} ik2\pi R_0 L \Delta p \frac{R_0^2}{eE} \Delta p = kV_0 \frac{R_0}{eE} \Delta p_{-\frac{T}{4}} |\Delta p_{-\frac{T}{4}}|. \tag{16}$$

3.2. ENERGIA DISIPATĂ ÎN LICHID CA URMARE A COMPRESIBILITĂŢII ACESTUIA

Concomitent cu deformarea conductei, forţa elastică de presiune efectuează şi un lucru mecanic de compresiune :

$$L_c = \frac{1}{2} \Delta p \Delta V_c, \tag{17}$$

unde ΔV_c reprezintă variaţia volumului de apă la creşterea presiunii cu Δp.

Corespunzător, forţele de frecare de tip structural efectuează un lucru mecanic de frecare datorat compresiei :

$$L_{fr,c} = \frac{1}{2} ik \Delta p \Delta V_c. \tag{18}$$

În relația (18) ΔV_c are expresia :

$$\Delta V_c = \frac{1}{\varepsilon}(V_0 + \Delta V_R + \Delta V_c)\Delta p \approx \frac{1}{\varepsilon} V_0 \Delta p, \tag{19}$$

unde ε este modulul de elasticitate cubică al apei. Introducînd pe (19) în relația (18) obținem, pentru lucrul mecanic efectuat de forțele de frecare ca urmare a comprimării lichidului, formula :

$$L_{fr,c} = kV_0 \frac{1}{2\varepsilon} \Delta p_{-\frac{T}{4}} |\Delta p_{-\frac{T}{4}}|. \tag{20}$$

3.3. ENERGIA TOTALĂ DISIPATĂ ÎN LICHID ȘI ÎN PEREȚII CONDUCTEI

Lucrul mecanic total efectuat de forțele de frecare din interiorul lichidului, ca urmare a deformării conductei și a comprimării lichidului are expresia :

$$L_{fr,p} = kV_0 \frac{R_0}{eE} \Delta p_{-\frac{T}{4}} |\Delta p_{-\frac{T}{4}}| + kV_0 \frac{1}{2\varepsilon} \Delta p_{-\frac{T}{4}} |\Delta p_{-\frac{T}{4}}| =$$

$$= kV_0 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{2R_0}{eE} \right) \Delta p_{-\frac{T}{4}} |\Delta p_{-\frac{T}{4}}|. \tag{21}$$

Ținînd seama de faptul că $\frac{1}{\varepsilon} + \frac{2R_0}{eE} = \frac{1}{\rho a^2}$, unde (a) este celeritatea, relația (21) devine :

$$L_{fr,p} = kV_0 \frac{1}{2\rho a^2} \Delta p_{-\frac{T}{4}} |\Delta p_{-\frac{T}{4}}| \tag{22}$$

sau, raportat la unitatea de volum,

$$\frac{L_{fr,p}}{V_0} = \frac{k}{2\rho a^2} \Delta p_{-\frac{T}{4}} |\Delta p_{-\frac{T}{4}}|. \tag{23}$$

Ținînd seama și de energia disipată pe unitatea de volum în pereții elastici ai conductei (7) obținem următoarea relație pentru energia totală disipată pe unitatea de volum :

$$\frac{L_{fr,T}}{V_0} = \left(k' \frac{R_0}{eE} + k \frac{1}{2\rho a^2} \right) \Delta p_{-\frac{T}{4}} |\Delta p_{-\frac{T}{4}}| = K \Delta p_{-\frac{T}{4}} |\Delta p_{-\frac{T}{4}}|, \tag{24}$$

unde $K = k' \frac{R_0}{eE} + k \frac{1}{2\rho a^2}$.

4. CALCULUL ATENUĂRII OSCILAȚIILOR DE PRESIUNE ÎN IPOTEZA AMORTIZĂRILOR DE TIP STRUCTURAL

În fenomenul analizat, disiparea energiei se concretizează prin reducerea continuă a amplitudinilor oscilațiilor de presiune și debit. În momentul comprimării maxime a coloanei lichide, debitul fiind nul, întreaga energie se transformă în energie de compresiune. Energia disipată la comprimarea volumului de lichid din conductă poate fi evidențiată prin diferența existentă între amplitudinea a două oscilații consecutive.

Lucrul mecanic unitar (raportat la unitatea de volum) necesar pentru ridicarea presiunii lichidului cu valoarea Δp, este :

$$\frac{L_{\Delta p}}{V_0} = \frac{1}{2\rho a^2}\Delta p^2. \tag{25}$$

În realitate, datorită frecărilor, o parte din lucrul mecanic $L_{\Delta p}$ se va disipa sub formă de căldură, astfel încît presiunea va crește cu o valoare mai mică $\Delta p' < \Delta p$.

Diferența dintre cele două lucruri mecanice $L_{\Delta p}$ și $L_{\Delta p'}$, va fi egală cu energia disipată (în fiecare m^3 de apă) prin frecări structurale în masa de lichid și pereții elastici ai conductei :

$$\frac{1}{2\rho a^2}(\Delta p^2 - \Delta p'^2) = K\,\Delta p_{-\frac{T}{4}}|\Delta p_{-\frac{T}{4}}|. \tag{26}$$

Deoarece $\Delta p \approx \Delta p_{-\frac{T}{4}}$, din relația (26) obținem :

$$\Delta p^2_{-\frac{T}{4}} - \Delta p'^2 = 2\rho a^2 K \Delta p^2_{-\frac{T}{4}}$$

sau

$$\frac{\Delta p'}{\Delta p_{-\frac{T}{4}}} = \sqrt{1 - 2\rho a^2 K}\cdot \tag{27}$$

Considerînd o creștere de presiune $\Delta p'$ egală cu amplitudinea Δp_N a oscilației de presiune (unde N este un număr de ordine atașat fiecărei amplitudini pozitive de presiune sau debit) și raportînd-o la amplitudinea anterioară Δp_{N-1} (defazată cu T față de Δp_N), relația (27) poate fi scrisă :

$$\Delta p_N/\Delta p_{N-1} = (1 - 2\rho a^2 K)^2 = (1 - K')^2 = K_0, \tag{28}$$

unde $K' = 2\rho\, a^2 K$, iar K_0 este constanta de amortizare, indicînd faptul că raportul dintre două amplitudini pozitive consecutive (fig. 7) este constant.

Pentru verificarea acestei concluzii s-au analizat măsurătorile efectuate pe un stand experimental existent în ICH-București [11]. Standul este reprezentat schematic în figura 8 și cuprinde în principal un rezervor

cu nivel constant ($H = 7{,}5$ m), o conductă Ø 125 mm ($L = 161$ m), o vană cu închidere rapidă și un rezervor cu deversor pentru măsurarea debitului. În lungul conductei sînt montate la distanțe egale prize pentru traductorii de presiune. S-au efectuat manevre de închidere rapidă a vanei ($t_i < 1/10$ s) pentru diferite debite inițiale. În figurile 9*a* și *b* s-au repre-

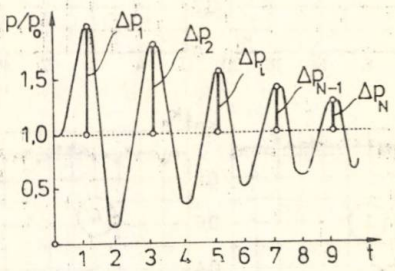


Fig. 7. — Notații utilizate pentru calculul forțelor de presiune și atenuarea oscilațiilor de presiune.

zentat valorile constantei K_0 determinate experimental pentru două valori diferite ale debitului inițial ($Q_0 = 13{,}5$ 1/s, respectiv 9,4 1/s). Se obține o distribuție practic constantă a valorilor coeficientul K_0, cu abateri

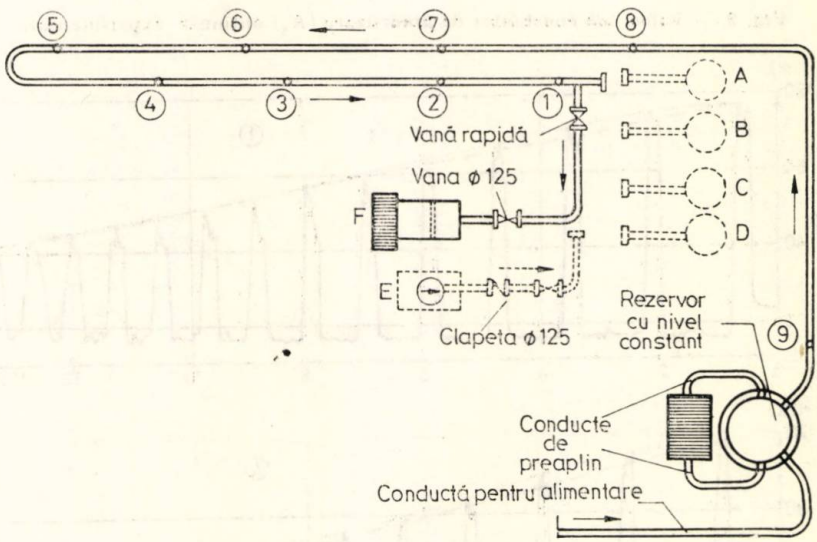


Fig. 8. — Schema instalației experimentale: *A* — rezervor de aer; *B* — castel de echilibru; *C* — supapă de suprapresiune; *D* — supapă de aerisire-dezaerisire; *E* — pompă; *F* — rezervor cu deversor de măsură.

mici situate de o parte și de alta a unei valori constante. Pentru debitul inițial $Q_0 = 9{,}4$ 1/s s-au reprezentat în figurile 10 *a* și *b* variațiile presiunilor înregistrate în punctele 1 și 4 de pe conductă, precum și înfășură-

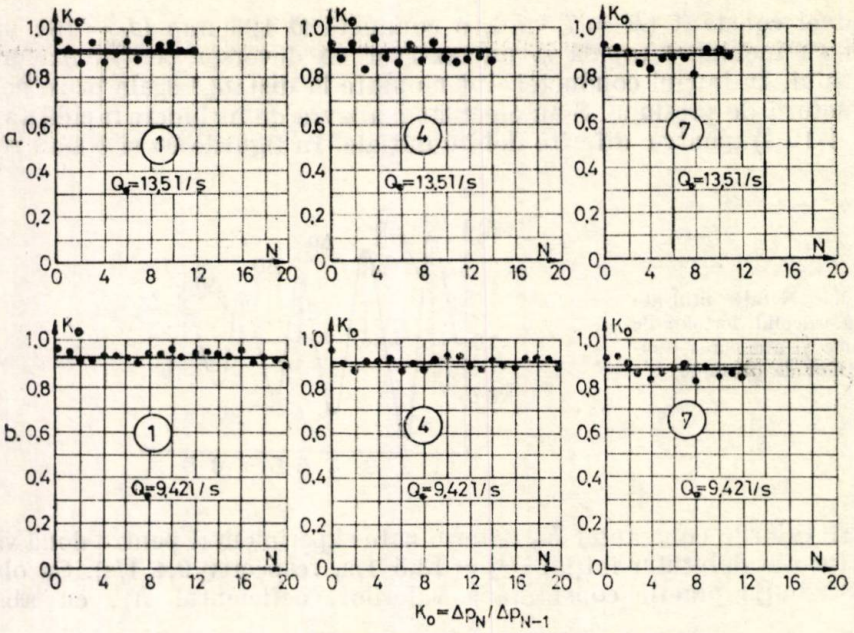


Fig. 9. — Valori ale constantei de amortizare (K_0) obținute experimental.

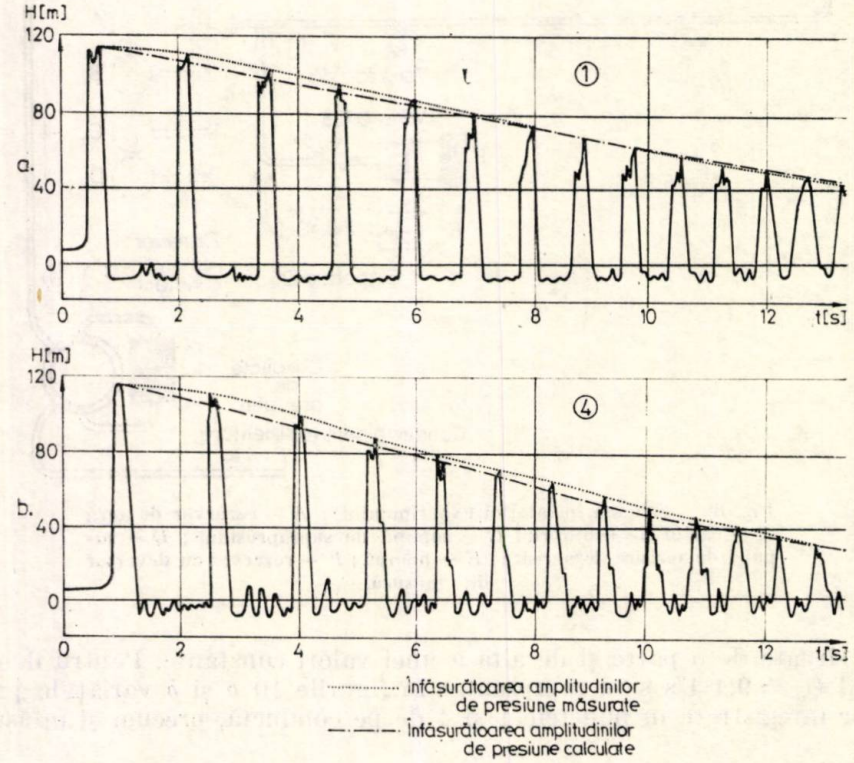


Fig. 10. — Oscilații de presiune înregistrate pe instalația experimentală (Q_0 = 9,4 l/s).

toarea amplitudinilor presiunilor măsurate, respectiv calculate. Se observă o bună concordanță între măsurătorile experimentale și calculele efectuate cu relația propusă.

O analiză mai detaliată a relației (28) indică faptul că în cele mai multe situații, ponderea disipării energiei în pereții elastici ai conductei este neglijabilă în comparație cu cea din masa lichidă. Într-adevăr, pentru o conductă de oțel cu grosimea peretelui de 10 mm ($E = 2{,}1 \cdot 10^{10}$ kgf/m^2) și o celeritate $a = 1000$ m/s, coeficientul K' are expresia :

$$K' = 2\rho a^2 K = k + k' \frac{2\rho a^2}{eE} R_0 = k + k' R_0. \tag{29}$$

Pentru o variație invers proporțională a coeficienților de amortizare k și k' în raport cu modulul de elasticitate al apei (ε), respectiv al oțelului (E) se obține o valoare a raportului dintre cei doi coeficienți de amortizare aproximativ egală cu 10^{-2}. Neglijînd produsul $k'R_0$ în raport cu coeficientul de amortizare al lichidului (k) se poate admite practic $K' \approx k$.

Ponderea energiei disipate în conductă este semnificativă numai în cazul unor conducte cu pereți subțiri foarte elastici și cu diametru mare. În condițiile neglijării coeficientului k', relația (28) poate fi aproximată prin :

$$\frac{\Delta p_N}{\Delta p_{N-1}} \approx (1-k)^2. \tag{30}$$

5. INFLUENȚA CANTITĂȚII DE AER DIZOLVATE ÎN APĂ

Din analiza măsurătorilor efectuate pe standul experimental (pentru diferite cantități de aer dizolvate în apă*), se constată o strînsă depen-

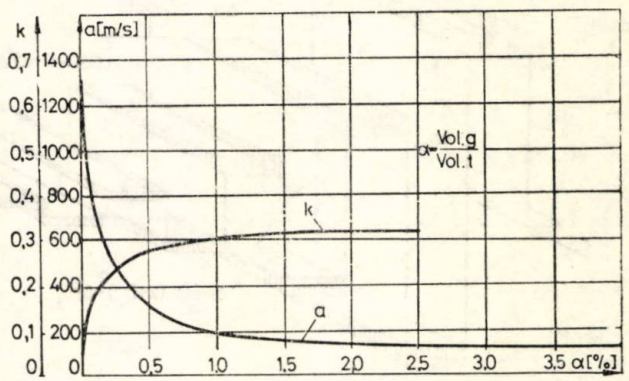


Fig. 11. — Variația celerității (a) și a coeficientului de amortizare al apei (k) în funcție de cantitatea de aer dizolvată în apă.

dență a amortizării oscilațiilor de presiune de cantitatea de aer dizolvată în apă. Cantitatea de aer dizolvată în apă modifică coeficientul de compre-

*) Măsurătorile au fost efectuate de dr. ing. Gh. Constantinescu [12].

sibilitate cubică al apei (ε). Pe măsură ce cantitatea de aer din conductă crește, celeritatea și modulul de elasticitate cubică scad, iar coeficientul de amortizare crește. Prin urmare, și atenuarea oscilațiilor de presiune este mai intensă. În figura 11 se reprezintă legea de variație a celerității și a coeficientului de amortizare k în funcție de cantitatea de aer dizolvată în apă pentru presiunea $p = 1$ at. În realitate există o familie de curbe reprezentînd variația coeficientului de amortizare k în funcție de cantitatea de aer dizolvată în apă, avînd ca parametru variabil presiunea.

6. VARIAȚIA COEFICIENTULUI DE AMORTIZARE ÎN LUNGUL CONDUCTEI

Graficele din figura 9 pun în evidență o ușoară diminuare a valorii coeficientului K_0 începînd dinspre vana rapidă spre rezervorul de nivel constant, concomitent cu micșorarea amplitudinii oscilațiilor de presiune

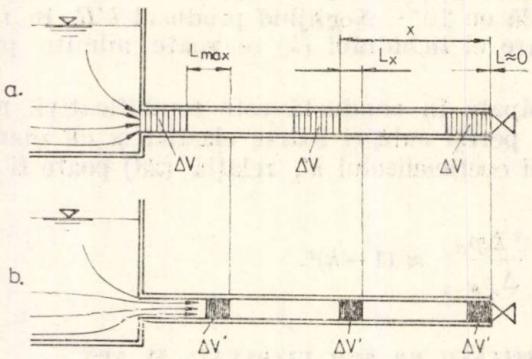


Fig. 12. — Schemă pentru calculul energiei disipate în diferite secțiuni ale conductei.

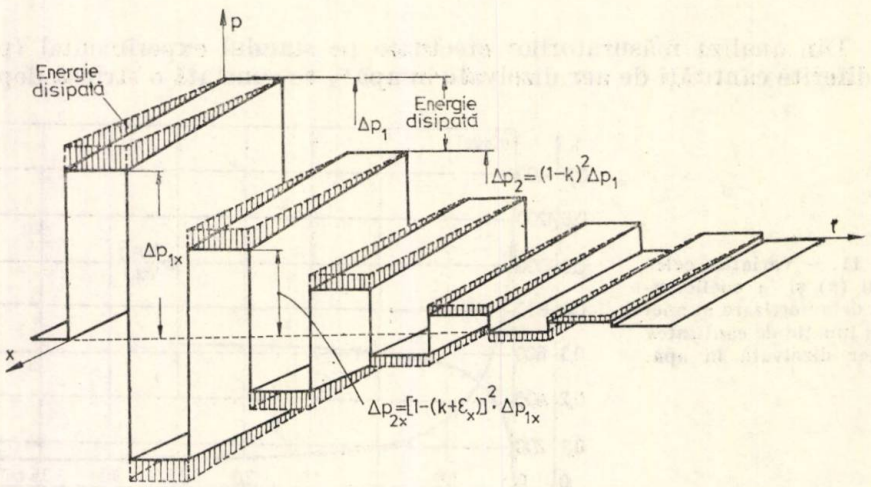


Fig. 13. — Schema distribuției oscilațiilor de presiune și a energiei disipate în funcție de spațiu și timp.

(fig. 13). Pe tronsonul de conductă situat în imediata apropiere a rezervorului de nivel constant se disipă o cantitate de energie suplimentară, datorită deplasării particulelor fluide pe distanța L_{max} (fig. 12 *a* și *b*) con-

comitent cu comprimarea la care este supus fiecare element de volum ΔV. Elementul de volum situat la o distanță x față de vana rapidă are o deplasare $L_x < L_{max}$ în timp ce elementul de volum ΔV din imediata apropiere a vanei rapide are o mișcare preponderentă de compresie, deplasarea longitudinală fiind practic nulă. În aceste condiții, relația (26) devine:

$$\frac{1}{2\rho a^2}(\Delta p_x^2 - \Delta p_x'^2) = K\Delta p_x^2 + \gamma h_{rx}, \tag{31}$$

unde h_{rx} are expresia:

$$h_{rx} = \lambda \frac{(v/2)^2}{2gD} L_x = \lambda \frac{v^2}{8gD} \frac{\Delta p_x}{\varepsilon} x. \tag{32}$$

Δp_x reprezintă amplitudinea oscilației de presiune într-un punct situat la distanța x de vana rapidă, D — diametrul conductei, iar v —viteza maximă a apei în secțiunea x. Coeficientul 1/2 ține seama de faptul că viteza medie a apei în secțiunea x are valori cuprinse între zero și valoarea maximă v. Ținînd seama de (32) și de faptul că $\Delta p_x \approx \Delta p_{x,-\frac{T}{4}}$, relația (31) devine:

$$\Delta p^2_{x,-\frac{T}{4}} - \Delta p_x'^2 = 2\rho a^2 K \Delta p^2_{x,-\frac{T}{4}} + \frac{\gamma\lambda}{4gD} v^2 \Delta p_{x,-\frac{T}{4}} x. \tag{33}$$

Din (33) obținem:

$$\frac{\Delta p_{N,x}}{\Delta p_{N-1,x}} = [1 - (K' + \varepsilon_x)]^2 = [1 - (k + \varepsilon_x)]^2 = K_{0,x}, \tag{34}$$

unde $\varepsilon_x = \frac{\gamma\lambda}{4gD} \frac{v^2}{\Delta P_{N-1,x}} x$, iar $K_{0,x}$ este constanta de amortizare (K_0) într-o secțiune situată la distanța x de vana rapidă.

În cazul unei închideri instantanee ($\Delta p_{N-1,x} = \rho a v$) și pentru un raport $\Delta p_{N,x}/\Delta p_{N-1,x}$ în secțiunea $x=0$ de 0,91 ($K' = 0{,}048$) rezultă în secțiunea $x = L$, $\Delta p_{N,x}/\Delta p_{N-1,x} = 0{,}89$. Valoarea experimentală obținută este de aproximativ 0,885. Valoarea raportului $\Delta p_{N,x}/\Delta p_{N-1,x}$ poate fi influențată de neuniformitățile existente în distribuția vitezelor în secțiune, sau de apariția unor fenomene de cavitație.

7. EXEMPLU DE CALCUL

Pentru o variație cunoscută a presiunilor pe durata primei perioade T, se poate calcula desfășurarea în timp a fenomenului cu ajutorul relației (28) sau (34):

$$\Delta p_{N,x} = [1 - (K' + \varepsilon_x)]^{2(N-1)} \Delta p_{1,x} = K_{0,x}^{N-1} \Delta p_{1,x}. \tag{35}$$

În figura 14 *a* și *b* se ilustrează rezultatul unui astfel de calcul pentru $K_{0,x} = 0{,}9$, respectiv $K_{0,x} = 0{,}7$. Durata de amortizare a fenomenului (în cazul în care nu apare cavitația) poate fi de asemenea calculată. Pentru

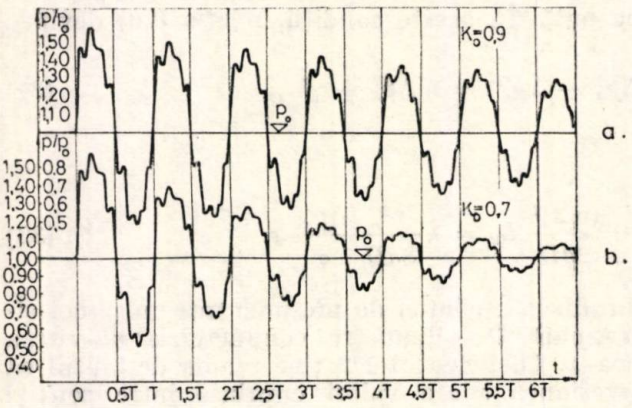


Fig. 14. — Exemple de calcul al amortizării oscilațiilor de presiune.

ca amplitudinea oscilațiilor de presiune să scadă sub 5% din amplitudinea inițială este necesar ca

$$\Delta p_{N,x} = K_{0,x}^{N-1} \Delta p_{1,x} = 0{,}05\, \Delta p_{1,x}. \tag{36}$$

Din relația (36) rezultă:

$$N = 1 - \frac{1{,}3}{\lg K_{0,x}}, \tag{37}$$

sau durata de amortizare a oscilațiilor de presiune (sau debit) este:

$$t_a = N \cdot T = \left(1 - \frac{1{,}3}{\lg K_{0,x}}\right) T = \left(1 - \frac{1{,}3}{\lg K_{0,x}}\right) \frac{4L}{a}. \tag{38}$$

8. CONCLUZII

Se prezintă o formulă pentru calculul amortizării oscilațiilor de debit și presiune ale apei în fenomenul de șoc hidraulic în conducte sub presiune. Disiparea energiei apei se realizează prin intermediul forțelor de frecare de tip structural ce se dezvoltă în masa lichidului și în pereții elastici ai conductei. În cele mai multe aplicații, energia disipată în pereții conductei poate fi neglijată, exceptînd cazul unor conducte cu pereți subțiri, foarte elastici și diametru mare.

Relația de calcul obținută, conduce la un raport practic constant între amplitudinile a două oscilații de debit sau presiune consecutive. Valoarea constantei de amortizare depinde de cantitatea de aer dizolvată în apă și într-o mică măsură de poziția secțiunii de calcul în lungul conductei.

Prin aplicarea formulei propuse se obține o bună concordanță între calculele teoretice și măsurătorile experimentale.

Primit la redacție la 20 februarie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. S. HAGAN, L. CRAINIC, *Concepte și metode energetice în dinamica construcțiilor*, Editura Academiei, 1980.
2. B. J. LAZAN, *Damping of Materials and Members in Structural Mechanics*, Pergamon Press, London, 1968.
3. V. L. STREETER, *Numerical methods for calculation of transient flow*, Proceedings of the 1st International Conference on Pressure surges, England, 1972.
4. C.A.M. GRAY, *The Analysis of the Dissipation of Energy in Waterhammer*, Proc. ASCE, Paper 274, Vol. 119, 1953.
5. M. HIROSE, *Frequency — Dependent Wall Shear in Transient Fluid Flow Simulation of Unsteady Turbulent Flow*, Master Thesis, M. I. T., sept. 1971.
6. E. I. HOLMBOE, *Viscous Distorsion in Wave Propagation as Applied to Waterhammer and Short Pulses*, Doctoral Thesis, Carnegie Institute of Technology, 1964.
7. W. ZIELKE, Frequency — Dependent friction in transient Pipe Flow, A.S.M.E., Jour. of Basic Eng., march 1968.
8. I. JELEV, *Computer analysis of hydraulic transient in pipe networks. Considerations concerning the head losses in the water hammer phenomena*, XX Congress I.A.H.R. Moscow, 1983.
9. D. CIOC, *Modele de calcul în mișcarea nepermanentă a apei*, St. cerc. mec. apl., 5 ÷ 6 (1984).
10. C. S. MARTIN, *Pressure wave propagation in two-phase bubbly air-water mixture*, Proceedings of the 2 nd. International Conference on pressure surges, England, 1976.
11. M. POPESCU, *Rezultate experimentale în studiul mișcărilor nepermanente din sistemele hidraulice sub presiune*, I și II, St. Cerc. mec. apl., **41**, 4 și 5 (1982).
12. GH. CONSTANTINESCU, *Contribuții privind protecția instalațiilor sub presiune utilizînd efectele aerului liber*, Teză de doctorat, I. P. Timișoara, 1983.

SIMULAREA NUMERICĂ A FUNCȚIONĂRII CLEȘTILOR MULTIDIMENSIONALI PENTRU FORAJ-EXTRACȚIE. II

de GH. ZECHERU, GH. DRĂGHICI și AL. POPA

Institutul de Petrol și Gaze Ploiești

4. ALGORITM ȘI PROGRAME PENTRU SIMULAREA NUMERICĂ A FUNCȚIONĂRII CLEȘTILOR MULTIDIMENSIONALI

Modelele matematice dezvoltate în capitolele anterioare au pus la dispoziție relațiile analitice necesare întocmirii unui algoritm de verificare prin calcule numerice a funcționării cleștilor multidimensionali pentru foraj-extracție.

Algoritmul are ca unitate structurală de bază sistemul de relații pentru verificarea funcționării cleștelui în cazul operării pe material tubular avînd un anumit diametru $d_j \in I_p$; unitatea structurală de bază a fost concepută în două variante: I — aplicabilă cînd (la operarea pe elementul tubular cu diametrul $d_j \in I_p$) cleștele analizat este echipat cu falcă în trepte prevăzută cu bac de prindere striat; II — aplicabilă cînd falca în trepte ce echipează cleștele are suprafața de prindere cilindrică-netedă. Ca urmare, verificarea funcționării unui clește într-un subinterval de prindere $I_{pi} \subset I_p$, constă în repetarea calculelor indicate în unitatea structurală de bază (corespunzătoare tipului de falcă în trepte cu care se echipează cleștele la operarea în acest subinterval) pentru toate diametrele $d_j \in I_{pi}$; evident, verificarea generală a funcționării unui clește multidimensional revine la efectuarea calculelor pentru toate subintervalele $I_{pi} \subset I_p$.

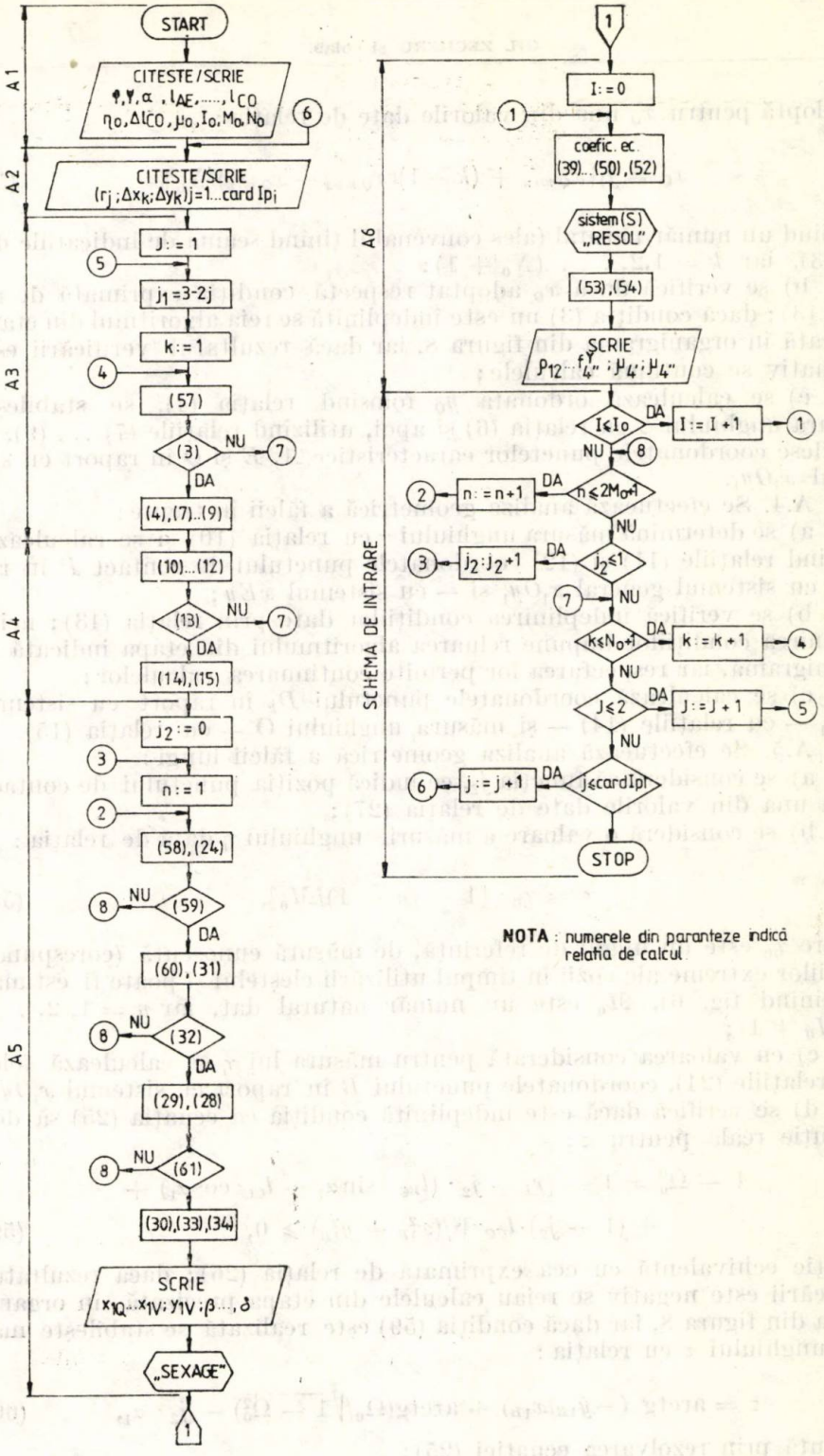
Algoritmul pentru verificarea funcționării unui clește multidimensional într-un subinterval de prindere $I_{qi} \subset I_p$ pentru care cleștele se echipează cu o falcă în trepte cu bac de prindere striat cuprinde etapele de lucru expuse în continuare și schematizate în organigrama din figura 8:

A.1. Se stabilesc valorile mărimilor cunoscute (mulțimea valorilor diametrelor $d_j \in I_{pi}$ și valorile tuturor mărimilor indicate în în cap. 2 și 3);

A.2. Fiecărei valori $d_j = 2 \cdot r_j$ i se atașează perechea (perechile) de valori Δx_k, Δy_k, definindu-se astfel, pentru fiecare dimensiune de material tubular din subintervalul I_{pi} considerat, poziția (pozițiile) punctului D_k de articulare a fălcii în trepte cu închizătorul cleștelui. Se alege o valoare a diametrului $d_j = 2 \cdot r_j$ din mulțimea I_{pi} și se trece aplicarea următoarelor etape de lucru (ce constituie unitatea structurală de bază a algoritmului) considerînd numai acest diametru.

A.3. Se efectuează analiza geometrică a fălcii scurte:

a) se consideră o valoare pentru abscisa x_Q, care să îndeplinească condițiile exprimate de relația (2); condițiile din (2) sînt respectate dacă



NOTA : numerele din paranteze indică relaţia de calcul

Fig. 8.

se adoptă pentru x_Q una din valorile date de relaţia :

$$x_Q = j_1[x_{Q\,min} + (k-1)(x_{Q\,max} - x_{Q\,min})/N_0], \tag{57}$$

N_0 fiind un număr natural (ales convenabil ţinînd seama de indicaţiile din fig. 3), iar $k = 1,2, \ldots, (N_0 + 1)$;

b) se verifică dacă x_Q adoptat respectă condiţia exprimată de relaţia (3) ; dacă condiţia (3) nu este îndeplinită se reia algoritmul din etapa indicată în organigrama din figura 8, iar dacă rezultatul verificării este afirmativ se continuă calculele ;

c) se calculează ordonata y_Q folosind relaţia (4), se stabileşte măsura unghiului β cu relaţia (6) şi apoi, utilizînd relaţiile (7) ... (9), se stabilesc coordonatele punctelor caracteristice A, E şi Q în raport cu sistemul x_1Oy_1.

A.4. Se efectuează analiza geometrică a fălcii în trepte ;

a) se determină măsura unghiului γ cu relaţia (10) şi se calculează, folosind relaţiile (11) şi (12) coordonatele punctului de contact P în raport cu sistemul general x_1Oy_1 şi — cu sistemul xEy ;

b) se verifică îndeplinirea condiţiilor date prin relaţia (13) ; neîndeplinirea condiţiilor impune reluarea algoritmului din etapa indicată în organigramă, iar respectarea lor permite continuarea calculelor ;

c) se calculează coordonatele punctului D_k în raport cu sistemul x_1Oy_1 — cu relaţiile (14) — şi măsura unghiului Θ — cu relaţia (15).

A.5. Se efectuează analiza geometrică a fălcii lungi :

a) se consideră că funcţia j_2, ce indică poziţia punctului de contact V, ia una din valorile date de relaţia (27) ;

b) se consideră o valoare a măsurii unghiului η dată de relaţia :

$$\eta = \eta_0 \cdot [1 - (n-1)/M_0], \tag{58}$$

în care η_0 este un unghi de referinţă, de măsură cunoscută (corespunde poziţiilor extreme ale cozii în timpul utilizării cleştelui şi poate fi estimat examinînd fig. 6), M_0 este un număr natural dat, iar $n = 1, 2, \ldots, (2 \cdot M_0 + 1)$;

c) cu valoarea considerată pentru măsura lui η se calculează folosind relaţiile (24), coordonatele punctului B în raport cu sistemul x_1Oy' ;

d) se verifică dacă este îndeplinită condiţia ca ecuaţia (25) să dea o soluţie reală pentru ε ;

$$1 - \Omega_0^2 = 1 - [r_j + j_2 \cdot (l_{BC} \cdot \sin\alpha_1 + l_{CC'} \cos\alpha_1) + \\ + (1 - j_2) \cdot l_{CC''}]^2/(x_{1B}^2 + y_{1B}^2) \geqslant 0, \tag{59}$$

condiţie echivalentă cu cea exprimată de relaţia (26) ; dacă rezultatul verificării este negativ se reiau calculele din etapa precizată în organigrama din figura 8, iar dacă condiţia (59) este realizată se stabileşte măsura unghiului ε cu relaţia :

$$\varepsilon = \operatorname{arctg}\,(-y_{1B}/x_{1B}) + \operatorname{arctg}(\Omega_0/\sqrt{1 - \Omega_0^2}) - j_2 \cdot \alpha_1, \tag{60}$$

obţinută prin rezolvarea ecuaţiei (25) ;

e) se calculează, folosind relațiile (31), coordonatele punctului V în raport cu sistemul de axe xCy și se verifică dacă sînt îndeplinite condițiile exprimate prin relația (32); neîndeplinirea condițiilor impune reluarea algoritmului din etapa indicată în organigramă, iar respectarea lor permite continuarea calculelor;

f) se calculează coordonatele punctului C în raport cu sistemul x_1Oy_1, folosind relațiile (29), se stabilește cu relația (28) mărimea distanței l^*_{CD} între punctele C și D_k și se verifică dacă este îndeplinită condiția de închidere a cleștelui:

$$|l_{CD} - l^*_{CD}| \leqslant \Delta l_{CD}, \tag{61}$$

$\pm \Delta l_{CD}$ fiind abaterile admisibile la lungimea l_{CD} a închizătorului; în funcție de rezultatul verificării se procedează astfel:

— dacă condiția (61) nu este îndeplinită se reiau calculele din etapa precizată în schema de calcul (organigrama) din figura 8;

— dacă condiția (61) este respectată, se calculează folosind relațiile (30), coordonatele punctului V în raport cu sistemul de axe x_1Oy_1 și se determină, cu ajutorul relațiilor (33) și (34), măsurile unghiurilor $\emptyset_1$ și δ; toate rezultatele obținute vor reprezenta în acest caz o soluție a analizei geometrice.

A.6. Fiecare soluție a analizei geometrice se supune verificării efectuînd analiza solicitărilor cleștelui:

a) se consideră una din valorile coeficientului de frecare μ_1 date de relația:

$$\mu_2 = \mu_0 + 0{,}2 \cdot I, \tag{62}$$

în care $I = 0, \ldots I_0$, $I_0 \in \mathbb{N}$, iar μ_0 este valoarea minimă estimată, pentru coeficientul de frecare μ_2; folosirea acestei relații de iterare, în locul prescrierii unei singure valori pentru μ_2, este dictată de faptul, dovedit experimental, [5], [7], că valoarea coeficientului de frecare de alunecare depinde nu numai de natura și starea suprafețelor în contact, dar și de natura contactului și (implicit) de intensitatea reacțiunilor normale (necunoscute în acest stadiu al analizei) din zona de contact;

b) se calculează coeficienții ecuațiilor (39) ... (50) și (52) și se rezolvă apoi sistemul (S) format din aceste ecuații, stabilind mărimile tuturor necunoscutelor adimensionale ρ_{nm} și f_p;

c) folosind relațiile (53) și (54), se calculează valorile coeficienților de frecare efectivi $\mu_1 \mu_n$ și se verifică dacă corespund condițiilor (56); dacă rezultatul verificării este afirmativ se conchide că soluția analizei geometrice luată în considerație este compatibilă cu realizarea rolului funcțional al cleștelui, iar dacă condițiile (56) nu sînt respectate soluția dată de analiza geometrică nu este validată.

Folosind organigrama prezentată în figura 8 s-a efectuat transpunerea algoritmului într-un program FORTRAN de simulare numerică a funcționării cleștilor multidimensionali echipați cu fălci în trepte cu bacuri striate, denumit de autori PROGRAMUL „CLESTI". Acest program folosește pentru rezolvarea sistemului (S) subrutina de calcul RESOL,

existentă în biblioteca calculelor automate FELIX C512, iar pentru transformarea valorilor măsurilor unghiurilor (ce rezultă din analiza geometrică a cleştilor multidimensionali) — subrutina de calcul SEXAGE, concepută de autori; lista completă a programului „CLESTI" este dată în [2].

Algoritmul pentru verificarea funcţionării unui cleşte multidimensional într-un subinterval de prindere $I_{pi} \subset I_p$ pentru care cleştele se echipează cu o falcă în trepte cu suprafaţa de prindere cilindrică-netedă are aceeaşi structură ca şi algoritmul descris anterior, în etapa A.4. folosindu-se însă relaţiile de calcul din § 2.2.2; lista programului FORTRAN corespunzător acestui algoritm (denumit de autori PROGRAMUL „BACIR") este prezentată în [2].

5. APLICAŢII DE CALCUL

Pentru a evidenţia utilitatea modelelor matematice, algoritmului şi programelor de calcul realizate, se prezintă în continuare modul cum au fost folosite acestea pentru rezolvarea unei probleme concrete: verificarea funcţionării corespunzătoare a unui cleşte multidimensional cu I_p = =2 3/8 in (60,3 mm) . . 14 3/8 in (365,0 mm)} şi M_{tmax}=60 kNm la operarea în subintervalul de prindere I_{p1} = {2 3/8 in (60,3 mm) . . 4 1/8 in 104,8 mm)} (vezi tabelul 1).

Datele necesare în calcul (valorile mărimilor cunoscute) au fost preluate din proiectul existent al cleştelui şi sînt prezentate în tabelul 2 — varianta I. Deoarece, la utilizarea în subintervalul de prindere I_{p1} cleştele supus verificării este echipat cu o falcă în trepte cu bac de prindere striat, pentru simularea numerică a funcţionării cleştelui s-a folosit programul „CLEŞTI".

Cu ajutorul acestui program s-au evidenţiat, pentru fiecare diametru de material tubular $d_j \in I_{p1}$, posibilităţile funcţionale ale cleştelui exprimate sub forma unor soluţii numerice cuprinzînd:

— caracteristicile geometrice (coordonate, unghiuri) ce definesc poziţiile elementelor cleştelui în etapa finală a procesului de operare;

— caracteristicile sistemului de solicitare a cleştelui aflat în procesul de operare (componentele adimensionale ρ_{nm}, f_p şi coeficienţii de frecare efectivi μ_2, μ_4', μ_4'').

Simbolurile mărimilor (caracteristicilor) ce rezultă prin utilizarea programului „CLESTI" sînt precizate în tabelul 3 (împreună cu simbolurile aceloraşi mărimi în relaţiile algoritmului de calcul), iar forma în care sînt furnizate de program soluţiile (ansamblurile de caracteristici) ce exprimă posibilităţile funcţionale ale cleştelui studiat este redată în tabelele 4 şi 5; tabelul 4 prezintă caracteristicile geometrice pentru una din soluţiile rezultate din analiza funcţionării cleştelui la operarea pe un element tubular cu d_j = 23/8 in (60,3 mm), iar tabelul 5 — caracteristicile sistemului de solicitare a cleştelui în aceeaşi situaţie de lucru, pentru fiecare din valorile coeficientului de frecare μ_2 date de relaţia (62) considerînd $\mu_0 = 0{,}3$ şi $I_0 = 6$.

Rezultatele obținute (în forma prezentată spre exemplificare în tabelele 4 și 5) folosind programul „CLESTI" la analiza funcționării cleștelui multidimensional pe toate tipodimensiunile de material tubu-

TABELUL 2

SIMBOLUL MĂRIMII ÎN RELAȚIILE ALGORITMULUI	SIMBOLUL MĂRIMII ÎN PROGRAMUL „CLEȘTI"	VALORILE MĂRIMILOR PENTRU VARIANTA I	VARIANTA II
l_{AE}	D1	165,0 mm	165,0 mm
l_{MM}	D2	36,8mm	36,8 mm
l_{EH} •	D3	(-) 22,4mm	(+) 39,1mm
l_{DE} •	D4	151,6 mm	160,0 mm
l_{AB}	D5	105,0 mm	105,0 mm
$l_{CC''}$	D6	44,8 mm	44,8 mm
l_{BC}	D7	292,0 mm	292,0 mm
l_{CD}	D8	228,0mm	228,0 mm
$l_{CC'}$	D9	16,1mm	16,1mm
$x_{G_{min}}; x_{G_{max}}$	XQ ; XQM	8,1mm ; 25,6 mm	8,1mm ; 25,6 mm
$y_{P_{min}}$ •; $y_{P_{max}}$ •	YP YPM	89,0 mm, 105,7mm	108,0mm 125,0mm
φ	UF	0,229rad (13°07')	0,229rad (13°07')
ψ •	UP	1,948rad (111°40')	1,346rad (77°)
α_1	UA	0,291rad (16°40')	0,291rad (16°40')
η_0	UI	0,698rad (40°)	0,698rad (40°)
$r_j; \Delta x_k$ •; Δy_k •	R, DX, DY	30,2mm, 0 0	30,2 mm 0 0
		36,5mm 0 0	36,5mm 0 0
		36,5mm 33,1mm 63,5mm	36,5mm 20,6mm 60,0mm
		39,7mm 33,1mm 63,5mm	39,7mm 20,6mm 60,0mm
		44,5mm 33,1mm 63,5mm	42,9mm 20,6mm 60,0mm
		47,6mm 33,1mm 63,5mm	47,6mm 20,6mm 60,0mm
		47,6mm 42,0mm 127,4mm	47,6mm 12,9mm 120,0mm
		50,8mm 42,0mm 127,4mm	50,8mm 12,9mm 120,0mm
		52,4mm 42,0mm 127,4mm	52,4mm 12,9mm 120,0mm
$x_{V_{min}}; x_{V_{max}}$	XV, XVM	61,0mm, 79,0mm	61,0mm, 79,0mm
$x_{V_{min}}; x_{V_{max}}$	XV, XVM	98,0mm; 114,0mm	98,0mm; 114,0mm
l_{AK}	D	1038,0mm	1038,0 mm
μ_0	FRA	0,3	0,3

• mărimi ce au valori diferite în variantele I și II

lar aparațiinînd subintervalului I_{p1} sînt sintetizate în tabelele 6 (caracteristicele geometrice) și 7 (caracteristicile sistemului de solicitare).

TABELUL 3

SIMBOLURILE MĂRIMILOR CE SE CALCULEAZĂ, IN:			
RELAȚIILE ALGORITMULUI	PROGRAMUL CLEȘTI	RELAȚIILE ALGORITMULUI	PROGRAMUL CLEȘTI
x_Q	Q	θ	UT
x_{1_Q} ; y_{1_Q}	XQ1 ; YQ1	η	UE
x_{1_A}	XA	ε	U
x_{1_E} ; y_{1_E}	XE1 ; YE1	ϕ_1	UT1
y_p	YP	δ	UD
x_{1_P} ; y_{1_P}	XP1 , YP1	ρ_{12}^x ; ρ_{12}^y ; ρ_{14}^x ; ρ_{14}^y ; f_2^x ; f_2^y ; ρ_{43} ;	YL(I); I = 1 ... 13
$x_{1_{D_k}}$; $y_{1_{D_k}}$	XD , YD	f_4^x ; f_4^y ; $\rho_{44'}^x$; $\rho_{44''}^y$; $f_{4''}^x$; $f_{4''}^y$	
x_V	VX	F_2^T / F_m ; F_2^N / F_m	FF2 ; FN2
x_{1_V} ; y_{1_V}	XV1 , YV1	$F_{4'}^T / F_m$; $F_{4'}^N / F_m$	FF41 FN41
x_{1_B} ; y_{1_B}	XB , YB	$F_{4''}^T / F_m$; $F_{4''}^N / F_m$	FF42 FN42
x_{1_C} ; y_{1_C}	XC , YC	μ_2	FR2
β	UB	$\mu_{4'}$	FR41
γ	UG	$\mu_{4''}$	FR42

Caracteristicile geometrice coresunzătoare soluțiilor obținute prin calcul (tabelul 6) au fost folosite pentru a reprezenta grafic pozițiile de lucru posibile ale cleștelui mltidimensonal analizat, în etapa finală a procesului de operare pe materiale tubulare din subintervalul de prindere I_{p1}. Ca exemplu, în figura 9 sînt reprezentate pozițiile de lucru ale cleștelui la operarea pe elemente tubulare cu $d_j = 2\ 3/8$ in (60,3 mm); se poate observa că amplasarea punctelor caracteristice ale cleștelui (A, B, C, D_k, E, Q, P, V) în sistemul de coordonate general $x_1 O y_1$ (folosind coordonatele acestora rezultate prin calcul) este suficientă pentru descrierea pozițiilor posibile ale cleștelui în procesul de operare, celelalte rezultate de calcul (măsurile unghiurilor, coordonatele punctelor caracteristice în raport sistemele de axe proprii ale elementelor cleștelui) putînd fi folosite ca date ajutătoare sau de verificare.

Soluțiile analizei geometrice a cleștelui multidimensional, exprimate prin caracteristicile geometrice redate în tabelul 6, s-a spus verificărilor privind compatibilitatea lor cu realizarea rolului funcțional al cleștelui : prinderea fără alunecare și acționarea cu momentul de torsiune M_t a elementului tubular pe care se lucrează. Pentru efectuarea acestor verificări s-au aplicat condițiile (51), (56) considerînd caracteristicile sistemului de solicitare a cleștelui proprii fiecărei soluții a analizei geometice (vezi etapa A. 6. c. din algoritmul de calcul). Coeficienții de frecare efectivi μ_2, $\mu_{4'}$, $\mu_{4''}$, ce intervin în condițiile de verificare, sînt cei calculați (vezi

TABELUL 4

REZULTATE PENTRU R= 30.2MM, DX= .0MM, DY= .0MM

COORDONATE

I	Q	I	XQ1	I	YQ1	I	XA	I	XE	I	YE	I	
I	MM	I	MM	I	MM	I	MM	I	MM	I	MM	I	MM
I	13.9	I	25.0	I	−17.0	I	102.51	I	−18.8	I	−111.8	I	

I	PY	I	XY1	I	YP1	I	XD	I	YD	I	I	I
I	MM	I	M	I	MM	I	MM	I	MM	I	MM	I	MM I
I	101.8	I	−28.9	I	−8.9	I	−170.0	I	−100.1	I			

I	VX	I	XV 1I	YV 1I	XB	I	YB	I	XC	I	YC	I
I	MM	I	MM I	MM I	MM	I	MM	I	MM	I	MM	I
I	108.7	I	17.2 I	24.9 I	206.5	I	14.6	I	−71.3	I	104.6	I

UNGHIURI

I	UB	I	UG	I	UT	I	UE	I	U	I	UT1	I	UD	I
I	.744	I	.077	I	2.244	I	−.140	I	.313	I	1.564	I	1.121	I

TRANSFORMAREA UNGHIURILOR

RADIANI	GRADE SEXAGES		
.744264	42	38	40
.077200	4	25	24
2.244097	128	23	52
−.139626	−8	0	0
−319413	17	57	28
1.564095	89	37	7
1.121469	64	15	26

tabelul 7), iar valorile limită μ_{p0} (μ_{20}, $\mu_{4'0}$, $u_{4''0}$) ale coeficienților de frecare trebuie cunoscute (din determinări experimentale). Consultînd literatura de specialitate s-a constatat că datele privind valorile coeficienților μ_{p0}, în cazul frecării oțel-oțel, sînt puțin numeroase și incerte; astfel, în [5] se indică $\mu_{p0} = 0{,}6$, iar în [7] — $\mu_{p0} = 0{,}6 \ldots 1, 2$, făcîndu-se și precizarea că valorile depind atît de starea suprafețelor în contact, cît și de caracterul contactului între piese. Neavînd la dispoziție alte date și ținînd seama că suprafețele de contact ale bacurilor de prindere ale fălcilor cleștelui sînt striate, s-a considerat $\mu_{p0} = 0{,}7$ și s-au scris condițiile de verificare (51), (56) în forma:

$$\max(\mu_2, \mu_{4'}, \mu_{4''}) \leqslant \mu_{p0} = 0{,}7. \tag{63}$$

TABELUL 5

REZULTATE PENTRU R= 30.2MM, DX= .OMM, DY= .OMM

I	FF2	I	FN2	I	FF41	I	FN41	I	FF42	I	FN42	I
I	7.6	I	25.4	I	20.5	I	27.7	I	9.7	I	8.0	I

I	FR2	I	FR41	I	FR42	I
I	.300	I	.739	I	1.200	I

*	−.862	10.104	1−.001	9.114	−8.166	25.251	16.816
	20.391	27.715	13.087	−12.568	12.086	−3.454	

I	FF2	I	FN2	I	FF41	I	FN41	I	FF42	I	FN42	I
I	12.7I		18.1	I	15.0	I	23.3	I	10.1	I	14.7	I

I	FR2	I	FR41	I	FR42	I
I	.700	I	−644	I	.686I	

*	6.427	9.080	6.288	8.089	.144	22.110	14.466
	17.800	21.187	11.517	−8.157	17.804	−.067	

I	FF2	I	FN2	I	FF41	I	FN41	I	FF42	I	FN42	I
I	17.3	I	11.5	I	10.0	I	19.3	I	10.5	I	20.7	I

I	FR2	I	FR41	I	FR42	I
I	1.500	I	.520	I	.505	I

*	13.023	8.153	12.884	7.162	7.663	19.267	12.339
	15.455	15.279	10.095	−4.165	22.979	2.998	

* componentele ρ_{nm} şi f_p în ordinea indicată în tabelul 3.

Rezultatele verificării condiţiei (63) de către caracteristicile sistemelor de solicitare ce corespund soluţiilor analizei geometrice din tabelul 6 sînt prezentate în tabelul 7. Se poate observa că numai unele din soluţiile analizei geometrice sînt compatibile cu realizarea rolului funcţional al eleşteului, pentru cîteva tipodimensiuni de material tubular, $d_j \in I_{p1}$, neexistînd poziţii de lucru ale cleştelui (soluţii ale analizei geometrice) caracterizate prin sisteme de solicitare ce respectă condiţia de validare funcţională (63). Această concluzie, confirmată de observarea unor deficienţe la utilizarea în exploatare şi la verificarea pe standul de probă a cleştelui analizat, a impus căutarea unor soluţii constructive noi pentru elementele cleştelui, care să asigure funcţionarea corectă a acestuia în tot subintervalul de prindere I_{p1}.

TABELUL 6

d_j ; Δx_k ; Δy_k		60,3 ; 0 ;0			73,0 ; 0 ; 0		73,0 ; 33,1 ; 63,5	
SOLUȚIA		I	II	III	I	II	I	II
Q	x_{1Q}	25,4	25,0	13,2	17,2	16,1	30,8	30,4
A	x_{1A}	100,9	102,5	107,9	113,5	121,5	107,8	109,5
E	x_{1E}	−17,7	−18,8	−20,5	−10,5	−6,2	−9,8	−10,8
	y_{1E}	−114,7	−111,8	−104,1	−108,9	−104,5	−115,7	−113,0
P	x_{1P}	−28,8	−28,9	−28,7	−32,8	−31,7	−33,2	−33,1
D_k	x_{1Dk}	−168,9	−170,0	−171,4	−161,6	−156,2	−197,7	−198,8
	y_{1Dk}	−103,3	−100,1	−94,2	−120,8	−126,1	−62,3	−60,0
V	x_{1V}	16,9	17,2	18,8	14,3	13,9	23,8	24,1
B	x_{1B}	204,3	206,5	212,9	198,4	206,4	212,7	216,5
	y_{1B}	18,2	14,6	−3,7	61,7	61,7	−3,7	−7,3
C	x_{1C}	−74,4	−71,3	−58,4	−91,5	−84,1	−54,2	−51,6
	y_{1C}	105,3	104,6	104,5	96,4	90,8	114,8	114,1
β		44°03′	42°39′	39°07′	41°19′	39°19′	44°32′	43°12′
γ		4°19′	4°25′	3°45′	−4°30′	−7°53′	−3°07′	−3°15′
η		−10°00′	−8°00′	2°00′	−36°00′	−36°00′	2°00′	4°00′
ε		17°20′	17°57′	21°44′	6°49′	5°43′	23°56′	24°34′
δ		65°39′	53°15′	60°22′	72°07′	71°37′	50°59′	49°44′
Θ		129°53′	128°35′	98°09′	92°05′	86,24′	122°56′	121°28′
Θ_1		88°50′	89°37,	115°36′	128°20′	131°26′	81°45′	82°27′

d_j ; Δx_k ; Δy_k		79,4 ; 33,1 ; 63,5		88,9 ; 33,1 ; 63,5	95,2 ; 42,0 ; 127,4		101,6 ; 42,0 ; 127,4	
SOLUȚIA		I	II	I	I	II	I	II
Q	x_{1Q}	33,4	33,9	22,4	42,0	41,4	28,0	26,9
A	x_{1A}	112,1	110,5	122,6	115,9	117,3	123,4	128,4
E	x_{1E}	−6,4	−5,3	2,5	7,0	5,7	9,8	11,8
	x_{1E}	−114,8	−117,5	−113,1	−124,0	−121,5	−119,7	−116,8
P	x_{1P}	−34,9	−34,9	−35,8	−38,2	−38,1	−32,2	−36,9
D_k	x_{1Dk}	−197,4	−196,2	−192,3	−213,0	−214,7	−215,4	−215,2
	y_{1Dk}	−74,2	−76,2	−99,3	−51,3	−49,7	−65,0	−70,3
V	x_{1V}	22,3	22,0	17,9	27,0	26,8	23,7	22,1
B	x_{1B}	214,8	212,4	203,1	216,8	218,3	210,4	211,2
	y_{1B}	21,8	25,4	67,5	28,9	28,9	58,7	64,6
C	x_{1C}	−63,6	−66,8	−86,7	−61,1	−60,1	−76,1	−77,2
	y_{1C}	109,9	110,7	103,7	118,5	117,2	114,9	110,7
β		44°07′	45°25′	43°17′	48°43′	47°26′	46°31′	45°03′
γ		−6°59′	−6°47′	−14°55′	−15°04′	−15°18′	−19°41′	−21°48′
η		−12°00′	−14°00′	−40°00′	−16°00′	−16°00′	−34°00′	−38°00′
ε		17°33′	17°00′	7°07′	17°52′	17°35′	11°05′	9°05′
δ		54°00′	55°19′	62°31′	48°11′	47°12′	52°15′	52°41′
Θ		118°40′	120°10′	83°39′	115°10′	113°38′	82°06′	78°32′
Θ_1		88°33′	87°49′	126°31′	83°38′	85°12′	118°51′	122°20′

TABELUL 7

d_j; Δx_k; Δy_k;	SOLUŢIA		CARACTERISTICILE SISTEMULUI DE SOLICITARE, PENTRU μ_2 =							VERIFICAREA CONDIŢIEI (63)
			0,300	0,500	0,700	0,900	1,100	1.300	1.500	
60,3 0 ; 0	I	$\mu_{4'}$	0,781	0,734	0,695	0,661	0,632	0,606	0,584	DA
		$\mu_{4''}$	1,215	0,843	0,700	0,625	0,579	0,547	0,524	
		f_2^N	25,4	20,9	17,8	15,5	13,7	12,3	11,2	
		$f_{4'}^N$	26,8	24,1	22,3	20,9	19,9	19,0	18,4	
		$f_{4''}^N$	7,5	11,2	13,8	15,8	17,3	18,5	19,4	
	II	$\mu_{4'}$	0,739	0,688	0,644	0,606	0,574	0,545	0,520	DA
		$\mu_{4''}$	1,200	0,830	0,686	0,609	0,561	0,529	0,505	
		f_2^N	25,4	21,2	18,1	15,8	14,1	12,7	11,5	
		$f_{4'}^N$	27,7	25,1	23,3	21,9	20,8	20,0	19,3	
		$f_{4''}^N$	8,0	11,9	14,7	16,7	18,7	19,6	20,7	
	III	$\mu_{4'}$	0,565	0,432	0,314	0,208	0,114	0,028	0,005	NU
		$\mu_{4''}$	2,582	1,270	0,964	0,828	0,750	0,701	0,666	
		f_2^N	26,4	22,9	20,2	18,1	16,3	14,9	13,7	
		$f_{4'}^N$	30,6	28,1	26,3	24,8	23,6	22,7	21,9	
		$f_{4''}^N$	4,9	11,3	16,1	20,0	32,1	25,6	27,7	
73,0 0 ; 0	I	$\mu_{4'}$	0,382	0,339	0,303	0,272	0,246	0,223	0,202	NU
		$\mu_{4''}$	1,084	1,168	1,217	1,249	1,272	1,289	1,302	
		f_2^N	25,9	19,3	15,3	12,7	10,9	9,3	8,4	
		$f_{4'}^N$	27,8	22,7	19,6	17,6	16,1	14,0	14,2	
		$f_{4''}^N$	11,6	11,7	11,7	11,8	11,8	11,8	11,8	
	II	$\mu_{4'}$	0,279	0,237	0,201	0,170	0,143	0,119	0,098	NU
		$\mu_{4''}$	1,239	1,306	1,346	1,372	1,391	1,405	1,416	
		f_2^N	26,2	19,5	15,5	12,9	11,0	9,6	8,6	
		$f_{4'}^N$	30,1	24,4	21,0	18,7	17,1	16,0	14,0	
		$f_{4''}^N$	12,0	11,9	11,9	11,9	11,9	11,9	11,9	
73,0 33,1 63,5	I	$\mu_{4'}$	0,436	0,376	0,324	0,279	0,240	0,206	0,176	DA
		$\mu_{4''}$	1,213	0,764	0,590	0,496	0,439	0,399	0,371	
		f_2^N	23,5	20,2	17,7	15,8	14,2	13,0	11,9	
		$f_{4'}^N$	31,6	29,5	28,0	26,7	25,8	25,0	24,3	
		$f_{4''}^N$	8,7	13,3	16,8	19,6	21,8	23,6	25,1	
	II	$\mu_{4'}$	0,400	0,336	0,281	0,233	0,191	0,155	0,122	
		$\mu_{4''}$	1,197	0,758	0,584	0,490	0,432	0,392	0,362	
		f_2^N	23,7	20,6	18,1	16,2	14,7	13,4	12,3	
		$f_{4'}^N$	32,8	30,8	29,3	29,1	27,2	26,4	25,7	
		$f_{4''}^N$	9,4	14,2	18,0	20,9	23,3	25,3	27,0	

TABELUL 7 (continuare)

d_j ; Δx_k ; Δy_k	SOLUȚIA		CARACTERISTICILE SISTEMULUI DE SOLICITARE, PENTRU μ_2 =							VERIFICAREA CONDIȚIEI (63)
			0,300	0,500	0,700	0,900	1,100	1,300	1,500	
79,4 ; 33,1 ; 63,5	I	μ_4'	0,357	0,314	0,277	0,246	0,218	0,195	0,174	DA
		μ_4''	1,016	0,784	0,676	0,613	0,572	0,544	0,522	
		f_2^N	22,6	18,5	15,7	13,6	12,0	10,7	9,7	
		f_4^N	31,4	28,1	25,8	24,1	22,8	21,7	20,9	
		$f_4''^N$	10,7	13,8	16,8	17,6	18,7	19,7	20,5	
	II	μ_4'	0,393	0,353	0,319	0,290	0,266	0,244	0,225	DA
		μ_4''	1,001	0,777	0,673	0,613	0,574	0,547	0,527	
		f_2^N	22,3	18,3	15,4	13,3	11,7	10,5	9,5	
		f_4^N	30,4	27,0	26,7	23,0	21,7	20,7	16,9	
		$f_4''^N$	10,1	13,1	15,1	16,6	17,7	18,6	19,3	
88,9 ; 33,1 ; 63,5	I	μ_4'	0,108	0,060	0,020	0,014	0,044	0,070	0,093	NU
		μ_4''	1,442	1,404	1,383	1,369	1,359	1,347	1,347	
		f_2^N	22,1	16,5	13,2	11,0	9,4	8,2	7,3	
		f_4^N	30,2	24,7	21,4	19,2	17,6	16,4	15,5	
		$f_4''^N$	10,8	11,2	11,4	11,6	11,7	11,8	11,9	
95,2 ; 42,0 ; 127,4	I	μ_4'	0,218	0,183	0,153	0,128	0,107	0,088	0,071	DA
		μ_4''	1,083	0,836	0,719	0,650	0,605	0,573	0,549	
		f_2^N	20,4	16,3	13,9	11,9	10,5	9,3	8,4	
		f_4^N	31,5	27,9	25,4	23,7	22, 3	21,3	20,4	
		$f_4''^N$	10,3	12,9	14,7	16,0	16,9	17,7	18,3	
	II	μ_4'	0,188	0,152	0,122	0,097	0,073	0,053	0,038	DA
		μ_4''	1,096	0,861	0,746	0,677	0,632	0,599	0,575	
		f_2^N	20,2	16,3	13,7	11,8	10,4	9,3	8,4	
		f_4^N	32,2	28,6	26,1	24,3	22,9	21,8	20,9	
		$f_4''^N$	11,0	13,5	15,5	16,5	17,6	18,2	18,8	
101,6 42,0 ; 127,4	I	μ_4'	0,013	0,050	0,099	0,149	0,189	0,224	0,254	NU
		μ_4''	1,847	1,559	1,421	1,340	1,287	1,249	1,221	
		f_2^N	19,3	14,9	12,1	10,2	8,8	7,8	6,9	
		f_4^N	30,8	25,8	22,7	20,6	19,1	17,9	17,0	
		$f_4''^N$	8,8	10,5	11,6	12,5	12,7	13,1	13,4	
	II	μ_4'	0,039	0,096	0,143	0,187	0,224	0,256	0,284	NU
		μ_4''	2,026	1,746	1,605	1,521	1,464	1,423	1,393	
		f_2^N	18,9	14,3	11,7	9,9	8,5	7,5	6,7	
		f_4^N	31,4	26,2	23,0	20,8	19,2	18,0	17,0	
		$f_4''^N$	8,9	10,1	10,9	11,5	11,9	12,2	12,1	

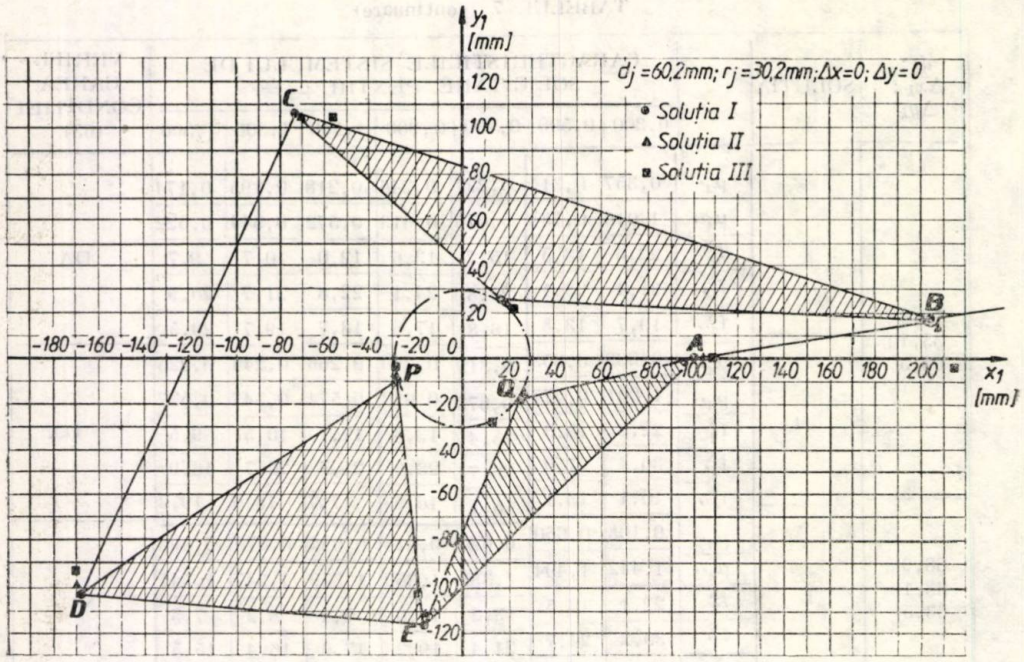


Fig. 9.

Una din soluţiile propuse pentru îmbunătăţirea funcţională a cleştelui multidimensional analizat are caracteristicile constructive prezentate în tabelul 2 — varianta II. Noua soluţie prescrie caracteristici geometrice modificate numai pentru falca în trepte ce echipează cleştele la operarea în subintervalul de prindere I_{p1}, păstrînd neschimbate toate celelalte elemente componente ale cleştelui; în acest fel, s-a căutat păstrarea caracteristicilor funcţionale bune ale cleştelui (constatate experimental urmărindu-i comportarea în exploatare) la operarea în subintervalele de prindere I_{p2} . . I_{p8} (vezi tabelul 1) şi îmbunătăţirea comportării sale în subintervalul I_{p1}. Pentru simularea numerică a funcţionării cleştelui realizat în varianta constructivă îmbunătăţită s-a utilizat programul „CLESTI"; în tabelul 8 sînt prezentate sintetic rezultatele obţinute (caracteristicile geometrice şi ale sistemelor de solicitare care au corespuns cel mai bine criteriului de verificare funcţională (63). Analizînd datele din tabelul 8 se constată că varianta constructivă propusă asigură poziţii funcţionale corecte ale cleştelui pentru toate tipodimensiunile de material tubular cuprinse în subintervalul de prindere I_{p1}.

Interpretările făcute anterior rezultatelor furnizate de programul „CLESTI" sînt suficiente pentru a evidenţia utilizarea modelelor matematice, algoritmului şi programelor de calcul elaborate pentru studierea analitică a funcţionării cleştilor multidimensionali. Pentru ca aceste instrumente de lucru să fie utilizate complet şi corect la proiectarea cleştilor multidimensionali mai trebuie însă subliniate două aspecte:

I. Programele de calcul pun la dispoziţie şi alte date utile pentru proiectarea cleştilor multidimensionali. În afară de parametrii geometrici

TABELUL 8

MATE-RIALUL TUBULAR			d_j; Δx_k; Δy_k	60,3 0 0	73,0 0 0	79,4 20,6 60,0	88,9 20,6 60,0	95,2 12,9 120,0	101,6 12,9 120,0
CARACTERISTICI	GEOMETRICE	Q	x_{1Q}	12,9	15,7	19,2	20,7	40,9	28,0
		A	x_{1A}	110,6	124,2	117,6	124,4	118,8	123,4
		E	x_{1E}	−18,6	−4,6	−5,0	1,7	4,6	9,8
			y_{1E}	−102,6	−103,2	−110,4	−110,3	−119,0	−119,7
		P	x_{1P}	−29,2	−36,4	−39,6	−42,8	−47,3	−49,9
		D_k	x_{1D_k}	−178,5	−162,5	−193,8	−188,4	−198,6	−196,7
			y_{1D_k}	−97,6	−129,3	−86,3	−103,2	−64,1	−79,0
		V	x_{1V}	17,3	12,3	20,3	17,1	26,6	23,7
		B	x_{1B}	215,4	200,3	217,5	207,2	219,8	210,4
			y_{1B}	7,3	72,3	32,4	64,6	28,9	58,7
		C	x_{1C}	−61,9	−91,3	−65,8	−82,7	−59,0	−76,1
			y_{1C}	98,9	87,9	103,1	99,7	115,7	114,9
			γ_{i2}	−4°00′	−42°00′	−18°00′	−40°00′	−16°00′	−34°00′
			Ø	129°57′	119°39′	120°39′	115°32′	142°32′	112°39′
			$Ø_1$	119°45′	134°41′	120°27′	127°37′	86°45′	118°51′
	ALE SISTEMULUI DE SOLICITARE		μ_2	0,700	0,500	0,300	0,300	0,300	0,300
			$\mu_{4'}$	0,675	0,407	0,395	0,484	0,703	0,373
			$\mu_{4''}$	0,562	0,648	0,601	0,548	0,233	0,477
			f_2^N	19,0	19,5	23,8	21,4	22,0	21,7
			$f_{4'}^N$	19,3	20,8	22,4	20,2	21,0	22,1
			$f_{4''}^N$	21,0	19,7	18,5	17,0	12,3	16,1

și coeficienții de frecare efectivi $\mu_p(\mu_2\,;\,\mu_{4'}\,;\,\mu_{4''})$ folosiți în interpretările anterioare, programele furnizează toate caracteristicile sistemelor de solicitare (proprii diferitelor situații de lucru ale cleștilor) sub forma componentelor adimensionale ρ_{pm}, f_p^X, f_p^Y, $f_p^N = F_p^N/F_m$ și $f_p^T = F_p^T/F_m$) (vezi exemplul din tabelul 5). Cunoscînd valorile acestor componente și intensitatea forței (de acționare a cleștelui) F_m, se pot stabili intensitățile reacțiunilor în punctele caracteristice ale cleștelui (cu relațiile (36) . . (38)), necesare pentru a efectua dimensionarea și/sau verificarea rezistenței componente-

lor (fălci, bolţuri etc.) şi poate fi determinat momentul de torsiune M_t aplicat de cleşte elementului tubular pe care operează:

$$M_t = F_m(l_{AK} + x_{1A} \cdot \cos\gamma_1) = r_j \cdot F_m \cdot (f_2^T + f_{4'}^T + f_{4''}^T) \qquad (64)$$

Se poate observa cu uşurinţă că cea de-a doua egalitate din (64), adusă în formă adimensională prin împărţire la $F_m \neq 0$, constituie şi o relaţie de verificare a corectitudinii datelor furnizate de programele de calcul; această relaţie a fost utilizată pentru verificarea veridicităţii rezultatelor prezentate în tabelul 6 . . 8.

II. Folosirea criteriului de verificare (63) pentru interpretarea rezultatelor obţinute la aplicaţiile prezentate anterior a permis evidenţierea modului de utilizare a algoritmului şi programelor de calcul descrise în lucrare. Deoarece valorile coeficienţilor de frecare μ_{p0} cuprinse în acest criteriu nu au fost stabilite pe baza unor cercetări experimentale (corespunzătoare condiţiilor specifice de realizare a contactului între elementele tubulare şi bacurile fălcilor), criteriul (63) nu permite o selectare certă a rezultatelor simulării numerice a funcţionării cleştilor multidimensionali. Eliminarea acestei deficienţe impune determinarea experimentală a dependenţelor $\mu_{p0} = g(F_p^N)$; cunoscînd funcţia g şi intensităţile reacţiunilor normale $F_p^N = F_m f_p^N (f_p^T$ — rezultate din programele de calcul), se determină valorile reale ale coeficienţilor de frecare μ_{p0} (aşa cum se arată în fig. 10) şi se poate face verificarea soluţiilor date de programele de calcul folosind criteriile:

$$\mu_2 \leqslant \mu_{20} = g(F_2^N);\ \mu_{4'} \leqslant \mu_{4'0} = g(F_{4'}^N);\ \mu_{4''0} \leqslant \mu_{4''0} = g(F_{4''}^N). \qquad (65)$$

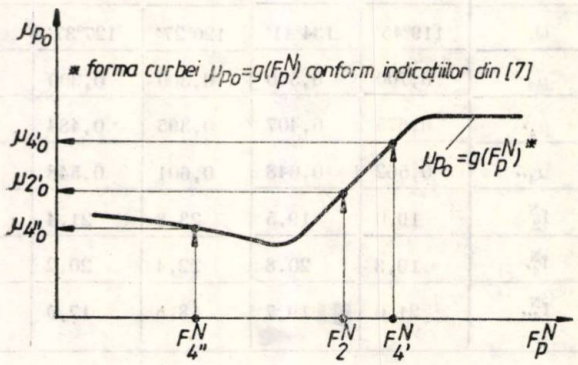


Fig. 10.

Utilizarea criteriilor (65) permite o selectare sigură a soluţiilor numerice corespunzătoare unor situaţii de funcţionare corectă a cleştelui multidimensional ce se analizează; ca urmare, autorii, şi-au propus ca, în următoarea etapă a cercetărilor lor, să determine experimental dependenţele $\mu_{p0} = g(F_p^N)$ şi să introducă în programele de calcul criteriile (65) de verificare şi selectare a soluţiilor.

6. CONCLUZII

Procesul de operare a cleștilor multidimensionali pe elemente de material tubular poate fi decelat în mai multe etape distincte, esențială din punctul de vedere al funcționării cleștilor fiind etapa (finală) în care elementele tubulare sînt prinse și solicitate cu momentul de torsiune necesar executării operației dorite (strîngerea sau desfacerea îmbinărilor filetate dintre ele).

Simularea numerică a funcționării unui clește multidimensional necesită alcătuirea unor modele matematice care să cuprindă relațiile generale pentru analiza geometrică (determinarea pozițiilor elementelor componente) și analiza sistemelor de solicitare în etapa de operare efectivă a cleștelui pe fiecare din tipodimensiunile de material tubular din intervalul său de prindere.

Modelele matematice dezvoltate au permis întocmirea unui algoritm general de verificare prin calcul a funcționării cleștilor multidimensionali, ce s-a transpus în programe pentru calculul automat; s-au conceput două programe: programul „CLESTI" — utilizabil în cazul cleștilor echipați cu fălci în trepte prevăzute cu bacuri de strîngere stricte — și programul „BACIR" — destinat verificării funcționale a cleștilor avînd fălcile în trepte cu suprafața de prindere cilindrică-netedă.

Modelele matematice, algoritmul și programele de calcul elaborate sînt deosebit de utile la proiectarea cleștilor multidimensionali, utilizarea lor eliminînd numeroasele testări experimentale (uneori foarte costisitoare) ce se făceau pentru verificarea soluțiilor constructive propuse de proiectanți pe baza unor criterii intuitive sau empirice.

Primit la redacție la 24 decembrie 1986

BIBLIOGRAFIE

1. AL. RĂDULESCU, A. MIHĂILESCU, V. CRISTEA, *Carnet tehnic. Utilaj petrolier-foraj*, Edit. Tehnică, București, 1975.
2. N. N. ANTONESCU, GH. ZECHERU, M. NEACȘU, GH. DRĂGHICI, AL. POPA, *Studiul mecanismului și proiectarea fălcilor în trepte la clește multidimensional ($2^{3/8}$ in...$14^{3/8}$ in) în scopul strîngerii pe toate dimensiunile*. Contract cercetare nr. 15/1985. I. P. G. Ploiești. 1985.
3. * * * *Manualul inginerului mecanic. Mecanisme. Organe de mașini. Dinamica mașinilor*, Edit. Tehnică, București. 1976.
4. C IACOB, *Mecanică teoretică*, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1980.
5. CH. KITTEL, W. KNIGHT, M. RUDERMAN, *Cursul de fizică Berkeley*, vol. I, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1981.
6. V. RĂDULESCU, M. MAREȘ, *Dispozitive de mecanizare și siguranță utilizate la forarea și exploatarea sondelor*, Edit. Tehnică, București, 1979.
7. D. PAVELESCU, M. MUȘAT, A. TUDOR, *Tribologie*, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1977.

FORMA PRACTICĂ A CONDIȚIEI DE STABILITATE, CORESPUNZĂTOARE STRUCTURILOR DE TIP RECIPIENT, CONDUCTĂ SAU COLOANĂ TUBULARĂ

de A. PAVEL

Institutul de Petrol și Gaze Ploiești

Într-o formă generală, se obține condiția de stabilitate elastomecanică a structurilor de tipul recipientelor, conductelor și coloanelor tubulare care sînt solicitate, concomitent, printr-un număr oarecare de acțiuni distincte — cu intensitate cunoscută — ce dau efecte de compresiune.

Pentru o structură de tip recipient, conductă sau coloană tubulară, solicitată în domeniul așa-zis *elastic* ($\sigma_{max} < \sigma^t_{0,2}$) prin intermediul unei *acțiuni mecanice singulare* (P_i) de intensitate $P_{max\,i}$, condiția de stabilitate corespunzătoare *cazului general* se formulează astfel [1, 2]:

$$P_{max\,i} \leqslant P_{a\,i} = \left(\frac{P_{cr}}{c_s}\right)_i = min.\left(\frac{P_{sup}}{c_{sup}}, \frac{P_{inf}}{c_{inf}}\right)_i < P_{cr\,i} = min.\,(P_{sup}, P_{inf})_i, \tag{1}$$

imaginea sa grafică ilustrîndu-se sugestiv în figura 1. Se evidențiază, astfel, rezerva *certă* și rezerva *suplimentară* de securitate tehnică din punctul de vedere al elasticității. Evident, pentru $P_{max\,i} = P_{a\,i}$ este epuizată rezerva suplimentară de securitate tehnică, fără a surveni riscurile de

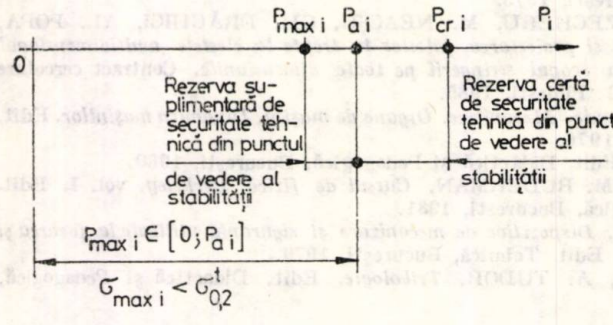


Fig. 1. — Imaginea grafică a condiției de stabilitate (1), corespunzătoare cazului solicitării printr-o acțiune mecanică singulară de intensitate cunoscută.

instabilitate, iar pentru $P_{max\,i} = P_{cr\,i}$, respectiv $c_{s\,i} = 1{,}0$, structura dată devine în mod cert *instabilă*, riscurile colapsului — de altfel imprevizibile — fiind inevitabile.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 46, NR. 4, 1987, P. 394—399

Cînd structura de tip recipient, conductă sau coloană tubulară este de asemenea solicitată în domeniul *tehnic elastic* ($\sigma_{max\,i} < \sigma^t_{0,2}$), însă prin intermediul *a trei* ($i = 1, 2, 3$) *acțiuni mecanice concomitente și distincte* ($P_1 \neq P_2 \neq P_3$) de intensitate $P_{max\,1,2,3}$, condiția de stabilitate (1) capătă următoarele forme *individualizate* (grație separării efectelor):

$$P_{max\,1} \leqslant P_{a\,1} = \left(\frac{P_{cr}}{c_s}\right)_1 = min.\left(\frac{P_{sup}}{c_{sup}}, \frac{P_{inf}}{c_{inf}}\right)_1 < \tag{2}$$

$$< P_{cr\,1} = min.\,(P_{sup}, P_{inf})_1,$$

$$P_{max\,2} \leqslant P_{a\,2} = \left(\frac{P_{cr}}{c_s}\right)_2 = min.\left(\frac{P_{sup}}{c_{sup}}, \frac{P_{inf}}{c_{inf}}\right)_2 < \tag{3}$$

$$< P_{cr\,2} = min.\,(P_{sup}, P_{inf})_2,$$

$$P_{max\,3} \leqslant P_{a\,3} = \left(\frac{P_{cr}}{c_s}\right)_3 = min.\left(\frac{P_{sup}}{c_{sup}}, \frac{P_{inf}}{c_{inf}}\right)_3 < \tag{4}$$

$$< P_{cr\,3} = min.\,(P_{sup}, P_{inf})_3,$$

imaginile grafice corespunzătoare fiind cele redate în figura 2*a*.

În baza *principiului clasic al superpoziției* (suprapunerii efectelor), reunind cele trei imagini grafice din figura 2*a*, într-un singur sistem grafic,

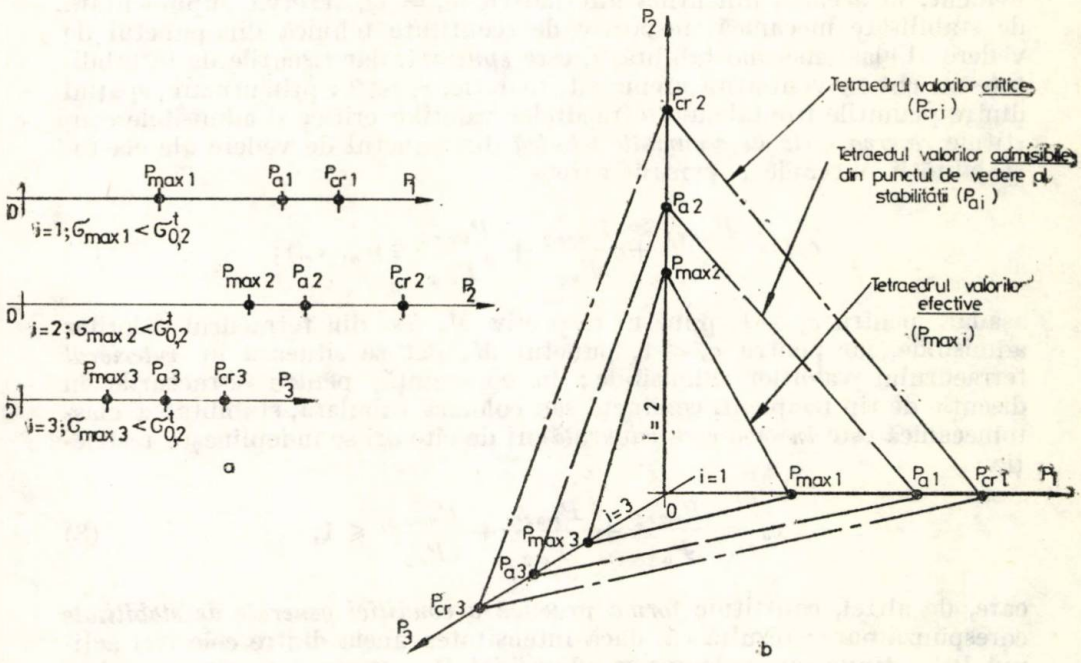


Fig. 2. — Imaginile grafice ale condițiilor de stabilitate (2)—(9), corespunzătoare cazului solicitării prin trei acțiuni mecanice concomitente și distincte ca intensități cunoscute : *a* — corespunde ecuațiilor (2) — (4); *b* — corespunde ecuațiilor (5)—(9).

cu coordonate de tipul coordonatelor carteziene rectangulare (fig. 2 *b*), se pun în evidență următoarele tetraedre *drepte*, de regulă *inechifaciale*:

● *tetraedrul valorilor critice*, în al cărui plan frontal se găsește orice punct $M_{cr}(P_{max\,1,2,3})$ ale cărui coordonate $(P_{max\,1,2,3})$ îndeplinesc condiția:

$$c_{cr} = \frac{P_{max\,1}}{P_{cr\,1}} + \frac{P_{max\,2}}{P_{cr\,2}} + \frac{P_{max\,3}}{P_{cr\,3}} = 1; \tag{5}$$

evident, pentru $c_{cr} > 1$, punctul respectiv M_{cr} *iese* din tetraedrul valorilor critice, iar pentru $c_{cr} < 1$, punctul M_{cr} dat se situează în *interiorul* tetraedrului valorilor critice; așadar, ori de cîte ori se obțin valori $c_{cr} = 1$, structurile în cauză de tip recipient, conductă sau coloană tubulară sînt în mod cert *instabile*, fenomenele de colaps fiind inevitabile și inprognozabile ca atare; pentru $c_{cr} < 1$, structurile respective sînt *stabile*, însă cu o rezervă de securitate tehnică mai mică sau mai mare, așa cum se precizează în continuare;

● *tetraedrul valorilor admisibile* din punctul de vedere al stabilității, în al cărui plan frontal se găsește oricare punct $M_a(P_{max\,1,2,3})$ ale cărui coordonate $(P_{max\,1,2,3})$ îndeplinesc condiția:

$$c_a = \frac{P_{max\,1}}{P_{a\,1}} + \frac{P_{max\,2}}{P_{a\,2}} + \frac{P_{max\,3}}{P_{a\,3}} = 1; \tag{6}$$

evident, în această din urmă alternativă ($c_a = 1$), rezerva suplimentară de stabilitate mecanică, respectiv de securitate tehnică din punctul de vedere al elastomecanostabilității, este *epuizată*, dar riscurile de instabilitate nu pot surveni atîta vreme cît, teoretic, $c_{cr} < 1$; prin urmare, spațiul dintre planurile frontale ale tetraedrelor valorilor critice și admisibile constituie *rezerva certă de securitate tehnică* din punctul de vedere ale elastostabilității mecanice, pentru care

$$c_{ST} = \frac{P_{max\,1}}{P_{a\,1}} + \frac{P_{max\,2}}{P_{a\,2}} + \frac{P_{max\,3}}{P_{a\,3}} \in [c_a,\ c_{cr}); \tag{7}$$

așadar, pentru $c_a > 1$, punctul respectiv M_a *iese* din tetraedrul valorilor admisibile, iar pentru $c_a < 1$, punctul M_a dat se situează în *interiorul* tetraedrului valorilor admisibile; în consecință, pentru structurile în discuție de tip recipient, conductă sau coloană tubulară, stabilitatea elastomecanică este *în mod cert asigurată* ori de cîte ori se îndeplinește restricția:

$$c_a = \frac{P_{max\,1}}{P_{a\,1}} + \frac{P_{max\,2}}{P_{a\,2}} + \frac{P_{max\,3}}{P_{a\,3}} \leqslant 1, \tag{8}$$

care, de altfel, constituie *forma practică a condiției generale de stabilitate* corespunzătoare; rezultă că, dacă intensitatea uneia dintre cele trei acțiuni $P_{max\,1}$ tinde spre valoarea sa admisibilă $P_{a\,1}$, atunci intensitatea celorlalte două acțiuni—fiecare în parte—trebuie să tindă spre zero, pentru ca restricția (8) să fie satisfăcută;

• *tetraedrul valorilor efective*, în al cărui plan frontal se află oricare punct $M(P_{1,2,3})$ ale cărui coordonate $(P_{1,2,3})$ îndeplinesc condiția:

$$c = \frac{P_1}{P_{max\,1}} + \frac{P_2}{P_{max\,2}} + \frac{P_3}{P_{max\,3}} = 1; \tag{9}$$

pentru $c \in [1; c_a = 1]$, punctul M se situează în spațiul delimitat de planurile frontale ale tetraedrelor valorilor efective și admisibile, spațiul respectiv determinînd o așa-numită *rezervă suplimentară de securitate tehnică* din punctul de vedere al elastostabilității mecanice; cînd $c < 1$, evident, punctul dat M se găsește în *interiorul valorilor efective*.

Pentru structurile de tip recipient, conductă sau coloană tubulară care sînt solicitate tot în domeniul *tehnic elastic* ($\sigma_{max\,i} < \sigma'_{0,2}$), dar prin $k \neq 0$ *acțiuni mecanice concomitente și distincte* ($P_1 \neq P_2) \neq \ldots \neq P_i \neq \ldots \neq P_k$) de intensitate $P_{max\,1,2,\ldots,i,\ldots,k}$, *condiția generală corespunzătoare de stabilitate elastomecanică* se poate formula — cu luarea în considerație și a principiului Palmgren-Miner [3,5], respectiv a precizărilor atribuite lui Harvey [4] și Jinescu [6] — astfel:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{P_{max\,i}}{P_{a\,i}} = c_a \leqslant 1 \quad \text{sau} \quad \sum_{i=1}^{k} \frac{P_{max\,i}}{P_{cr\,i}} = c_{cr} < 0{,}25 \ldots 0{,}65^{*)} \tag{10, 11}$$

pentru *cazul particular* cu $k = 2$ din (10) rezultînd:

$$\frac{P_{max\,1}}{P_{a\,1}} + \frac{P_{max\,2}}{P_{a\,2}} \leqslant 1, \tag{12}$$

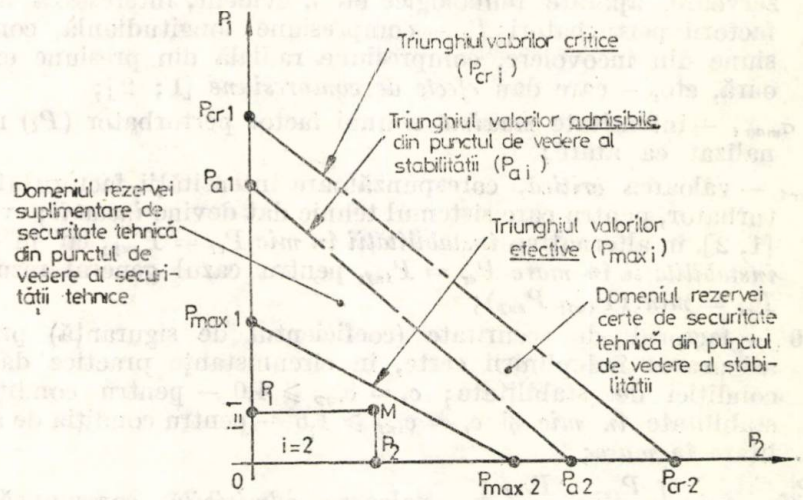


Fig. 3. — Imaginea grafică a condiției de stabilitate (12), corespunzătoare cazului solicitării prin două acțiuni mecanice concomitente și distincte de intensități cunoscute.

*) Valorile mici $c_{cr} = 0{,}25 = c_{sup}^{-1} = 1/4{,}0$ corespund stabilității *în mic*, iar valorile mai mari $c_{cr} = 0{,}65 \approx c_{in}^{-} = 1/1{,}5$ corespund stabilității *în mare*.

iar pentru *cazul particular* cu $k = 1$ tot din (10) obținîndu-se :

$$\frac{P_{max\,1}}{P_{a\,1}} \leqslant 1, \text{ respectiv } P_{max\,1} \leqslant P_{a\,1}. \tag{13}$$

Inecuațiile (12) și (13), prezente în lucrările autografe [1, 2, 5] pe un alt fundament ingineresc, se pot obține și direct din condiția de stabilitate (8). Imaginea grafică a restricției (13) se regăsește în figura 1 (pentru $i=1$), iar ilustrarea grafică a restricției (12) se materializează în figura 3, care pune în evidență în mod sugestiv : triunghiul valorilor critice, triunghiul valorilor admisibile, triunghiul valorilor efective, domeniul rezervei certe de securitate tehnică și domeniul rezervei suplimentare de securitate tehnică — toate acestea, bineînțeles, din punctul de vedere al stabilității elastomecanice.

NOTAȚII

P_i reprezintă intensitatea factorului perturbator de ordinul i ($i = 1, 2, 3, \ldots, k$), de natura unei forțe exterioare ($P_i = F_i$, în N sau $P_i = p_i$, în N/m^2 → Pa) sau interioare (denumite efort → $P_i = N_i$, în N), unui moment al cuplului de forțe exterioare sau interioare (moment încovoietor → $P_i = M_i$, în N.m) sau unei tensiuni mecanice (efort unitar → $P_i = \sigma_i$, în N/mm^2, respectiv MPa); din punctul de vedere al elastostabilității sistemelor de tipul învelișurilor de revoluție (tubulaturi, conducte, recipiente, rezervoare, aparate tehnologice etc.), evident, interesează numai factorii perturbatori P_i — compresiune longitudianlă, compresiune din încovoiere, compresiune radială din presiune exterioară, etc. — care dau *efecte de compresiune* [1; 2];

$P_{max\,i}$, $\sigma_{max\,i}$ — intensitate *maximă* a unui factor perturbator (P_i) nominalizat ca atare;

P_{cr}, $P_{cr\,i}$ — valoarea *critică*, corespunzătoare intensității factorului perturbator, pentru care sistemul tehnic dat devine *instabil*; evident [1, 2], în alternativa *instabilității în mic* $P_{cr} = P_{sup}$, iar în cea a *instabilității în mare* $P_{cr} = P_{inf}$, pentru cazul general rezultînd $P_{cr} = min.\,(P_{inf}, P_{sup})$;

$c_s > 1{,}0$ — factorul de securitate (coeficientul de siguranță) privind asigurarea îndeplinirii certe, în circumstanțe practice date, a condiției de stabilitate; $c_s = c_{sup} \geqslant 4{,}0$ — pentru condiția de stabilitate *în mic* și $c_s = c_{inf} \geqslant 1{,}5$ — pentru condiția de stabilitate *în mare*;

$P_a = \dfrac{P_{cr}}{c_s} = min.\left(\dfrac{P_{sup}}{c_{sup}}, \dfrac{P_{inf}}{c_{inf}}\right)$ — valoarea *admisibilă*, corespunzătoare intensității factorului perturbator, pentru care sistemul tehnic dat este *în mod cert stabil* (atît în mic, cît și în mare);

$\sigma^t_{0.2}$ — limita tehnică de curgere a materialului pus în operă, la temperatura sa de calcul (t), în N/mm^2 → MPa.

Observație. Mărimile (P_{cr}, $P_{cr\,i}$) și (P_a, $P_{a\,i}$) sînt *caracteristici*

intrinseci ale elementului, componentei sau sistemului tehnic în discuție, valoarea lor depinzînd de materialul pus în operă ($\sigma'_{0,2}$), de dimensiunile secțiunilor transversale, de temperatură, uneori de lungimea de calcul etc.

Primit la redacție la 20 noiembrie 1986

BIBLIOGRAFIE

1. A. PAVEL, *Elastostabilitatea recipientelor cilindrice*, Edit. Academiei, București, 1983.
2. A. PAVEL, *Stabilitatea recipientelor*, Edit. Academiei București, 1985.
3. M. A. MINER, In : J. Appl. Mech., **12**, Sept. A—159 (1945).
4. J. F. HARVEY, *Pressure vessel design : nuclear and chemical applications*, Princeton, D. van Nostrand Co., Inc., 1963 și *Theory and design of modern pressure vessels*. New York, Van Nostrand Reinhold Co., 1974.
5. A. PAVEL, *Elemente de inginerie mecanică (pentru petrochimie)*. Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1981.
6. V. V. JINESCU, *Utilaj tehnologic pentru industrii de proces*. Vol. 1, Edit. Tehnică, București, 1983.

Prof. emerit

ing. CONSTANTIN AVRAM

MEMBRU CORESPONDENT
AL ACADEMIEI R. S. ROMÂNIA

19 februarie 1911—22 martie 1987

La 22 martie 1987, a încetat din viaţă profesorul emerit ing. Constantin Avram, membru corespondent al Academiei R. S. România, personalitate proeminentă a vieţii ştiinţifice şi a învăţământului tehnic superior din ţara noastră.

S-a născut în satul Ciumaşi, comuna Iteşti, judeţul Bacău, la 19 februarie 1911. După absolvirea liceului la Bacău, în 1930, se înscrie la Şcoala pregătitoare de ofiţeri de geniu din Bucureşti pe care a absolvit-o ca şef de promoţie în 1932. În perioada 1933—1935 a urmat în Franţa „Ecole Militaire et d'Application du Génie" din Versailles, ca bursier. Întors în ţară, în 1936, se înscrie ca ofiţer activ la Facultatea de Construcţii de la Şcoala Politehnică din Bucureşti, obţinînd în 1940, ca şef de promoţie, diploma de inginer constructor cu calificativul „Cu distincţie". În anul 1945 iese, la cerere, din cadrul armatei şi continuă activitatea la Facultatea de Construcţii din Bucureşti ca asistent, funcţie pe care a ocupat-o prin cumul încă de la absolvirea facultăţii. În anul 1948 este numit prin concurs profesor universitar la disciplina de beton armat de la Facultatea de Construcţii din cadrul Institutului Politehnic Timişoara şi din anul 1953 pînă în anul 1975, cînd a ieşit la pensie, a fost şeful Catedrei de beton armat şi clădiri.

În anii 1948—1949 a predat în paralel cursurile de statica construcţiilor şi poduri de beton armat, între anii 1949—1952 cursurile de rezistenţa materialelor şi teoria elasticităţii, iar între anii 1960—1963 cursul de statica şi dinamica construcţiilor la Facultatea de Construcţii din Timişoara. A sprijinit tînăra Facultate de Construcţii nou înfiinţată în cadrul Institutului Politehnic Cluj-Napoca, prin predarea cursului de beton armat în perioada 1954—1959.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 46, NR. 4, 1987, P. 400—402

Profesorul Constantin Avram a fost rectorul Institutului Politehnic „Traian Vuia" din Timișoara între anii 1963—1971.

În activitatea didactică profesorul Constantin Avram a fost un pedagog desăvîrșit, lecțiile sale, în amintirea celor care le-au audiat, studenți și colaboratori, sînt păstrate ca modele de claritate, concizie și nivel științific ridicat.

În paralel cu activitatea didactică, cu totul remarcabilă, desfășurată fără întrerupere timp de 35 de ani, cunoscută și unanim apreciată, profesorul C. Avram a desfășurat și o bogată activitate tehnică și de cercetare științifică. Ca inginer proiectant sau consultant, a lucrat mai mulți ani la filialele din Timișoara, IPROM, IPROMET, la DSAPC-Timiș și la Uzinele din Reșița, contribuind la realizarea unor lucrări de seamă în domeniul construcțiilor civile, industriale și hidroenergetice.

Activitatea științifică a desfășurat-o în cadrul Catedrei de beton armat și laboratorului de beton armat, bază materială creată din inițiativa profesorului Constantin Avram și exploatată împreună cu filiala INCERC din localitate, reprezentînd un exemplu de integrare a învățămîntului cu cercetarea științifică încă din anul 1953. Această activitate a fost concretizată în peste 110 lucrări din domeniul betonului armat publicate în țară și peste hotare, precum și prin publicarea a 27 cărți tehnice și cursuri universitare în domeniul mecanicii structurilor și betonului armat, personale sau scrise împreună cu colaboratorii săi.

În domeniul betonului armat și al mecanicii construcțiilor a studiat:

— fisurarea și ductilitatea elementelor de beton armat și beton precomprimat;

— betonul simplu și betonul slab armat, materiale prezentate la sesiunile plenare CEB (Comité Euro-International du Béton): Copenhaga (1971), Londra (1973) și Atena (1976);

— îmbunătățirea caracteristicilor fizico-mecanice ale betonului prin tehnologia revibrării: rezultate prezentate la al V-lea Congres FIP de la Paris (1966);

— acoperișuri lamelare cu simplă și dublă curbură: rezultate prezentate la Conferința de structuri spațiale de la Londra (1966);

— structuri compuse oțel-beton;

— betoane cu armare dispersă (cu fibre de sticlă și de oțel) și betoane impregnate și polimerizate;

— calculul plastic al structurilor din beton armat;

— structuri în cadre-diafragme: rezultatele studiilor teoretice și experimentale la al 8-lea Congres AIPC de la New-York (1968);

— interacțiunea suprastructură-fundație-teren;

— beton parțial precomprimat.

Dintre cele 27 cărți publicate (cursuri, manuale, tratate) menționăm: „Grinzi continue", „Manualul pentru calculul construcțiilor", „Rezistențele și deformațiile betonului" (tradusă în limba engleză), „Structuri spațiale" (tradusă în limba engleză), „Structuri compuse oțel-beton", „Noi tipuri de betoane speciale", „Structuri din beton armat, metoda elementelor finite și teoria echivalențelor".

Un merit deosebit al profesorului Constantin Avram este acela de a fi creat la Timişoara o şcoală în domeniul betonului armat cunoscută şi apreciată în ţară şi peste hotare, profesorul Constantin Avram fiind recunoscut ca reprezentantul nostru necontestat în acest domeniu de specialitate. Şcoala de beton armat din Timişoara a contribuit la afirmarea şi ridicarea prestigiului ştiinţei româneşti.

Pentru activitatea tehnică şi ştiinţifică, în anul 1963 profesorul C. Avram a fost ales membru corespondent al Academiei R. S. România şi din anul 1970 membru al Consiliului Naţional pentru Ştiinţă şi Tehnologie. De asemenea, a fost ales membru în mai multe asociaţii ştiinţifice naţionale şi internaţionale: CNIT (Consiliul Naţional al Inginerilor şi Tehnicienilor;) RILEM (Réunion Internationale des Laboratoires d'Essais et de Recherches sur les Matériaux et les Constructions (Paris, 1960); FIP (Fédération Internationale de la Précontrainte (Londra, 1966); CEB (Comité Euro-International du Béton (Paris, 1968); membru al consiliului de administraţie CEB (1971—1977); AIPC (Association Internationale des Ponts et Charpentes (Zurich, 1967); Commission Mixte AIPC-CEB-CECM-FIP" Construction mixtes acier-béton (Paris, 1971); Council on Tall Buildings and Urban Habitat Bethlehem-SUA, 1971); AFB (Association française de béton (Paris, 1972).

Din anul 1952, sub conducerea ştiinţifică a profesorului Avram, 36 ingineri din şcoală, producţie şi străinătate au obţinut titlul ştiinţific de doctor inginer.

Prodigioasa activitate didactică, ştiinţifică şi tehnică a fost recunoscută prin mai multe ordine şi medalii, între care Ordinul Muncii, Ordinul Meritul Ştiinţific şi prin conferirea titlului de Profesor emerit.

Profesorul C. Avram a fost unul din cei mai de seamă ingineri şi oameni de ştiinţă ai ţării noastre.

Cinstit, demn, corect, cu multă dragoste faţă de studenţi şi colaboratori, a fost stimat şi iubit de toţi aceia care l-au cunoscut. Calităţile sale au completat în modul cel mai fericit omul Constantin Avram cu inginerul, profesorul şi omul de ştiinţă.

Acad. DAN MATEESCU

GARY HAMMOND, AGVS *at Work, Automated Guided Vehicle Systems* (AGVS la lucru. Sisteme de vehicule automate, ghidate),
IFS (Publications) Ltd., UK, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1986, 238 p.

Cartea se ocupă de un domeniu foarte modern al roboticii : construcția și utilizarea sistemelor de vehicule automate ghidate. Aceste sisteme sînt menite să realizeze în medii industriale și neindustriale așa-zisul „transfer lung" al obiectelor de lucru între depozite și/sau posturi de prelucrare.

Se prezintă la început definiția unui sistem de vehicuhe automate ghidate, tipurile de vehicule care intră în această categorie, istoria apariției și dezvoltării acestor sisteme, argumentele tehnice, organizatorice și economice care pledează pentru utilizarea lor.

Se trece în continuare la prezentarea construcției componentelor sistemului : vehicule, facilități de ghidare a acestora, facilități de control și comunicare în timpul operării sistemului.

Un capitol special este consacrat simulării pe calculator a funcționării sistemului de vehicule automate ghidate.

O parte importantă a cărții este consacrată implementării în procese de lucru a sistemelor de vehicule automate ghidate. Se prezintă modalitățile de implementare a acestor sisteme în manipularea materialelor, în procese de asamblare, în procese de fabricare a unor componente electronice ; se acordă atenția cuvenită folosirii sistemelor de vehicule automate ghidate în cadrul celulelor, liniilor și atelierelor de fabricație flexibilă și în aplicații de manipulare a unor sarcini mari, inclusiv cu vehicule avînd roboți industriali îmbarcați. Un interes deosebit prezintă capitolul referitor la utilizarea sistemelor de vehicule ghidate automat în aplicații diferite de procese de fabricație.

Se prezintă modalități de utilizarea acestor sisteme în spitale, în clădirile de birouri, în centrale poștale, în organizarea și servirea circuitelor de vizitatori.

Pe lîngă prezentarea problemelor generale, specifice fiecărui tip de aplicație, sînt trecute în revistă 26 studii de caz a unor implementări realizate, fapt care conferă cărții un puternic caracter practic.

Lucrarea se încheie cu succinte referiri la direcții de dezvoltare viitoare ale sistemelor de vehicule automate ghidate, referitoare la probleme constructive, de comandă, de simulare, de protecția muncii, de montarea roboților industriali pe vehicule.

Cartea este un interesant material de primă informare în ceea ce privește sistemele de vehicule automate ghidate. Ea se adresează cercetătorilor care lucrează în domeniul roboticii și a tehnologiilor flexibile, inginerilor mecanici și electrotehnicieni.

Fr. Kovács

A. QUENZER (sub red.), *Lasers in Manufacturing* (Laserii în prelucrare), Proceedings of the 3rd International Conference, 3—5 June 1986, Paris, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo, 1986, 392 p., 152 fig.

Volumul cuprinde 41 lucrări prezentate în cadrul celei de-a 3-a Conferințe internaționale „Lasers in manufacturing", care a avut loc în perioada 3—5 iun. 1986, la Paris (Franța).

Lucrările prezentate sînt structurate în următoarele capitole. Aspecte internaționale ale aplicării laserilor în industrie ; Tăiere cu laseri ; Sudare ; Tratament termic superficial ; Echipamente laser ; Fiabilitatea și eficiența economică a echipamentelor laser.

Sînt prezentate direcțiile de dezvoltare și de aplicare a laserilor în cadrul programului BRITE (Belgia), respectiv în S.U.A. și Japonia. În mod preponderent, utilizarea laserilor este preconizată în domeniul comunicațiilor și prelucrării informațiilor, al metodelor de control, al

prelucrărilor de precizie (materiale plastice, metale, materiale ceramice), al electrotehnicii și microelectronicii, respectiv în domeniul medical și militar. De asemenea, se urmărește realizarea unor laseri de putere mare (15—20 kW) pentru utilizarea în domeniul sudării, tăierii și prelucrării metalelor.

Pentru tăiere se preconizează utilizarea laserilor CO_2 de 400—500 W în regim continuu, respectiv laseri YAG — Nd de 100 W în regim de impulsuri, cu aplicații în domeniul schimbătoarelor de căldură (CNE), respectiv la tăierea unor table din oțel carbon și inoxidabil cu grosimi pînă la 5 mm. De asemenea, s-au făcut cercetări asupra influenței compoziției amestecurilor de gaze și a presiunii acestora asupra geometriei muchiei tăiate, respectiv a implementării robotizării laserilor pentru tăiere.

În ceea ce privește utilizarea laserilor la sudarea metalelor, se remarcă preocupări în legătură cu sudarea oțelurilor slab aliate și inoxidabile (austenitice, feritice), oțeluri Cr—MO, Ni—Cr—Mo (2—10 mm), sudarea țevilor în placă tubulară (CNE) și sudarea foliilor de nichel (0,5—1 mm).

În domeniul tratării suprafețelor cu ajutorul laserilor se realizează durificarea superficială a unor oțeluri, respectiv aliaje neferoase și depuneri de pulberi în amestec (Ni—Cr—Al—Hf, Ni—Cr, stellite) pe oțeluri inoxidabile. S-a constatat o bună aderență și omogenizare a depunerilor, respectiv un conținut mic de pori și absența fisurilor în metalul depus.

Pentru aplicații industriale se utilizează frecvent laserii cu CO_2 în regim de mare putere (1000—1500 W) cu excitație prin descărcare în radio-frecvență, unii prezentînd posibilități de utilizare atît în regim continuu, cît și în regim de impulsuri.

Se menționează implementarea robo-laserilor în industria de automobile, în domeniul nuclear și la realizarea prelucrărilor de înaltă precizie.

Lucrările prezintă interes pentru implementarea utilizării laserilor, pentru tăiere și sudare, respectiv prelucrări de precizie în domeniul construcțiilor de mașini, nuclear, electrotehnică și microelectronică.

D. Cioclov

M.J.IREMONGER, *BASIC Stress Analysis* (Calcule de rezistență în BASIC). Butterworths, London, 1982, 145 p.

Volumul a fost elaborat în ideea de a oferi studenților din facultățile tehnice, ca și inginerilor din proiectare, un ansamblu de cunoștințe teoretice și practice în domeniul aplicării calculului automat la rezolvarea principalelor probleme ale rezistenței materialelor. Ca limbaj de programare a fost ales cel cunoscut sub prescurtarea BASIC, considerat, pe bună dreptate, ca fiind cel mai accesibil personalului ingineresc, atît prin posibilitatea însușirii lui rapide, cît și prin avantajele certe pe care la prezintă în ceea ce privește rezolvarea pe microcalculatoare a problemelor de specialitate, de amploare mică sau mijlocie.

Primele două capitole ale volumului cuprind o introducere succintă în tehnica de însușire și de folosire a limbajului de programare BASIC și o scurtă prezentare a problemelor tratate. Celelalte șase capitole ale lucrării se ocupă cu prezentarea modului de rezolvare automată a problemelor tipice de rezistența materialelor, în ordinea logică stabilită de cursurile universitare de specialitate.

Primele aspecte tratate se referă la determinarea caracteristicilor de calcul (tensiuni, deformații specifice, modul de elasticitate, dimensiuni) în cazul întinderii centrice și a impactului. În continuare se prezintă modul de rezolvare a problemelor de calcul la solicitări simple, privind încovoierea simplă, lunecarea și torsiunea, după care urmează solicitările compuse (compresiune excentrică, solicitări pe două direcții, solicitări pe trei direcții).

Un capitol special se referă la cedarea materialelor și elementelor sau pieselor de construcții prin rupere fragilă, oboseală sau flambaj. În sfîrșit, ultimul capitol este consacrat structurilor alcătuite din plăci curbe cu simetrie axială.

Fiecare capitol este structurat după modelul : aspecte teoretice—exemple de calcul — probleme de rezolvat. Dintre acestea, exemplele de calcul reprezintă partea cea mai importantă, în care se prezintă enunțul problemei, lista instrucțiunilor programului, rezultatul rulării acestuia pe microcalculator și comentarii asupra structurii programului, modului de folosire și rezultatelor obținute.

În ansamblu volumul prezintă rezolvarea pe microcalculator, într-o manieră sistematică și prin folosirea limbajului de programare BASIC, a unui număr important de probleme simple de rezistența materialelor, care conduc la elaborarea de programe de calcul de mică amploare

(pînă la 100 de instrucțiuni). De aceea va putea fi consultat cu folos de către studenții din primii ani ai facultăților tehnice, precum și de toți acei care doresc să-și însușească tehnica de programare pe o cale simplă, rapidă și eficientă și să rezolve pe calculator problemele de rezistența materialelor rezultate din activitatea didactică sau de producție.

M. V. Soare și V. Petcu

E. ROSENTHAL, *Programmes de résistance des matériaux sur ORIC-1 et ORIC ATMOS.* (Programe de rezistența materialelor pe ORIC-1 și ORIC ATMOS). Eyrolles, Paris, 1984, 193 p.

Acest volum apare în colecția Dosarele construcției, în seria de Informatică aplicată. El este consacrat unor programe scrise pentru microcalculatorul ORIC-1 în limbaj BASIC și reunește o serie de probleme clasice de rezistența materialelor și statica construcțiilor.

Fiecare program este prezentat într-o scurtă descriere, un listing cu comentarii și unul sau mai multe exemple de aplicare.

Volumul are patru capitole cu un total de 19 probleme programate ; ele sînt :

a) Stabilirea caracteristicilor geometrice ale secțiunilor, cu referire specială la secțiunile metalice simple sau compuse. Aceste caracteristici se referă la aria totală, momentele de inerție axiale, modulii de rezistență, razele de inerție și coordonatele centrului de greutate.

b) Determinarea reacțiunilor, eforturilor și deplasărilor caracteristice la grinzi static determinate (grinzi simplu rezemate, console) și la grinzi static nedeterminate (grinda încastrată la un capăt și simplu rezemată la celălalt, grinda dublu încastrată), inclusiv grinda continuă pe trei reazeme cu deschideri inegale.

c) Determinarea eforturilor și reacțiunilor la grinzi drepte pe mai multe reazeme (grinzi compuse static determinate, cu 2—5 deschideri, grinzi continue cu 2—5 deschideri egale), la care se adaugă grinda circulară închisă pe 3—10 reazeme, la care se determină și momentele de torsiune. Un caz special îl constituie tirantul continuu, solicitat la întindere cu încovoiere.

d) Determinarea reacțiunilor, eforturilor și deplasărilor caracteristice la cadrele-portal articulate sau încastrate în fundații, avînd riglele înclinate sau cu două pante. Sînt luate în considerare încărcări verticale și orizontale, la cadrele cu rigla în două pante fiind incluse și încărcările verticale și orizontale provenind din acțiunea podurilor rulante.

e) Determinarea reacțiunilor din rezemări și a eforturilor maxime la grinzile de rulare simplu rezemate, solicitate de forțele verticale și orizontale produse de unul sau de două poduri rulante.

Prezentarea și comentarea succintă a fiecărei probleme tratate este urmată de enumerarea notațiilor și codificărilor folosite, de listarea programului de calcul și de reproducerea rezultatelor obținute prin rularea acestora, pentru unul sau mai multe exemple de aplicare.

Principala caracteristică pozitivă a lucrării constă în folosirea limbajului de programare BASIC la scrierea celor 19 programe de calcul. Avantajul acesteia constă în obținerea imediată a rezultatelor de către utilizatori, prin folosirea microcalculatoarelor personale, precum și în posibilitatea abordării lucrării fără dificultăți, de către un mare număr de specialiști.

Prin modul în care este concepută și prezentată, lucrarea este deosebit de utilă și accesibilă atît inginerilor constructori, cît și studenților din învățămîntul superior de construcții.

Poate că prezentarea succintă a teoriei care a stat la baza programării, precum și reprezentarea grafică (diagrame de variație T, M, M_t) etc.) a rezultatelor ar fi contribuit în și mai mare măsură la trezirea interesului specialiștilor în construcții pentru programare.

În orice caz, cunoscuta editură Eyrolles a avut o inițiativă fericită care contribuie la răspîndirea aplicării calculului automat în construcții.

M. V. Soare și V. Petcu

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 46, nr. 5 **septembrie—octombrie 1987**

SUMAR

STUDII

N. PANDREA şi MARINA PANDREA, Determinarea centrului elastic prin metoda deplasărilor relative 409

ANA DUCARU-DRAGA, Mişcarea subsonică în prezenţa unui profil portant, într-o formulare variaţională 426

V. FLORIAN şi E. ŞOVĂREL, Cinematica sapelor cu role „cu alunecare" 431

I. DUDA, O metodă de determinare a soluţiei pentru deformaţiile din jurul unui tunel orizontal circular 441

GH. D. PASAT şi A. PANTAZOPOL, Influenţa forţelor hidrodinamice asupra turaţiei critice a dispozitivelor de amestecare 451

M. MUNTEANU, Vibraţiile plăcilor subţiri sub acţiunea unor ciocniri transversale . . . 458

I. SPULBER şi C. SPULBER, Aplicaţii la calculul preliminar al supapelor de presiune în regim viscos 467

GH. I. ENE şi P. BRATU, Stabilirea parametrilor dinamici ai transportoarelor vibratoare elicoidale 471

NOTE

ADELINA GEORGESCU, Notă asupra unor probleme izoperimetrice în calculul elicei de randament maxim 478

RECENZII 483

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Articolele, originale și de înalt nivel științific, vor fi redactate într-un stil concis, evitîndu-se introducerile foarte lungi. Articolele vor fi dactilografiate la două rînduri, pe hîrtie albă de bună calitate, în două exemplare. Prima pagină trebuie să conțină titlul lucrării, numele autorului (autorilor) și locul de muncă precum și un rezumat de cel mult 150 cuvinte. Toate datele științifice și tehnice prezentate trebuie formulate în unități SI. Formulele trebuie dactilografiate sau scrise cu cerneală, clar și indicîndu-se caracterul literelor (aldine, italice etc.). Indicii inferiori și superiori trebuie indicați clar, pentru evitarea confuziilor. Ca semn zecimal se va utiliza virgula. Tabelele vor fi dactilografiate pe foi separate, cu indicarea titlurilor și cu numerotarea în cifre arabe. Desenele și diagramele trebuie executate în tuș, pe hîrtie de calc la dimensiuni aproximativ duble față de acelea finale și cu litere scrise cu îngrijire și suficient de mari pentru a fi vizibile după reproducere. Referințele bibliografice vor fi menționate, pe cît posibil, în ordine alfabetică, la sfîrșitul articolului. În text vor fi indicate prin numărul din lista referințelor, în paranteze drepte.

Referințele din reviste vor conține inițiala și numele autorului (autorilor), titlul articolului (subliniat cu o linie) numele revistei (prescurtat conform uzanțelor internaționale), numărul volumului (subliniat dublu), numărul fasciculei și anul de apariție în paranteză, de exemplu :

1. S. AIZICOVICI, C. FETECĂU, Existence of Couette flows in second grade fluids, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., 31, 5 (1986).

Referire la o carte se face indicînd inițiala și numele autorului (autorilor), titlul cărții (subliniat cu o linie), editura, orașul, anul apariției și numerele paginilor, dacă referirea se face la o parte a cărții, de exemplu :

3. W. FLÜGGE, Tensor Analysis and Continuum Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972, p. 93—99.

Manuscrisele vor fi trimise la adresa : 79717 București 22, Calea Victoriei 125.

DETERMINAREA CENTRULUI ELASTIC PRIN METODA DEPLASĂRILOR RELATIVE

de N. PANDREA și MARINA PANDREA
Institutul de Subingineri, Pitești

Utilizarea centrului elastic într-o serie de aplicații tehnice inginerești în industriile de vîrf a condus la elaborarea unor lucrări teoretice recente în care se pun în evidență noi proprietăți ale acestuia.
Pe această linie se situează și prezenta lucrare în care, cu ajutorul teoriei șuruburilor și a metodei deplasărilor relative, se definește centrul elastic pentru un sistem hibrid (format din bare elastice și corpuri rigide), se arată cum se obține matricea de rigiditate a unui asemenea sistem, se determină condițiile de existență a centrului elastic și a axelor elastice, se studiază efectul simetriilor și se redă modul efectiv de lucru pe două exemple care se prezintă în partea finală a lucrării.

1. INTRODUCERE

Într-o serie de lucrări, relativ recente, centrul elastic este utilizat în calculul sistemelor statice nedeterminate [5], [14], studiul vibrațiilor rigidului cu legături elastice [2], [4], [6], calculul mecanismelor cu cuple cinematice elastice [3], calculul captoarelor tensometrice pentru măsurarea torsorului forțelor de contact de la roțile automobilelor, precum și în calculul mecanismelor de complianță [12] ale roboților industriali folosiți la operațiile de montaj.

Abordarea acestor probleme a condus la extinderea noțiunii de centru elastic, de la sisteme plane la sisteme spațiale și la stabilirea de noi proprietăți ale acestuia.

Pe această linie se situează lucrarea [12] în care se determină centrul elastic (C_E) al unui mecanism de complianță (fig. 3) care echipează un robot industrial de montaj.

Cu acest prilej s-a evidențiat faptul că prin utilizarea metodei deplasărilor relative [10] problema determinării centrului elastic se reduce la determinarea unei transformări de la sistemul de referință dat la un alt sistem de referință față de care matricea de rigiditate a sistemului are o formă diagonală.

În prezenta lucrare se va deduce, cu ajutorul teoriei șuruburilor și a deplasărilor relative, matricea de rigiditate a unui sistem spațial hibrid, se vor stabili condițiile generale de existență a centrului elastic, se va determina centrul elastic atunci cînd acesta există și se vor evidenția noi proprietăți ale acestuia.

2. MATRICEA DE RIGIDITATE A UNEI BARE

Să considerăm o bară dreaptă de secțiune constantă și de lungime l și fie B, C centrele de greutate ale secțiunilor normale care mărginesc bara (fig. 1).

Considerăm de asemenea că bara face parte dintr-un sistem de bare deformabile, iar asupra barei izolate, în punctele B, C acționează forțele $\bar{f}_B$, $\bar{f}_C^*$, respectiv momentele $\bar{m}_B$, $\bar{m}_C^*$.

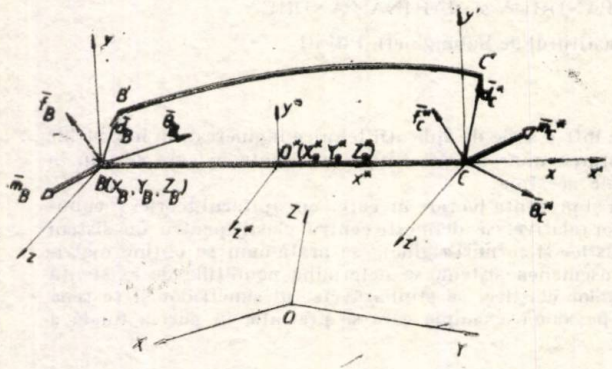


Fig. 1. — Forțele și deplasările de la capetele B, C ale unei bare.

Prin deformarea sistemului considerat bara ajunge în poziția $B'C'$, (fig. 1), deplasările secțiunilor normale fiind definite de vectorii de rotație $\bar{\theta}_B$, $\bar{\theta}_C^*$ și de vectorii de deplasare liniară $\bar{d}_B$, $\bar{d}_C^*$.

În vederea desfășurării calculului se folosesc notațiile:

$Bxyz$ — sistem local de referință în care axele By, Bz, sînt axe principale de inerție ale secțiunii din B, iar axa Bx este situată în lungul barei;

$Cx'y'z'$ — sistem local de referință cu originea în C și cu axele paralele cu axele triedrului $Bxyz$;

$OXYZ$ — sistemul general de referință;

(X_B, Y_B, Z_B) — coordonatele punctului B față de sistemul $OXYZ$;

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ — cosinusurile directoare ale axelor Bx, By, Bz $(i = 1, 2, 3)$ față de sistemul $OXYZ$;

$(\theta_{Bx}, \theta_{By}, \theta_{Bz})$, (d_{Bx}, d_{By}, d_{Bz}), (f_{Bx}, f_{By}, f_{Bz}), (m_{Bx}, m_{By}, m_{Bz}) proiecțiile vectorilor $\bar{\theta}_B$, $\bar{d}_B$, $\bar{f}_B$, $\bar{m}_B$ pe axele sistemului $Bxyz$;

$(\theta_{Cx}^*, \theta_{Cy}^*, \theta_{Cz}^*)$, $(d_{Cx}^*, d_{Cy}^*, d_{Cz}^*)$, $(f_{Cx}^*, f_{Cy}^*, f_{Cz}^*)$, $(m_{Cx}^*, m_{Cy}^*, m_{Cz}^*)$ — proiecțiile vectorilor $\bar{\theta}_C^*$, $\bar{d}_C^*$, $\bar{f}_C^*$, $\bar{m}_C^*$ pe axele sistemului $C\,x'y'z'$;

E — modulul de elasticitate longitudinal;

G — modulul de elasticitate transversal;

A — aria secțiunii barei;

I_y, I_z — momentele geometrice de inerție ale secțiunii din B în raport cu axele By, Bz;

I_x — momentul geometric de inerție, echivalent, pentru solicitarea de răsucire;

o^* — mijlocul distanței B, C;

$o^*x^*y^*z^*$ — sistem de referință local avînd axele paralele cu axele triedrului $Bxyz$.

Matricea de transformare din sistemul $Bxyz$ în sistemul $OXYZ$ [7], [8] se scrie sub forma,

$$[T] = \begin{bmatrix} [R] & [0] \\ [S]\ [R] & [R] \end{bmatrix}, \tag{1}$$

unde $[R]$ este matricea de rotație,

$$[R] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

iar $[S]$ este matricea de translație :

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & -Z_B & Y_B \\ Z_B & 0 & -X_B \\ -Y_B & X_B & 0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Pe baza relațiilor (1), (2), (3) rezultă că matricea de trecere din sistemul $C\,x'y'z'$ în sistemul $Bxyz$ se scrie :

$$[\tilde{T}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -l & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

În reprezentare locală șuruburile forță $\hat{\bar{f}}_B$, $\hat{\bar{f}}_C^*$ și șuruburile deplasare $\hat{\bar{d}}_B$, $\hat{\bar{d}}_C^*$ se exprimă în coordonate plückeriene [2], [7] sub forma :

$$\hat{\bar{f}}_B = (f_{Bx},\ f_{By},\ f_{Bz},\ m_{Bx},\ m_{By},\ m_{Bz}), \tag{5}$$

$$\hat{\bar{f}}_C^* = (f_{Cx}^*,\ f_{Cy}^*,\ f_{Cz}^*,\ m_{Cx}^*,\ m_{Cy}^*,\ m_{Cz}^*), \tag{6}$$

$$\hat{\bar{d}}_B = (\theta_{Bx},\ \theta_{By},\ \theta_{Bz},\ d_{Bx},\ d_{By},\ d_{Bz}), \tag{7}$$

$$\hat{\bar{d}}_C^* = (\theta_{Cx}^*,\ \theta_{Cy}^*,\ \theta_{Cz}^*,\ d_{Cx}^*,\ d_{Cy}^*,\ d_{Cz}^*). \tag{8}$$

Exprimînd șuruburile $\hat{\bar{d}}_C^*$, $\hat{\bar{f}}_C^*$ din sistemul $C\,x'y'z'$ în sistemul $Bxyz$, se obțin șuruburile,

$$\hat{\bar{d}}_C = (\theta_{Cx},\ \theta_{Cy},\ \theta_{Cz},\ d_{Cx},\ d_{Cy},\ d_{Cz}), \tag{9}$$

$$\hat{\bar{f}}_C = (f_{Cx},\ f_{Cy},\ f_{Cz},\ m_{Cx},\ m_{Cy},\ m_{Cz}), \tag{10}$$

care rezultă [2], [7] din relațiile :

$$\hat{\bar{d}}_C = [\tilde{T}]\ \hat{\bar{d}}_C^* \ ; \quad \hat{\bar{f}}_C = [\tilde{T}]\ \hat{\bar{f}}_C^*. \tag{11}$$

În calculele din relațiile (11) s-au considerat coordonatele șuruburilor organizate sub formă de vectori coloană. Această convenție o păstrăm pentru toate calculele care urmează.

După cum se arată în lucrările [1], [2], [10], [11], legătura dintre eforturile șurub și deplasările șurub se exprimă sub forma

$$\hat{\bar{f}}_B = [k_{BC}]\,\hat{\bar{d}}_{BC}, \tag{12}$$

unde $\hat{\bar{d}}_{BC}$ este deplasarea relativă șurub de la capetele barei,

$$\hat{\bar{d}}_{BC} = \hat{\bar{d}}_B - \hat{\bar{d}}_C, \tag{13}$$

iar $[k_{BC}]$ este matricea de rigiditate din sistemul local de referință exprimată prin relația

$$[k_{BC}] = \begin{bmatrix} [k_{12}] & [k_{11}] \\ [k_{22}] & [k_{21}] \end{bmatrix}, \tag{14}$$

matricele $[k_{11}]$, $[k_{22}]$, $[k_{12}[$, $[k_{21}]$ fiind definite prin relațiile :

$$[k_{11}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12\,EI_z}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12\,EI_y}{l^3} \end{bmatrix}; \quad [k_{22}] = \begin{bmatrix} \frac{G\,I_x}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4\,EI_y}{l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4\,EI_z}{l} \end{bmatrix}, \tag{15}$$

$$[k_{12}] = [k_{21}]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6\,EI_z}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Relația (12) ținînd seama de ecuația de echilibru,

$$\hat{\bar{f}}_B + \hat{\bar{f}}_C = 0, \tag{16}$$

se scrie și sub forma

$$\hat{\bar{f}}_C = [k_{CB}]\,\hat{\bar{d}}_{CB} \tag{17}$$

și rezultă egalitățile :

$$[k_{BC}] = [k_{CB}]; \quad \hat{\bar{d}}_{BC} = -\hat{\bar{d}}_{CB}. \tag{18}$$

Din relația (12) se mai obține,

$$\hat{\bar{d}}_{BC} = [h_{BC}]\,\hat{\bar{f}}_B \tag{19}$$

$[h_{BC}]$ fiind matricea de complianță a barei exprimată în sistemul local de referință sub forma,

$$[h_{BC}] = [k_{BC}]^{-1} = \begin{bmatrix} [h_{12}] & [h_{11}] \\ [h_{22}] & [h_{21}] \end{bmatrix}, \tag{20}$$

unde

$$[h_{11}] = \begin{bmatrix} \frac{l}{G I_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{E I_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{E I_z} \end{bmatrix}; \quad [h_{22}] = \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{3EI_z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l^3}{3EI_y} \end{bmatrix},$$

$$[h_{12}] = [h_{21}]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l^2}{2EI} \\ 0 & -\frac{l^2}{2EI_z} & 0 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Dacă se notează cu $\hat{\bar{F}}_B, \hat{\bar{F}}_C, \hat{\bar{D}}_B, \hat{\bar{D}}_C$ forţele respectiv deplasările şurub de la capetele barei, exprimate în sistemul $OXYZ$, se obţin relaţiile

$$\hat{\bar{f}}_B = [T]^{-1} \hat{\bar{F}}_B; \quad \hat{\bar{d}}_B = [T]^{-1} \hat{\bar{D}}_B; \quad \hat{\bar{f}}_C = [T]^{-1} \hat{\bar{F}}_C; \quad \hat{\bar{d}}_C = [T]^{-1} \hat{\bar{D}}_C \tag{22}$$

şi relaţia (12) devine

$$\hat{\bar{F}}_B = [K_{BC}] \hat{\bar{D}}_{BC}, \tag{23}$$

unde $[K_{BC}]$ este matricea de rigiditate a barei raportată la sistemul general de referinţă,

$$[K_{BC}] = [T]\,[k_{BC}]\,[T]^{-1}, \tag{24}$$

iar $[T]^{-1}$ este inversa matricei de transformare şi care cu ajutorul matricelor transpuse $[R]^T$, $[S]^T$ se scrie :

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} [R]^T & [0] \\ [R]^T\,[S]^T & [R]^T \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Matricea de complianţă $[H_{BC}]$ a barei, raportată la sistemul general de referinţă se scrie

$$[H_{BC}] = [K_{BC}]^{-1} = [T]\,[h_{BC}]\,[T]^{-1} \tag{26}$$

şi cu ajutorul acesteia relaţia (18) devine

$$\hat{\bar{D}}_{BC} = [H_{BC}] \hat{\bar{F}}_B. \tag{27}$$

Ţinînd seama de relaţiile (1), (14), (15), (20), (21), (25) rezultă că matricele $[K_{BC}]$, $[H_{BC}]$ se pot scrie de asemenea sub forma

$$[K_{BC}] = \begin{bmatrix} [K_{12}] & [K_{11}] \\ [K_{22}] & [K_{21}] \end{bmatrix}; \quad [H_{BC}] = \begin{bmatrix} [H_{12}] & [H_{11}] \\ [H_{22}] & [H_{21}] \end{bmatrix}, \tag{28}$$

unde matricele $[K_{11}]$, $[K_{22}]$, $[H_{11}]$ $[H_{22}]$ sînt simetrice, iar matricele $[K_{21}]$, $[K_{12}]$, $[H_{21}]$, $[H_{12}]$ îndeplinesc condițiile :

$$[K_{21}] = [K_{12}]^T ; \quad [H_{21}] = [H_{12}]^T. \tag{29}$$

Dacă se consideră ca sistem de referință local, sistemul $o^*x^*y^*z^*$ cu originea o^* în mijlocul distanței BC (fig. 1), se obțin exprimările,

$$[k_{11}^*] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12\,EI_z}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12\,EI_y}{l^3} \end{bmatrix}; \quad [k_{22}^*] = \begin{bmatrix} \frac{GI_x}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI_y}{l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI_z}{l} \end{bmatrix}, \tag{30}$$

$$[k_{12}^*] = [k_{11}^*] = [0], \tag{31}$$

$$[h_{11}^*] = \begin{bmatrix} \frac{l}{GI_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{GI_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{EI_z} \end{bmatrix}; \quad [h_{22}] = \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{12\,EI_z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l^3}{12\,EI_y} \end{bmatrix}, \tag{32}$$

$$[h_{12}^*] = [h_{21}^*] = [0], \tag{33}$$

iar trecerea la sistemul general de referință $OXYZ$ se face cu ajutorul matricei de rotație $[R]$ care rămîne aceeași și cu ajutorul matricei de translație $[S^*]$ dată prin relația

$$[S^*] = \begin{bmatrix} 0 & -Z_0^* & Y_0^* \\ Z_0^* & 0 & -X_0^* \\ -Y_0^* & X_0^* & 0 \end{bmatrix}, \tag{34}$$

unde (X_0^*, Y_0^*, Z_0^*) sînt coordonatele punctului o^* față de sistemul de referință $OXYZ$.

Relațiile stabilite sînt adevărate numai dacă pe cuprinsul barei nu există forțe exterioare.

În cazul în care pe cuprinsul barei există forțe, acestea se pot repartiza la capetele barei, cu relațiile deduse în lucrarea [10] și calculul se continuă cu relațiile deduse mai sus.

3. PROPRIETĂȚI GENERALE

În lucrările [10], [11] sînt demonstrate unele proprietăți ale deplasărilor șurub și ale matricelor de rigiditate pe care le redăm, fără demonstrație, în cele ce urmează :

a) matricea de complianță a unei bare rigide este nulă,

b) deplasările şurub ale secţiunilor printr-un corp rigid sînt egale între ele,

c) matricele de rigiditate şi de complianţă verifică relaţiile

$$[K_{BC}] = [K_{CB}]; \quad [H_{BC}] = [H_{CB}]; \quad [K_{BC}] = [H_{BC}]^{-1}, \tag{35}$$

d) matricea de rigiditate a unui sistem de bare legate în „paralel" (capetele fiind legate rigid) este egală cu suma matricelor de rigiditate ale barelor,

e) matricea de complianţă a unui sistem de bare înseriate (prin încastrare) este egală cu suma matricelor de complianţă ale barelor,

f) suma eforturilor şurub din capetele barelor concurente în acelaşi nod este egală cu suma forţelor şurub exterioare care acţionează în nodul respectiv (analogia cu prima lege a lui Kirchhoff),

g) suma deplasărilor relative şurub ale capetelor barelor dintr-un contur închis parcurs într-un sens este egală cu suma deplasărilor relative şurub din cuplele cinematice ale conturului, cînd acesta este parcurs în sens opus (analogia cu cea de a doua lege a lui Kirchhoff).

4. MATRICEA DE RIGIDITATE A SISTEMULUI FORMAT DE UN RIGID CU LEGĂTURI ELASTICE

Sistemul format de un rigid cu legături elastice este analizat în moduri diferite în lucrările [2], [4], [6].

Partea comună a acestor lucrări o constituie faptul că legăturile elastice ale rigidului considerat sînt unidirecţionale, fiecare din aceste legături fiind asimilată cu cîte un resort în care se dezvoltă o forţă elastică, situată pe direcţia axei resortului.

Sistemul din figura 2, format dintr-un rigid legat de corpul fix (bază) prin bare elastice constituie un model generalizat al celor descrise în lucrările [2], [4], [6].

În modelul considerat în figura 2 barele BC introduc în punctele B atît forţe elastice pe cîte trei direcţii, cît şi momente elastice de asemenea pe trei direcţii.

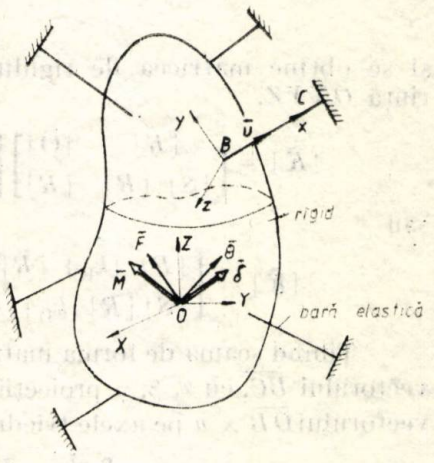


Fig. 2. — Rigidul cu legături formate din bare elastice.

Notînd cu $[k]$ matricea de rigiditate în sistemul local de referinţă $Bxyz$ şi cu $[T]$ matricea de trecere de la sistemul local $Bxyz$ la sistemul general de referinţă $OXYZ$ se obţine matricea $[\tilde{K}]$ de rigiditate în sistemul $OXYZ$ exprimată prin relaţia

$$[\tilde{K}] = [T]\,[k]\,[T]^{-1}. \tag{36}$$

Matricea de rigiditate a unui astfel de sistem, conform proprietății generale descrise la punctul *d*, se obține prin sumarea matricelor barelor componente și rezultă :

$$[K] = \Sigma\,[\tilde{K}]. \tag{37}$$

Matricele componente $[K]$ avînd forma descrisă prin relațiile (28), (29), rezultă că și matricea rezultantă $[K]$ are de asemenea forma descrisă de relațiile (28), (29).

Notînd cu $\hat{D}$ deplasarea șurub din O și cu $\hat{F}$ forța șurub din O, respectiv notînd

$$\hat{D} = (\bar{\theta}, \bar{\delta}); \quad \hat{F} = (\bar{F}, \bar{M}), \tag{38}$$

se obține relația

$$\hat{F} = [K]\,\hat{D}. \tag{39}$$

În cazul particular în care rigidul are legături unilaterale pe direcția BC (fig. 2) (cazul considerat în lucrarea [2]), matricele de rigiditate în sistemele locale sînt de forma,

$$[k_{11}] = k\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}; \quad [k_{12}] = [k_{22}] = [k_{21}] = [0], \tag{40}$$

unde s-a notat

$$k = \frac{EA}{l} \tag{41}$$

și se obține matricea de rigiditate a legăturii BC în sistemul de referință $OXYZ$,

$$[\tilde{K}] = \begin{bmatrix}[R] & [0]\\ [S]\ [R] & [R]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[0] & [k_{11}]\\ [0] & [0]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[R]^T & [0]\\ [R]^T\ [S]^T & [R]^T\end{bmatrix} \tag{42}$$

sau

$$[\tilde{K}] = \begin{bmatrix}[R]\ [k_{11}]\ [R]^T & [S]^T & [R]\ [k_{11}]\ [R]^T\\ [S]\ [R]\ [k_{11}]\ [R]^T & [S]^T & [S]\ [R]\ [k_{11}]\ [R]^T\end{bmatrix}. \tag{43}$$

Ținînd seama de forma matricei $[k_{11}]$, dacă se notează cu $\bar{u}$ versorul vectorului $\overline{BC}$, cu α, β, γ proiecțiile versorului $\bar{u}$, iar cu $\tilde{l}$, $\tilde{m}$, $\tilde{n}$ proiecțiile vectorului $\overline{OB} \times \bar{u}$ pe axele triedrului general $OXYZ$, matricea (43) devine

$$[\tilde{K}] = \begin{bmatrix}\alpha\tilde{l} & \alpha\tilde{m} & \alpha\tilde{n} & \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma\\ \beta\tilde{l} & \beta\tilde{m} & \beta\tilde{n} & \beta\alpha & \beta^2 & \beta\gamma\\ \gamma\tilde{l} & \gamma\tilde{m} & \gamma\tilde{n} & \gamma\alpha & \gamma\beta & \gamma^2\\ \tilde{l}^2 & \tilde{l}\tilde{m} & \tilde{l}\tilde{n} & \tilde{l}\alpha & \tilde{l}\beta & \tilde{l}\gamma\\ \tilde{m}\tilde{l} & \tilde{m}^2 & \tilde{m}\tilde{n} & \tilde{m}\alpha & \tilde{m}\beta & \tilde{m}\gamma\\ \tilde{n}\tilde{l} & \tilde{n}\tilde{m} & \tilde{n}^2 & \tilde{n}\alpha & \tilde{n}\beta & \tilde{n}\gamma\end{bmatrix}, \tag{44}$$

iar matricea sistemului se scrie

$$[K] = \Sigma\,[\widetilde{K}]. \tag{45}$$

Matricea (45), este identică cu matricea de rigiditate obținută în lucrarea [2] cu condiția de a considera organizări identice pentru vectorii coloană forță și deplasare.

Dacă direcția legăturilor BC coincide cu una din direcțiile axelor sistemului $OXYZ$, se obțin matricele de rigiditate din lucrările [4], [6].

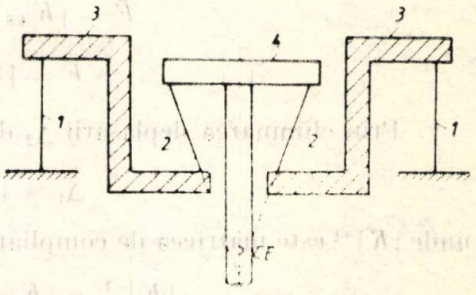


Fig. 3. — Mecanisme de complianță.

5. MATRICEA DE RIGIDITATE A UNUI SISTEM HIBRID

Mecanismele de complianță (fig. 3) utilizate în operațiile automatizate de montaj cu ajutorul roboților industriali constituie sisteme hibride formate din corpuri rigide și bare elastice.

În vederea stabilirii unor relații generale, se consideră sistemul hibrid (fig. 4a) format din două corpuri rigide, notate cu *1* și *2*, legate între ele prin barele elastice AB, corpul *2* fiind legat la bază (corpul fix) prin barele CD.

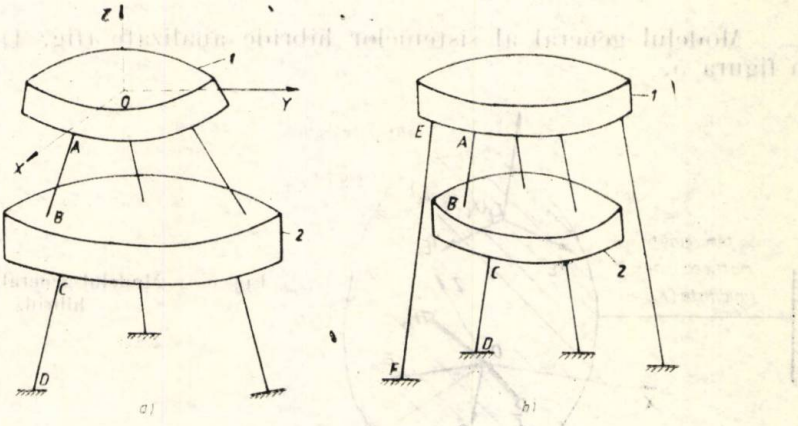


Fig. 4. — Sisteme hibride.

Notînd cu $OXYZ$ sistemul de referință general, cu $\hat{\widetilde{F}}$ șurubul forță care acționează asupra corpului *1*, cu $\hat{\Delta}_1$, $\hat{\Delta}_2$ deplasările celor două rigide (raportate la sistemul $OXYZ$), cu $[\widetilde{K}_{AB}]$, $[\widetilde{K}_{CD}]$ matricele de rigiditate ale barelor de legătură, ținînd seama de proprietățile enunțate și de faptul că barele AB, respectiv CD sînt legate în paralel, se obțin [11] pentru

1848

matricele de rigiditate dintre corpul *1* și *2*, respectiv dintre corpul *2* și bază, expresiile

$$[K_{AB}] = \Sigma\,[\tilde{K}_{AB}], \tag{46}$$

$$[K_{CD}] = \Sigma\,[\tilde{K}_{CD}] \tag{47}$$

și rezultă [11] relațiile :

$$\bar{F} = [K_{AB}]\,(\hat{\Delta}_1 - \hat{\Delta}_2), \tag{48}$$

$$\hat{\bar{F}} = [K_{CD}]\,\hat{\Delta}_2. \tag{49}$$

Prin eliminarea deplasării $\hat{\Delta}_2$ din relațiile (48), (49) se obține

$$\hat{\Delta}_1 = [K]^{-1}\,\hat{\bar{F}}, \tag{50}$$

unde $[K]^{-1}$ este matricea de complianță a sistemului exprimată prin relația

$$[K]^{-1} = [K_{AB}]^{-1} + [K_{CD}]^{-1}. \tag{51}$$

Procedînd în mod analog, pentru sistemul hibrid din figura 4*b* se obține matricea de rigiditate $[K]$ a sistemului

$$[K] = [K_{EE}] + [[K_{AB}]^{-1} + [K_{CD}]^{-1}]^{-1}. \tag{52}$$

6. CENTRUL ELASTIC. AXE PRINCIPALE ELASTICE (DE COMPLIANȚĂ)

Modelul general al sistemelor hibride analizate (fig. 4) este redat în figura 5.

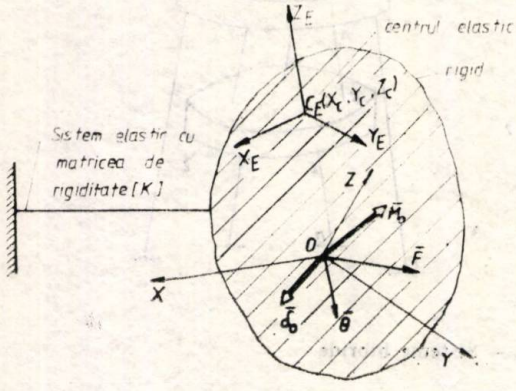


Fig. 5. — Modelul general al unui sistem hibrid.

Exprimînd forțele și deplasările față de sistemul general de referință *OXYZ* (fig. 5), se obțin, pentru șurubul forță $\hat{\bar{F}}$ și pentru șurubul deplasare $\hat{\Delta}$, exprimările :

$$\hat{\bar{F}} = (\bar{F},\ \bar{M}_0),\ \hat{\Delta} = (\bar{\theta},\ \bar{\delta}_0). \tag{53}$$

Notînd cu $[K]$, matricea de rigiditate a sistemului elastic exprimată față de sistemul $OXYZ$, rezultă relația

$$\hat{F} = [K]\hat{\Delta}. \tag{54}$$

După cum s-a arătat, matricea $[K]$ se scrie sub forma

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{12}] & [K_{11}] \\ [K_{22}] & [K_{21}] \end{bmatrix}, \tag{55}$$

unde $[K_{11}]$, $[K_{22}]$ sînt matrice simetrice, iar matricele $[K_{12}]$, $[K_{21}]$ îndeplinesc condiția

$$[K_{21}]^T = [K_{12}]. \tag{56}$$

Cu aceste precizări rezultă că relația (54) se poate scrie :

$$\begin{aligned} \bar{F} &= [K_{12}]\,\bar{\theta} + [K_{11}]\,\bar{\delta}_0, \\ \bar{M}_0 &= [K_{22}]\,\bar{\theta} + [K_{21}]\,\bar{\delta}_0. \end{aligned} \tag{57}$$

Din aceste relații rezultă că dacă asupra rigidului, în punctul O acționăm fie cu o singură forță fie cu un singur moment, deplasarea rigidului are atît componentă de rotație $\bar{\theta}$, cît și componentă de translație $\bar{\delta}_0$.

Cele de mai sus sugerează ideea determinării unui punct în care să se realizeze decuplarea componentelor de rotație de cele de translație.

În acest sens se definește *centrul elastic* (C_E) (centru de complianță) ca fiind punctul rigidului în care dacă se acționează cu o forță, rigidul capătă o deplasare de translație, iar dacă se acționează cu un moment, deplasarea rigidului este o rotire.

Rezultă de aici că dacă centrul elastic C_E este luat drept origine a sistemului general de referință, atunci

$$[\tilde{K}_{12}] = [\tilde{K}_{21}] = [0] \tag{58}$$

și relațiile (53), devin

$$\bar{F} = [\tilde{K}_{11}]\,\bar{\delta}_E, \quad \bar{M}_E = [\tilde{K}_{22}]\,\bar{\theta}. \tag{59}$$

Decuplarea în continuare a componentelor deplasare (liniare sau unghiulare) se poate realiza prin determinarea vectorilor proprii ai matricelor

$$[\tilde{K}_{11}], \quad [\tilde{K}_{22}].$$

Se obțin astfel axele principale ale deplasărilor liniare și axele principale ale deplasărilor unghiulare care în general pot fi diferite.

Dacă axele principale ale deplasărilor liniare coincid cu axele principale ale deplasărilor unghiulare, atunci acestea se numesc axe principale elastice (de complianță).

7. RELAȚII PENTRU DETERMINAREA CENTRULUI ELASTIC ȘI A AXELOR PRINCIPALE ELASTICE

Matricea de rigiditate $[K]$ exprimată față de sistemul $C_E X_E Y_E Z_E$ (fig. 5) al axelor principale elastice care sînt reciproc perpendiculare și concurente în centrul elastic C_E, se scrie

$$[\tilde{K}] = \begin{bmatrix} [0] & [\tilde{K}_{11}] \\ [\tilde{K}_{22}] & [0] \end{bmatrix}, \tag{60}$$

unde matricele $[\tilde{K}_{11}]$, $[\tilde{K}_{22}]$ sînt matrice diagonale avînd exprimări de forma :

$$[\tilde{K}_{11}] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}, \quad [\tilde{K}_{22}] = \begin{bmatrix} k_4 & 0 & 0 \\ 0 & k_5 & 0 \\ 0 & 0 & k_6 \end{bmatrix}. \tag{61}$$

Notînd cu X_C, Y_C, Z_C, coordonatele centrului elastic, cu α_i, β_i, γ_i ($i = 1, 2, 3$) cosinusurile directoare ale axelor $C_E X_E$, $C_E Y_E$, $C_E Z_E$ față de sistemul general de referință $OXYZ$, se obține cu relația (1) matricea de transformare din sistemul $C_E X_E Y_E Z_E$ în sistemul $OXYZ$,

$$[T] = \begin{bmatrix} [R] & [0] \\ [S] \; [R] & [R] \end{bmatrix}, \tag{62}$$

unde

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & -Z_C & Y_C \\ Z_C & 0 & -X_C \\ -Y_C & X_C & 0 \end{bmatrix}; \quad [R] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \tag{63}$$

și între matricele $[K]$, $[\tilde{K}]$ există relația matriceală

$$[K] = [T]\,[\tilde{K}]\,[T]^{-1} \tag{64}$$

sau

$$[\tilde{K}] = [T]^{-1}\,[K]\,[T]. \tag{65}$$

Ținînd seama de relațiile (60), (62), relația (65) se descompune în egalitățile,

$$[\tilde{K}_{12}] = [\tilde{K}_{21}]^T = [R]^T\,[[K_{12}] + [K_{11}]\,[S]]\,[R] = [0], \tag{66}$$

$$[\tilde{K}_{11}] = [R]^T\,[K_{11}]\,[R], \tag{67}$$

$$[\tilde{K}_{22}] = [R]^T\,[S]^T\,[[K_{12}] + [K_{11}]\,[S]]\,[R] +$$

$$+ [R]^T\,[[K_{22}] + [K_{21}]\,[S]]\,[R] \tag{68}$$

sau

$$[\tilde{K}_{12}] + [K_{11}]\,[S] = [0], \tag{69}$$

$$[\tilde{K}_{11}] = [R]^T\,[K_{11}]\,[R], \tag{70}$$

$$[\tilde{K}_{22}] = [R]^T\,[[K_{22}] + [K_{21}]^T\,[S]]\,[R]. \tag{71}$$

Relația matriceală (69) este echivalentă cu un sistem liniar de nouă ecuații cu trei necunoscute (coordonatele X_C, Y_C, Z_C).

Dacă sistemul este compatibil, cei șase determinanți caracteristici sînt nuli și atunci există centru elastic de coordonate X_C, Y_C, Z_C.

Relația matriceală (70) arată că direcțiile axelor principale elastice coincid cu direcțiile vectorilor proprii ai matricelor $[K_{11}]$, iar elementele matricei diagonale $[\tilde{K}_{11}]$ sînt tocmai valorile proprii.

Aceste direcții, potrivit cu relația matriceală (71), trebuie să coincidă și cu direcțiile vectorilor proprii ai matricei $[K_{22}] + [K_{21}]\,[S]$, condiții ce sînt echivalente cu existența a trei relații scalare între elementele matricelor $[K_{11}]$ și $[K_{22}] + [K_{21}]\,[S]$ și în acest caz elementele matricei diagonale $[\tilde{K}_{22}]$ sînt tocmai valorile proprii ale matricei $[K_{22}] + [K_{21}]\,[S]$.

Rezultă în final că existența centrului elastic este condiționată de anularea celor șase determinanți caracteristici și în continuare existența axelor principale elastice este condiționată de faptul ca matricele $[K_{11}]$, $[K_{22}] + [K_{12}]^T\,[S]$ să aibă vectorii proprii situați pe aceleași direcții.

În cazul în care calculul se efectuează cu ajutorul matricelor de complianță se obțin relații absolut identice în care însă matricele de rigiditate se înlocuiesc cu matricele de complianță.

8. SISTEME SIMETRICE

Considerăm bara din figura 6 raportată la sistemul local de referință $o\,x\,y\,z$, punctul o fiind situat la mijlocul barei și fie $OXYZ$ sistemul general de referință.

Utilizînd notațiile

$$\frac{EA}{l} = k_1; \quad \frac{12\,EI_z}{l^3} = k_2; \quad \frac{12\,EI_y}{l^3} = k_3; \quad \frac{GI_x}{l} = k_4,$$

$$\frac{EI_y}{l} = k_5; \quad \frac{EI_z}{l} = k_6, \tag{72}$$

$$[k_{11}] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}; \quad [k_{22}] = \begin{bmatrix} k_4 & 0 & 0 \\ 0 & k_5 & 0 \\ 0 & 0 & k_6 \end{bmatrix} \tag{73}$$

și ținînd seama de relațiile (34), (28), (24), (25), rezultă că matricea de rigiditate $[K]$ față de sistemul general de referință $OXYZ$ se scrie

$$[K] = [T]\,[k][T]^{-1} = \begin{bmatrix} [K_{12}] & [K_{11}] \\ [K_{22}] & [K_{21}] \end{bmatrix}, \tag{74}$$

unde

$$[k] = \begin{bmatrix} [0] & [k_{11}] \\ [k_{22}] & [0] \end{bmatrix}, \tag{75}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} [R] & [0] \\ [S]\ [R] & [R] \end{bmatrix}; \quad [T]^{-1} = \begin{bmatrix} [R]^T & [0] \\ [R]^T\ [S]^T & [R]^T \end{bmatrix} \tag{76}$$

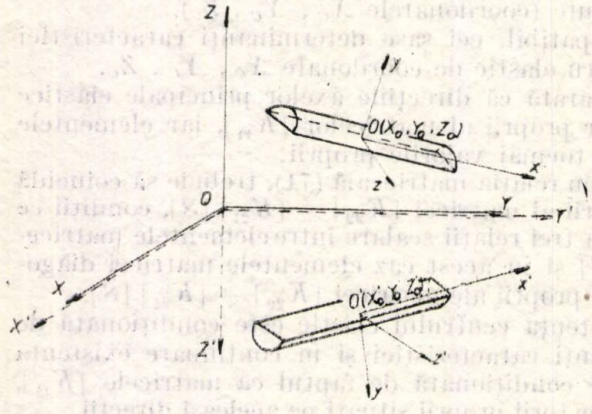


Fig. 6. — Bare simetrice față de planul OXY.

$[R]$ fiind matricea de rotație, iar $[S]$ matricea de translație.

Considerînd simetria față de planul $OXYZ$ se obține bara simetrică (fig. 6) raportată la sistemele de referință stîngi $o'x'y'z'$, $O'X'Y'Z'$.

Pentru sistemul simetric, calculînd matricele care intervin în expresiile (74) — (76) rezultă

$$[k] = [k']; \quad [R] = [R']; \quad [S] = [S'], \tag{77}$$

$$[T'] = \begin{bmatrix} [R] & [0] \\ -[S]\ [R] & [R] \end{bmatrix} \quad [T']^{-1} = \begin{bmatrix} [R]^T & [0] \\ -[R]^T\ [S]^T & [R]^T \end{bmatrix} \tag{78}$$

și se obține matricea de rigiditate $[K^*]$ a barei simetrice raportată la sistemul de referință $O\,X'Y'Z'$, care ținînd seama de relația (74) se scrie :

$$[K^*] = \begin{bmatrix} -[K_{12}] & [K_{11}] \\ [K_{22}] & -[K_{21}] \end{bmatrix}. \tag{79}$$

Trecînd la sistemul de referință $OXYZ$, ținînd seama că matricea de transformare $[T^*]$,

$$[T^*] = [T^*]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{80}$$

se obține matricea de rigiditate $[K']$, avînd expresia

$$[K'] = [T^*]\ [K^*]\ [T^*]. \tag{81}$$

Dacă sistemul este compus din bare simetrice față de planul OXY se obține prin sumare matricea de rigiditate, care are forma

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{12}] & [K_{11}] \\ [K_{22}] & [K_{21}] \end{bmatrix}, \tag{82}$$

unde matricele $[K_{11}]$, $K_{22}]$ sînt simetrice și au elementele nesituate pe diagonala principală dar situația pe linia sau pe coloana a treia egale cu zero, iar matricea $[K_{12}] = [K_{21}]^T$ are diferite de zero numai elementele nesituate pe diagonala principală dar situate pe linia sau pe coloana a treia.

Dacă simetria este în raport cu unul din planele OYZ, OXZ se iau în discuție elementele situate pe linia și coloana întîi, respectiv elementele situate pe linia și coloana a doua.

În mod analog, rezultă că simetria față de una din axele OX, OY, OZ face ca elementele, nesituate pe diagonala principală, dar situate pe linia sau coloana întîi (respectiv a doua, a treia) pentru toate matricele $[K_{11}]$, $[K_{22}]$, $[K_{12}]$, $[K_{21}]$, să fie nule iar simetria față de punctul O face ca matricele $[K_{12}]$, $[K_{21}]$ să fie nule.

În acest ultim caz rezultă că deplasările de translație și de rotație sînt decuplate adică dacă există centru elastic acela este tocmai punctul O.

9. APLICAȚII

a) Să se stabilească condițiile în care un sistem cu două plane ortogonale de simetrie are centru elastic și să se determine poziția acestuia.

Considerînd planele de simetrie OXZ și OYZ și ținînd seama de cele anterior stabilite, se obține față de sistemul de referință $OXYZ$ matricea de rigiditate.,

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{12}] & [K_{11}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix}, \tag{82}$$

unde matricele $[K_{11}]$, $K_{22}]$, $[K_{12}]$, $[K_{21}]$ au forma

$$[K_{11}] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix};\quad [K_{22}] = \begin{bmatrix} k_5 & 0 & 0 \\ 0 & k_6 & 0 \\ 0 & 0 & k_7 \end{bmatrix}, \tag{83}$$

$$[K_{12}] = [K_{21}]^T = \begin{bmatrix} 0 & k_7 & 0 \\ k_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{84}$$

și potrivit cu relația (79) se obține ecuația matriceală,

$$\begin{bmatrix} 0 & k_7 & 0 \\ k_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -Z_0 & Y_0 \\ Z_0 & 0 & -X_0 \\ -Y_0 & X_0 & 0 \end{bmatrix} = [0] \tag{85}$$

din care se deduce condiția de compatibilitate

$$k_2\ k_7 + k_1\ k_8 = 0 \tag{86}$$

și coordonatele centrului elastic

$$X_0 = Y_0 = 0,\ Z_0 = \frac{k_7}{k_1} = -\frac{k_8}{k_2}. \tag{87}$$

Axele elastice sînt paralele cu axele sistemului $OXYZ$, iar matricea de rigiditate $[K]$ față de sistemul axelor elastice are componentele

$$[\tilde{K}_{12}] = [\tilde{K}_{21}] = 0\,;\quad [\tilde{K}_{11}] = [K_{11}], \tag{88}$$

$$[\tilde{K}_{22}] = \begin{bmatrix} k_4 + k_8 Z_0 & 0 & 0 \\ 0 & k_5 - k_7 Z_0 & 0 \\ 0 & 0 & k_6 \end{bmatrix}. \tag{89}$$

b) Să se stabilească condițiile în care un sistem cu un singur plan de simetrie acceptă centru elastic și în aceste condiții să se determine coordonatele acestuia și axele elastice.

Considerînd planul OYZ drept plan de simetrie se obține matricea de rigiditate (82) cu componentele matriceale de forma

$$[K_{11}] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & A_4 \\ 0 & A_4 & A_3 \end{bmatrix};\quad [K_{22}] = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & B_4 \\ 0 & B_4 & B_3 \end{bmatrix}, \tag{90}$$

$$[K_{12}] = [K_{21}]^T = \begin{bmatrix} 0 & C_1 & C_2 \\ C_3 & 0 & 0 \\ C_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{91}$$

și potrivit cu relația (69) rezultă primele două condiții de existență a centrului elastic

$$A_1 C_3 + A_2 C_1 + A_4 C_2 = 0\,;\quad A_1 C_4 + A_4 C_1 + A_3 C_2 = 0 \tag{92}$$

precum și coordonatele centrului elastic:

$$X_0 = 0\,;\quad Y_0 = -\frac{C_2}{A_1}\,;\quad Z_0 = \frac{C_1}{A_1}. \tag{93}$$

În aceste condiții, una din axele elastice este paralelă cu axa OX și dacă notăm cu α unghiul dintre axele OY și axa elastică $C_E Y$ se obține matricea de rotație:

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}. \tag{94}$$

Potrivit cu relația (70), matricea $[R]^T\ [K_{11}]\ [R]$ trebuie să fie matrice diagonală și de aici rezultă relația

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2A_4}{A_2 - A_3}, \tag{95}$$

din care se obține unghiul α care definește poziția axelor elastice $C_E Y$, $C_E Z$.

Din relația (72) rezultă că matricea $[R]^T[[K_{22}] + [K_{21}]\,[S]]\,[R]$ trebuie să fie de asemenea diagonală și de aici se obține expresia :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2(B_4 + C_1 Y_0)}{B_2 - B_3 - C_2 Y_0 - C_1 Z_0}. \tag{96}$$

Ținînd seama de relația (95), rezultă cea de a treia condiție de existență a centrului elastic :

$$A_4[A_1(B_2 - B_3) + C_2^2 - C_1^2] - (A_2 - A_3)(A_1 B_4 - C_1 C_2) = 0. \tag{97}$$

Primit la redacție la 10 aprilie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. J. COURBON, *Calcul des structures*. Dunod, Paris, 1972.
2. M. F. DIMENTBERG, *Teoriya vintov i ee prilozheniya*, Nauka, Moskwa, 1978.
3. V. DOLGA, *Centrul elastic al unui mecanism cu cuple cinematic elastice. Al 5-lea simpozion național de Roboți industriali*, Partea I, București, 1985, p. 165—172.
4. M. C. HARRIS, Ch. E. CREDE, *Șocuri și vibrații*, vol. I, II, III, Edit. Tehnică, București, 1968.
5. P. MAZILU, N. POSEA, E. IORDĂCHESCU, *Probleme de rezistența materialelor*, vol. II, Edit. Tehnică, București, 1975.
6. M. MUNTEANU, *Dynamics of Single — Mass Vibrating Machines Mounted on Elastic Supports*. Buletinul I. P. București, XLVI—XLVII, seria mecanică, (1985).
7. N. PANDREA, *Contribuții la studiul mecanismelor spațiale cu ajutorul teoriei șuruburilor*, Teză de doctorat. I. P. București, 1973.
8. N. PANDREA, D. VOICULESCU, *Analyse des Déplacements Finis et des Vitesses du Rigide, par la Théorie des Vis*, Rev. Roumaine des sciences Techniques, Série de Mécanique Appliquée, (1975).
9. N. PANDREA, *Studiul general al ciocnirilor cu ajutorul vectorilor duali*, Studii și cercetări de mecanică aplicată, **36**, 6, (1977).
10. N. PANDREA, *Metoda deplasărilor relative în calculul sistemelor elastice*, Buletinul Institutului de Învățămînt Superior, Pitești, (1978).
11. N. PANDREA, MARINA PANDREA, *Calculul eforturilor și deplasărilor în sisteme hibride cu ajutorul teoriei șuruburilor. Simpozionul „Creația tehnică și fiabilitatea în construcția de mașini"*, Vol. Mecanica, 97—102, Iași, 1983.
12. N. PANDREA, E. PERIANU, *Metoda deplasărilor relative în calculul elastic al mecanismului de complianță — RCC. Al 5-lea simpozion de roboți industrali*. Partea II, București, 1985, p. 557—565.
13. M. TOFAN, J. GOIA, *Asamblarea elementelor discrete incidente poziționat. Al IV-lea simpozion național de tensometrie*, Brașov, 1986, p. 387—394.
14. * * * *Lexiconul tehnic român*, vol. 4, Edit. Tehnică, București, 1958.

MIȘCAREA SUBSONICĂ ÎN PREZENȚA UNUI PROFIL PORTANT, ÎNTR-O FORMULARE VARIAȚIONALĂ

de ANA DUCARU-DRAGA

Universitatea București

Se pune în evidență în regim subsonic, caracterul strict convex al funcționalei a cărei condiție de staționaritate conduce la formularea slabă a problemei de studiat. Pe baza unui algoritm dual [4] de minimizare a acestei funcționale, se dau rezultate numerice privind distribuția de viteze și presiuni pe un profil Caius Iacob, obținute printr-o metodă de element finit.

1. Fie profilul $\mathcal{P}$ al cărui contur Γ are ecuația $r = r(\theta)$ și $0 < r_1 < r_2$, $0 < r_0 < r_1 \leqslant r(\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, a.î. $\mathcal{B}(0, r_1) \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{B}(0, r_2)$ și $\mathcal{B}(0, r_0) \subset \mathcal{P}$.

Se consideră mișcarea subsonică staționară, irotațională, adiabatică, de masă specifică ρ (raportată la valoarea ρ_0 din punctul de impact), în domeniul Ω, exterior conturului Γ, al profilului, cu viteza q_∞ (raportată la viteza maximă), paralelă cu axa ox, cu circulația k. Dacă ψ este funcția de curent, ținînd seama de comportarea la infinit [3], se poate considera de forma :

$$\begin{aligned} &\psi = \xi + w, \qquad w \in C^\infty(\Omega), \\ &w(x, y) = 0, \qquad r \leqslant r_3, \\ &w(x, y) = S(x, y), \qquad r > r_4, \end{aligned} \tag{1}$$

$$S(x, y) = \rho_\infty q_\infty y - \frac{k \rho_\infty \beta_\infty}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + \beta_\infty^2 y^2}\ , \quad \beta_\infty^2 = 1 - M_\infty^2,$$

$r_4 > r_3 > r_2$, iar

$$\vec{T}\left(S_x, \frac{1}{\beta_\infty} S_y\right) \text{ cu div } \vec{T} = 0.$$

Din integrala lui Bernoulli rezultă $\rho = \rho(|\nabla \psi|^2)$. Se notează $t = \rho q$ și $h = 1/\rho$. Se consideră spațiul vectorial

$$V = \left\{ \xi \in \mathcal{D}'(\Omega) ; \left(r \ln \frac{r}{r_0} \right)^{-1} \xi \in L^2(\Omega),\ \xi_x \in L^2(\Omega),\ \xi_y \in L^2(\Omega),\ \xi|_\Gamma = 0 \right\} \tag{2}$$

și subspațiul său

$$K = \{\xi \in V ; \qquad |\nabla(\xi + w)| \leqslant t_{cr},\ (x, y) \in \Omega\}. \tag{3}$$

Funcționala

$$J(\xi) = \frac{1}{2} \int_\Omega \{H(|\nabla(\xi + w)|^2) - H(|\nabla w|^2) - 2h(t_\infty^2)(\vec{T}, \nabla \xi)\}\, dx dy, \tag{4}$$

unde $H' = h = \frac{1}{\rho}$, este diferenţiabilă Gâteaux [5] şi

$$\langle J'(\xi),\ \chi\rangle = \lim_{\theta\to 0}\frac{J(\xi+\theta\chi)-J(\xi)}{\theta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\,J(\xi+\theta\chi)\,|_{\theta=0} =$$

$$= \int_\Omega \{h[(\,|\nabla(\xi+w)|^2)\ \nabla(\xi+w) - h(t_\infty^2)\vec{T}],\ \nabla\chi\}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \int_\Omega \{\mathrm{div}\ [h(|\nabla(\xi+w)|^2)\nabla(\xi+w) - h(t_\infty^2)\ \vec{T}]\chi\}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

este diferenţiala Gâteaux în punctul ξ după direcţia χ, iar

$$\langle J'(\xi),\ \chi\rangle = 0 \text{ pt. } \forall\ \chi\in K, \tag{5}$$

reprezintă condiţia de staţionaritate a funcţionalei J şi formularea slabă a problemei de studiat, deoarece

$$\mathrm{div}\ [h(|\nabla(\xi+w)|^2)\ \nabla(\xi+w) - h(t_\infty^2)\vec{T}] = 0 \tag{6}$$

cu

$$\mathrm{div}\ \vec{T} = 0,$$

implică

$$\mathrm{div}\left[\frac{1}{\rho}\ \nabla\psi\right] = 0, \tag{7}$$

ecuaţie care împreună cu condiţiile

$$\psi|_\Gamma = 0, \qquad \psi_x|_\infty \to 0, \qquad \psi_y|_\infty \to l_\infty = \rho(q_\infty^2)\,q_\infty, \tag{8}$$

reprezintă problema matematică a mişcării considerate.

Există şi diferenţiala a doua Gâteaux a funcţionalei J:

$$J''(\xi,\ \chi,\ \chi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\,J'(\xi+\theta\chi)\,|_{\theta=0} =$$

$$= \int_\Omega \{2h'\ (|\nabla\ (\xi+w)|^2)\,(\nabla\chi,\ \nabla\ (\xi+w))^2 + h(|\nabla(\xi+w)|^2\,(\nabla(\xi+w),$$

$$\nabla\chi) + h(|\nabla(\xi+w)|^2)\ (\nabla\chi,\ \nabla\chi\}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{9}$$

pozitivă, dacă şi numai dacă

$$h' > 0. \tag{10}$$

Dar

$$h' = (\gamma+1)^{-1}\,(1-q^2)^{-\frac{3}{\gamma-1}}\left(\frac{\gamma-1}{\alpha+1} - q^2\right)^{-1}$$

și $h' > 0$ pentru

$$q^2 < \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} = q_{cr}^2. \tag{10'}$$

Deci în regim strict subsonic, funcționala J este strict convexă, prin urmare soluția problemei (7) cu datele (8) va realiza minimul acestei funcționale :

$$J(\xi) = \inf_{\chi \in K} J(\chi). \tag{11}$$

2. Un algoritm dual [4] de rezolvare numerică a problemei în domeniul

$$\Omega^* = \{(x,\ y);\quad x^2 + y^2 \leqslant R^2\} \cap C^{\mathcal{P}}_{\mathbb{R}^2}, \qquad R > r_4, \qquad R \to \infty,$$

$$\partial\Omega^* = \Gamma \cup \Gamma_\infty,$$

realizează minimizarea funcționalei

$$J(\xi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^*} H\ |\nabla(\xi + w)\ |^2\, dx\ dy$$

printr-un șir convergent de iterații :

$$\Delta\psi_{n+1} = \operatorname{div}\ \vec{e}_{n+1},\ \ \psi_{n+1}|_\Gamma = 0 \tag{12}$$

$$\psi_{n+1}|_{\Gamma_\infty} = t_\infty y - \frac{k\rho_\infty\beta_\infty}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + \beta_\infty^2 y^2},$$

unde

$$\vec{e}_{n+1} = (1 - |\vec{m}_n|)^{\frac{1}{\gamma-1}}\, \vec{m}_n \tag{13}$$

$$\vec{m}_{n+1} = \vec{m}_n + \nu\ (\nabla\psi_{n+1} - \vec{e}_{n+1}), \qquad 0 < \nu < 2$$

$$\operatorname{div}\ \vec{m}_n = 0 \text{ pt.} \qquad \forall\ n = 0,1,\ 2,\ \ldots$$

3. Luînd $\vec{m}_0(-v_0,\ u_0)$ cu $(u_0,\ v_0)$ componentele vitezei $\vec{q}_0$ din mișcarea incompresibilă, rezolvarea problemelor (12), (13) se efectuează printr-o metodă de element finit, pentru un profil Caius Iacob [1], obținut ca imagine a cercului $|Z| = 1$ prin transformarea

$$z = x + iy = Z - \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \ln \frac{z - \mu_1}{z - \mu_2},\ \ \mu_1 = \frac{3}{8}\, e^{i\beta}, \mu_2 = \frac{5}{8}\, e^{i\beta} \tag{14}$$

pt. $\beta = -8°$; $q_\infty = 0{,}178$; $M_\infty = 0{,}408$; $k = -0{,}3127$; $n = 5$.

Cu 280 de elemente triunghiulare de ordinul întîi, 160 de puncte nodale, 40 de puncte frontieră, se afișează valorile lui ψ în noduri, iar valorile pătratului vitezei adimensionalizate în baricentre, în noduri luîndu-se media valorilor în două elemente neadiacente.

Avînd în vedere și expresia coeficientului de presiune C_p, dăm ca și în [6] diagrame cu rezultatele numerice, luînd $\gamma_{aer} \approx 1{,}4$,

$$C_p = \frac{2}{\gamma M_\infty^2}\left[\left(\frac{1-q^2}{1-q_\infty^2}\right)^{\gamma/\gamma-1} - 1\right]. \tag{15}$$

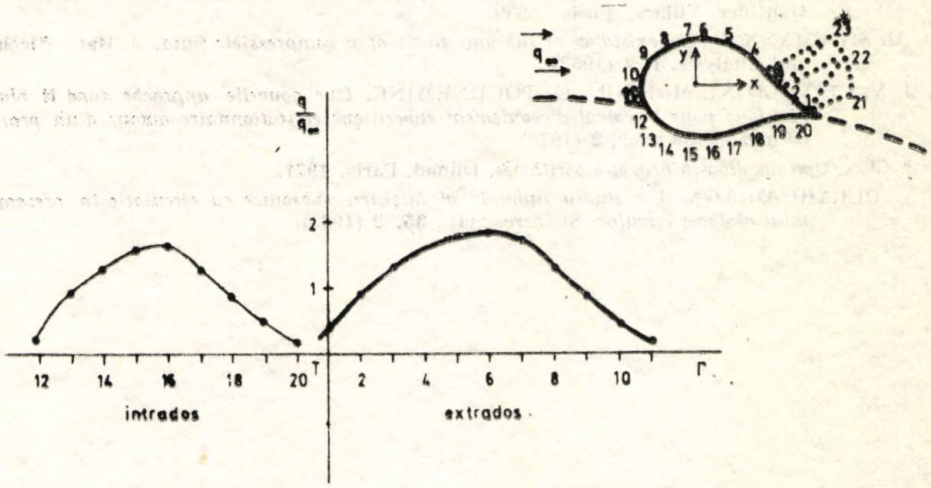


Fig. 1

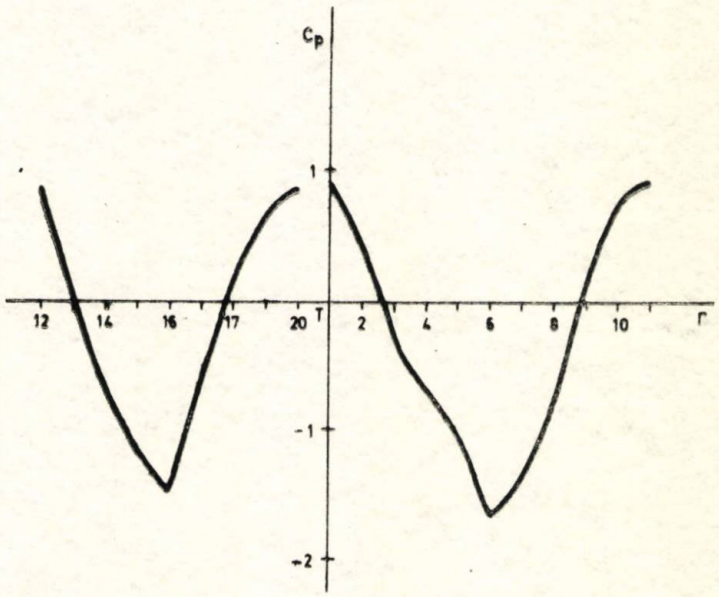


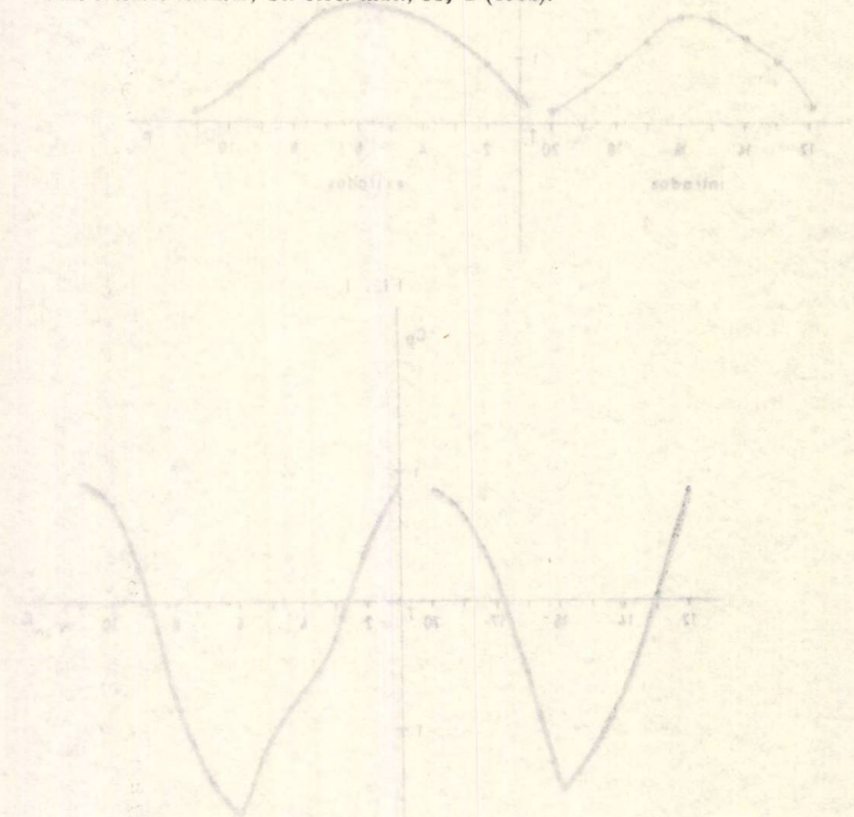
Fig. 2

Rezultatele sînt în bună concordanță cu cele obținute prin metoda Imai-Lamla-Iacob [2] cît și cu măsurătorile experimentale efectuate la Tunelul aerodinamic EOLIN 350, CE, 5V de la Universitate.

Primit la redacție la 14 mai 1987

BIBLIOGRAFIE

1. C. IACOB, *Détermination de la seconde approximation de l'écoulement compressible subsonique autour d'un profil donné*, Arch. Mech. Stosowanej, **16**, 2 (1964).
2. C. IACOB, *Introduction mathém. à la méc. des fluides*, Edit. Academiei R.P.R., Bucarest/ Gauthier Villars, Paris 1959.
3. M. SHIFMANN, *On the existance of subsonic flows of a compressible fluid*, J. Rat. Mech. and Analysis, **1**, 4 (1952).
4. J. V. CIAVALDINI, M. POGU, G. TOURNEMINE, *Une nouvelle approche dans le plan physique pour le calcul d'écoulement subcritique et stationnaire autour d'un profil portant*, J. de méc., **2** (1976).
5. J. CÉA, *Optimisation-théorie et algorithmes*, Dunod, Paris, 1971.
6. A. DUCARU-DRAGA, *Un studiu numeric al mişcării subsonice cu circulaţie în prezenţa unui obstacol circular*, St. cerc. mat., **35**, 2 (1983).



CINEMATICA SAPELOR CU ROLE „CU ALUNECARE"

de V. FLORIAN și E. ȘOVĂREL

Institutul de Petrol și Gaze, Ploiești

În lucrare se studiază cinematica sapelor cu role monoconice cu „alunecare". Pentru determinarea caracteristicilor cinematice (traiectorii, viteze și accelerații) ale diferitelor puncte de pe suprafața rolelor sapelor arătate mai sus, se utilizează metoda matriceală, care permite studierea influenței diferiților parametri caracteristici (deplasarea axelor, fuga, numărul de dinți ai rolelor etc.) și de regim (ψ) ai sapei, asupra eficienței funcționării acesteia în faza de proiectare și de concepție a noilor sape.

În vederea reducerii gradelor de libertate cinematică care sînt în general în număr de două, se utilizează o ipoteză simplificatoare bazată pe experiențe efectuate în laborator cu ajutorul unui dispozitiv care modelează (vezi fig. 2) mișcarea sapelor respective.

Metoda matriceală folosită permite efectuarea calculelor în mod automat cu ajutorul calculatoarelor electronice.

În cazul sapelor, avînd axele rolelor concurente cu axa sapei și cu vîrful conului rolelor pe această axă, dislocarea rocii se produce prin sfărîmare. Aceste tipuri de sape sînt eficiente în cazul sondelor de mică adîncime. În cazul forajului de mare adîncime însă, situație în care — datorită presiunii mari — comportarea rocilor sub sarcină poate avea un caracter plastic, dislocarea acestora trebuie să se bazeze în principal pe crearea unei capacități de tăiere a sapelor. Aceasta poate fi obținută prin deplasarea axelor rolelor față de axa sapei și respectiv prin deplasarea vîrfului conului rolelor, față de această axă [1], [2]. Odată cu creșterea adîncimii sondelor, creșterea eficienței de dislocare a sapelor cu role și — în consecință — creșterea randamentului acestora, trebuie să se bazeze deci pe creșterea capacității lor de tăiere, care se poate realiza, așa cum s-a arătat, prin deplasarea laterală a axelor rolelor și respectiv a vîrfului acestora față de axa sapei.

În cele ce urmează se studiază cinematica unei role monoconice cu axa deplasată lateral cu (v) și cu vîrful deplasat cu (f) față de axa sapei. Se poate constata că — în acest scop — este suficient a studia mișcarea rolei numai în perioada de timp cînd un dinte de pe coroana respectivă rămîne în contact cu talpa sondei.

Se notează cu 2β unghiul la vîrf al conului rolei, raza bazei conului cu R și cu n numărul de dinți de pe coroana marginală a rolei. Restul dinților se consideră că se află în lungul generatoarei conului rolei.

Se alege reperul fix $O_1x_1y_1z_1$ și reperul mobil $Oxyz$, invariabil legat de rolă, în mișcare generală față de reperul fix, ca în figura 1, adică cu originea în vîrful conului rolei, cu axa z pe axa rolei, axa y paralelă cu direcția MD (D fiind vîrful dintelui în contact cu talpa sondei), și axa x normală pe y și z, formînd un sistem la fel orientat ca $O_1x_1y_1z_1$.

Axa O_1z_1 este axa sapei, normală pe suprafața tălpii sondei, considerată plană. Pentru stabilirea poziției rotite în spațiu a reperului mobil, adică a unghiurilor lui Euler (ψ, θ și φ), se consideră un reper $O\,x'y'z'$ cu axele paralele cu cele ale reperului fix, avînd aceeași origine (O) cu reperul mobil ($O\,x\,y\,z$), adică în vîrful rolei.

Se poate constata că mișcarea rolei depinde de doi parametri și anume unghiurile ψ și φ (fig. 1), unghiul $\theta = \frac{\pi}{2} - \beta$ fiind constant [3].

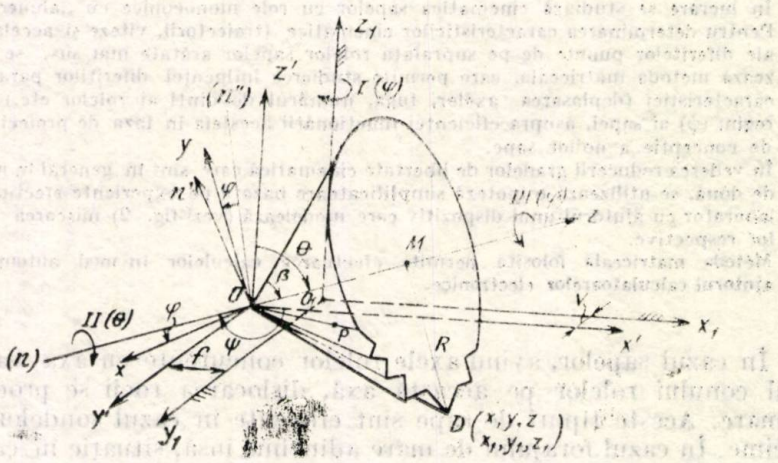


Fig. 1

Dacă legea de variație $\psi = \psi(t)$ este o dată a problemei, impusă de regimul de funcționare a sapei, legea de variație $\varphi = \varphi(t)$ depinde de dinamica rolei, adică de interacțiunea rolă-sapă (frecarea pe axul rolei), precum și de interacțiunea dintre dinții sapei și rocă.

Așadar pozițiile succesive în timp ale unui punct oarecare (P) de la periferia rolei, deci, mișcarea acestuia față de reperul fix $O_1x_1y_1z_1$ este cunoscută dacă se cunosc variațiile parametrilor.

$$\begin{aligned} x_{01} &= x_{01}(\psi, \varphi), \\ y_{01} &= y_{01}(\psi, \varphi), \\ z_{01} &= z_{01}(\psi, \varphi), \end{aligned} \tag{1}$$

adică a coordonatelor punctului O (vîrful rolei) față de reperul fix, precum și legile orare:

$$\psi = \psi(t); \quad \varphi = \varphi(t), \tag{2}$$

adică rotirea rolei în jurul axei O_1z_1 și respectiv în jurul axei proprii Oz. Determinarea expresiilor funcțiilor (1) este redată în anexă.

În cadrul laboratorului de mecanică al Institutului de Petrol și Gaze din Ploiești, a fost executat un dispozitiv cu ajutorul căruia se poate simula mișcarea unei role monoconice cu axa deplasată și se poate înregistra amprenta lăsată de dinți pe planul $x_1O_1y_1$, redat în figurile 2 și 3.

Întrucît în prezenta lucrare se studiază numai cinematica rolei, se precizează că studiul respectiv se face în cazul cel mai defavorabil, constatat experimental (v. fig. 2), cînd dintele (D) de pe coroana marginală a rolei nu lunecă în direcția tangențială pe talpa sondei, ci doar în direcția $\overline{OD}$, adică pe amprenta lăsată pe talpa sondei cu dinții aflați pe o generatoare a conului rolei, cînd aceștia ating — prin ciocnire — roca.

În acest caz (vezi relația (A.19) din anexă), între viteza unghiulară a sapei ($\dot{\psi}$) și viteza unghiulară a rolei ($\dot{\varphi}$) (fig. 4), există relația :

$$\dot{\varphi} = -\frac{R-(v+f\cos\beta)\sin\beta\sin\psi}{R\sin\beta}\cdot\dot{\psi} \tag{3}$$

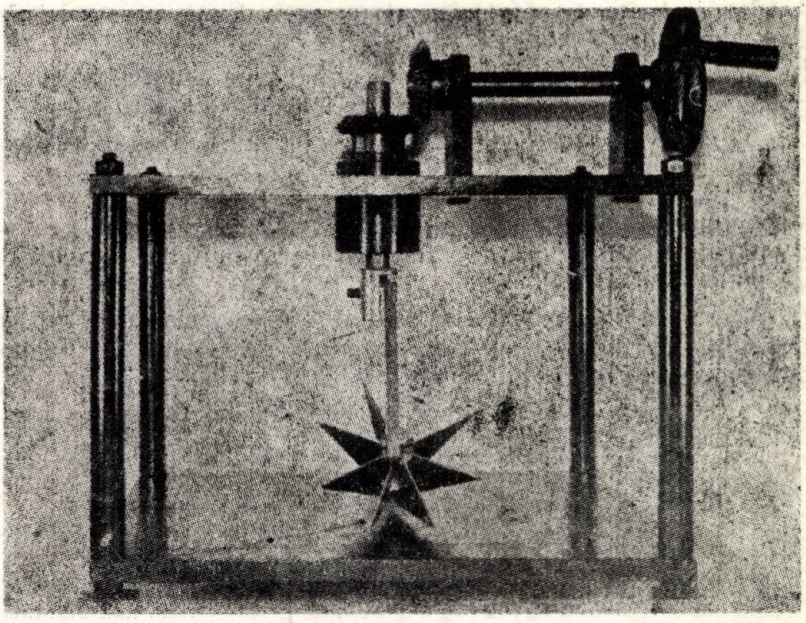


Fig. 2

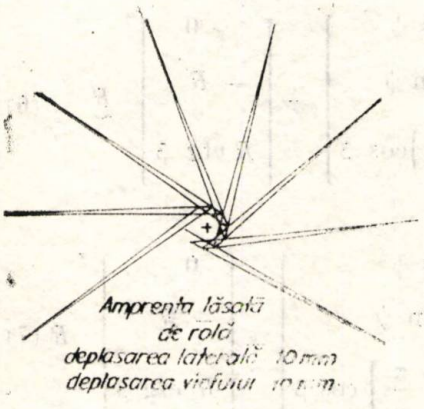


Fig. 3

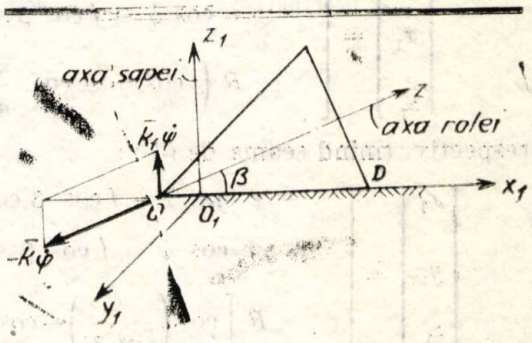


Fig. 4

și deci între unghiurile ψ și φ, în ipoteza arătată, există relația :

$$\varphi = -\frac{R\psi+(v+f\cos\beta)\sin\beta\cos\psi}{R\sin\beta}+C$$

sau, aproximativ, neglijînd al doilea termen de la numărător în raport cu primul și alegînd în mod convenabil condiția inițială, rezultă

$$\varphi = \frac{\psi}{\sin \beta}. \tag{3'}$$

Așadar, în ipoteza arătată în cele ce preced, mișcarea rolei, depinde numai de parametrul $\psi(t)$.

În această situație, mișcarea unui punct oarecare P, față de reperul fix $O_1x_1y_1z_1$, de versori $(\bar{n}_{x1}, \bar{n}_{y1}, \bar{n}_{z1})$, poate fi studiată astfel [4], [5]:

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_{01} + \bar{r}, \tag{4}$$

unde
$\bar{r}_{01}$ este vectorul de poziție al punctului O, față de reperul fix; $\bar{r}$ — vectorul de poziție al punctului P, față de reperul mobil $O\,x\,y\,z$ de versori $(\bar{n}_x, \bar{n}_y, \bar{n}_z)$.

Dacă punctul P este vîrful D al dintelui marginal, ale cărui coordonate în sistemul mobil de axe sînt $(0, -R, R \operatorname{ctg} \beta)$ relația (4) poate fi exprimată matriceal în modul următor:

$$\bar{r}_1 = [\bar{n}_{x1}\ \bar{n}_{y1}\ \bar{n}_{z1}] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}; \quad \bar{r}_{01} = [\bar{n}_{x1}\ \bar{n}_{y1}\ \bar{n}_{z1}] \cdot \begin{bmatrix} x_{01} \\ y_{01} \\ z_{01} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

$$\bar{r} = [\bar{n}_x\ \bar{n}_y\ \bar{n}_z] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

sau, ținînd seama de relațiile A.17 și A.18 din anexă:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v \sin \psi - f \cos \beta \cos \psi \\ v \cos \psi - f \cos \beta \sin \psi \\ R\left(\cos \varphi - \cos \dfrac{\pi}{n}\right)\cos \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -R \\ R \operatorname{ctg} \beta \end{bmatrix}^T \underset{\sim}{R} \tag{6}$$

respectiv, ținînd seama de (3'):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v \sin \psi - f \cos \beta \cos \psi \\ v \cos \psi - f \cos \beta \sin \psi \\ R\left[\cos\left(\dfrac{\psi}{\sin \beta}\right) - \cos \dfrac{\pi}{n}\right]\cos \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -R \\ R \operatorname{ctg} \beta \end{bmatrix}^T \underset{\sim}{R} \tag{7}$$

unde $\underset{\sim}{R}$ este matricea cosinusurilor directoare și axelor reperului mobil față de axele reperului fix, redată în (A.14) și respectiv (A.15 și A.16) din anexă.

Relațiile geometrice (7), împreună cu ecuațiile orare (2) și respectiv (3') reprezintă ecuațiile scalare parametrice ale mișcării punctului D

de la periferia rolei, față de reperul fix $O_1x_1y_1z_1$. Relații similare pot fi utilizate și pentru mișcarea oricărui alt punct, precizînd în mod corespunzător coordonatele lui în reperul mobil de axă.

Viteza punctului D (fără a ține seama de viteza de avans a întregului sistem pe verticală), se poate obține prin derivarea relației matriceale (7) în raport cu timpul.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v\cos\psi - f\cos\beta\sin\psi \\ -v\sin\psi - f\cos\beta\cos\psi \\ -R\sin\left(\dfrac{\psi}{\sin\beta}\right)\dfrac{1}{\sin\beta} \end{bmatrix}\dot{\psi} + \begin{bmatrix} 0 \\ -R \\ R\operatorname{ctg}\beta \end{bmatrix}^T \times$$

$$\times\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\,\underset{\sim}{R}_0\,\underset{\sim}{R}_\psi + \underset{\sim}{R}_\varphi\,\underset{\sim}{R}_0\frac{\mathrm{d}\underset{\sim}{R}_\psi}{\mathrm{d}t}\right). \tag{8}$$

Accelerația punctului D față de axele reperului fix se obține prin derivarea relației matriceale (8):

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v\sin\psi + f\cos\beta\cos\psi \\ -v\cos\psi - f\cos\beta\sin\psi \\ -R\dfrac{\cos\left(\dfrac{\psi}{\sin\beta}\right)}{\sin^2\beta} \end{bmatrix}\dot{\psi}^2 + \begin{bmatrix} v\cos\psi - f\cos\beta\sin\psi \\ -v\sin\psi + f\cos\beta\cos\psi \\ -R\dfrac{\sin\left(\dfrac{\psi}{\sin\beta}\right)}{\sin\beta} \end{bmatrix} \times$$

$$\times\,\ddot{\psi} + \begin{bmatrix} 0 \\ -R \\ R\operatorname{ctg}\beta \end{bmatrix}^T \left(\frac{\mathrm{d}^2\underset{\sim}{R}_\varphi}{\mathrm{d}t^2}\,\underset{\sim}{R}_0\underset{\sim}{R}_\psi + \underset{\sim}{R}_\varphi\,\underset{\sim}{R}_0\,\frac{\mathrm{d}^2\underset{\sim}{R}_\psi}{\mathrm{d}t^2}\right). \tag{9}$$

Proiecțiile vitezei (8) și ale accelerației (9) ale punctului D pe axele reperului fix sînt de asemenea funcție numai de parametrul $\psi(t)$.

Cunoscînd proiecțiile pe axe ale vectorului viteză și respectiv accelerație, se pot obține direcția, sensul și mărimea acestora.

CONCLUZII

Metoda matriceală de determinare a caracteristicilor cinematice ale diferitelor puncte de pe suprafața rolelor sapelor de foraj permite o scriere compactă, pretîndu-se unui calcul automat pe calculatoare electronice.

Metoda permite studierea influenței diferiților parametri constructivi (deplasarea axelor, fuga, numărul de dinți ai rolelor etc.) și de regim ai sapei ($\dot{\psi}$), asupra eficienței funcționării acesteia în faza de proiectare și de concepție a noilor sape, precum și a celor existente.

Rezultatele studiului cinematic efectuat în cele ce preced pe lîngă utilizarea lor ad-hoc, pot fi folosite și pentru studiul dinamic al acțiunii rolelor sapei pe talpa sondei, în ipoteza arătată.

Un studiu mai complet, dinamic, efectuat în baza principiilor variaționale ale mecanicii analitice, în care să se ia în considerare frecarea pe axul rolei, proporțională cu apăsarea pe sapă, precum și caracteristicile fizico-mecanice ale rocii, determinate experimental în condițiile de la talpa sondei, va putea să dea indicațiile necesare, privind procesul de dislocare și de așchiere a dinților rolelor care rezultă din mișcarea de alunecare a acestora pe talpa sondei.

ANEXĂ

1. Reperul $O\,x'\,y'\,z'$ se rotește cu unghiul ψ în jurul axei Oz'.

Trecerea de la reperul $Ox'y'z'$ de versori $\bar{n}_{x_1}$, $\bar{n}_{y_1}$, $\bar{n}_{z_1}$ la reperul $Onn'x'$ de versori $\bar{n}_{x\psi}$, $\bar{n}_{y\psi}$, $\bar{n}_{z\psi}$ (fig. A.1), se face prin formulele de transformare :

$$\begin{aligned} \bar{n}_{x\psi} &= \bar{n}_{x_1} \cos\psi + \bar{n}_{y_1} \sin\psi, \\ \bar{n}_{y\psi} &= -\bar{n}_{x_1} \sin\psi + \bar{n}_{y_1} \cos\psi, \\ \bar{n}_{z\psi} &= \bar{n}_{z1}, \end{aligned} \tag{A.1}$$

sau, exprimat matriceal,

$$\underset{\sim}{\bar{N}}_{\psi} = \begin{bmatrix} \bar{n}_{x\psi} \\ \bar{n}_{y\psi} \\ \bar{n}_{z\psi} \end{bmatrix}, \tag{A.2}$$

$$\underset{\sim}{\bar{N}}_{1} = \begin{bmatrix} \bar{n}_{x1} \\ \bar{n}_{y1} \\ \bar{n}_{z1} \end{bmatrix}, \tag{A.3}$$

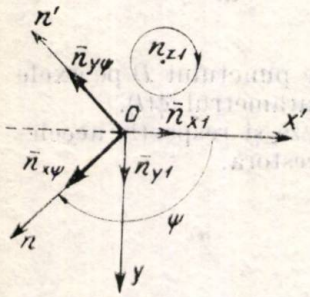


Fig. A. 1

$$\underset{\sim}{R}_{\psi} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{A.4}$$

respectiv

$$\underset{\sim}{\bar{N}}_{\psi} = \underset{\sim}{R}_{\psi} \cdot \underset{\sim}{\bar{N}}_{1}. \tag{A.5}$$

2. Reperul $O\,nn'\,z'$ se rotește cu unghiul θ în jurul axei nodurilor On.

Trecerea de la reperul $O\,nn'\,z'$ de versori $\bar{n}_{x\psi}$, $\bar{n}_{y\psi}$, $\bar{n}_{z\psi}$ la reperul $O\,nn''z$ de versori $\bar{n}_{x\theta}$, $\bar{n}_{y\theta}$, $\bar{n}_{z\theta}$ (fig. A.2), se face prin formulele de transformare :

$$\begin{aligned} \bar{n}_{x\theta} &= \bar{n}_{x}, \\ \bar{n}_{y\theta} &= \bar{n}_{y\psi} \cos\theta + \bar{n}_{z\psi} \sin\theta, \\ \bar{n}_{z\theta} &= -\bar{n}_{y\psi} \sin\theta + \bar{n}_{z\psi} \cos\theta, \end{aligned} \tag{A.6}$$

sau, exprimat matriceal,

$$\underset{\sim}{\bar{N}}_\theta = \begin{bmatrix} \bar{n}_{x\theta} \\ \bar{n}_{y\theta} \\ \bar{n}_{z\theta} \end{bmatrix}, \tag{A.7}$$

$$\underset{\sim}{R}_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \tag{A.8}$$

respectiv

$$\underset{\sim}{\bar{N}}_\theta = \underset{\sim}{R}_\theta \cdot \underset{\sim}{\bar{N}}_\psi. \tag{A.9}$$

3. Reperul $O\,nn''\,z$ se rotește cu unghiul φ în jurul axei Oz.

Trecerea de la reperul de versori $\bar{n}_{x\theta}$, $\bar{n}_{y\theta}$, $\bar{n}_{z\theta}$ (fig. A.3), se face prin formulele de transformare :

$$\begin{aligned} \bar{n}_x &= \bar{n}_{x\theta}\cos\varphi + \bar{n}_{y\theta}\sin\varphi, \\ \bar{n}_y &= -\bar{n}_{x\theta}\sin\varphi + \bar{n}_{y\theta}\cos\varphi, \\ \bar{n}_z &= \bar{n}_{z\theta}, \end{aligned} \tag{A.10}$$

sau, exprimat matriceal,

$$\underset{\sim}{\bar{N}} = \begin{bmatrix} \bar{n}_x \\ \bar{n}_y \\ \bar{n}_z \end{bmatrix}, \tag{A.11}$$

$$\underset{\sim}{R}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{A.12}$$

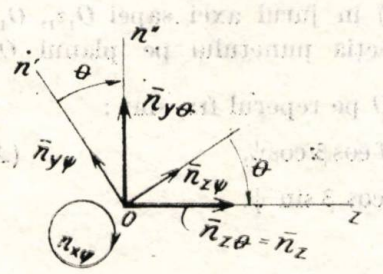


Fig. A. 2

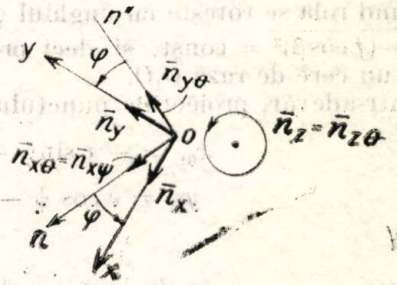


Fig. A. 3

respectiv

$$\underset{\sim}{\bar{N}} = \underset{\sim}{R}_\varphi \cdot \underset{\sim}{\bar{N}}_\theta \tag{A.13}$$

sau, prin substituții succesive a relațiilor (5) și (9) în (13), se obțin :

$$\underset{\sim}{\bar{N}} = \underset{\sim}{R}_\varphi \underset{\sim}{R}_\theta \underset{\sim}{R}_\psi \underset{\sim}{\bar{N}}_1 = \underset{\sim}{R}\, \underset{\sim}{\bar{N}}_1,$$

unde

$$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{R}_{\varphi}\ \underset{\sim}{R}_{\theta}\ \underset{\sim}{R}_{\psi} \tag{A.14}$$

este o matrice de transformare ortogonală de forma

$$\underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \tag{A.15}$$

ale cărei elemente sînt :

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\theta,\\
a_{12} &= \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\theta,\\
a_{13} &= \sin\varphi\sin\theta,\\
a_{21} &= -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\theta,\\
a_{22} &= -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\theta,\\
a_{23} &= \cos\varphi\sin\theta,\\
a_{31} &= \sin\psi\sin\theta,\\
a_{32} &= -\cos\psi\sin\theta,\\
a_{33} &= \cos\theta,
\end{aligned} \tag{A.16}$$

expresii care pot fi obținute automat, efectuînd produsul matriceal indicat în (A.14).

4. Determinarea coordonatelor vîrfului rolei (x_{01}, y_{01}, z_{01}).

Dacă ținem seama că axa rolei este deplasată cu (v) în direcția axei y_1, fuga este (f) și unghiul la vîrf 2β (vezi fig. A.4), se obține :

Cînd rola se rotește cu unghiul $\psi(t)$ în jurul axei sapei O_1z_1, $O_1O = \sqrt{v^2 + (f\cos\beta)^2} = \text{const.}$ și deci proiecția punctului pe planul $O_1x_1y_1$ descrie un cerc de rază O_1O.

Într-adevăr, proiecțiile punctului O pe reperul fix sînt :

$$\begin{aligned}
x_{01} &= -v\sin\psi - f\cos\beta\cos\psi,\\
y_{01} &= v\cos\psi - f\cos\beta\sin\psi.
\end{aligned} \tag{A.17}$$

Rezultă

$$x_{01}^2 + y_{01}^2 = v^2 + (f\cos\beta)^2,$$

care reprezintă ecuația unui cerc.

Cota z_{01} (fig. A.5), a punctului O, ținînd seama de raza R, unghiul la vîrf 2β și numărul de dinți (n) de pe coroana marginală a rolei, se poate scrie :

$$z_{01} = R\left(\cos\varphi - \cos\frac{\pi}{n}\right)\cos\beta, \tag{A.18}$$

unde

$$-\frac{\pi}{n} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{n}.$$

Așa cum s-a arătat anterior, legea de variație $\varphi = \varphi(t)$ depine de o serie de factori dinamici.

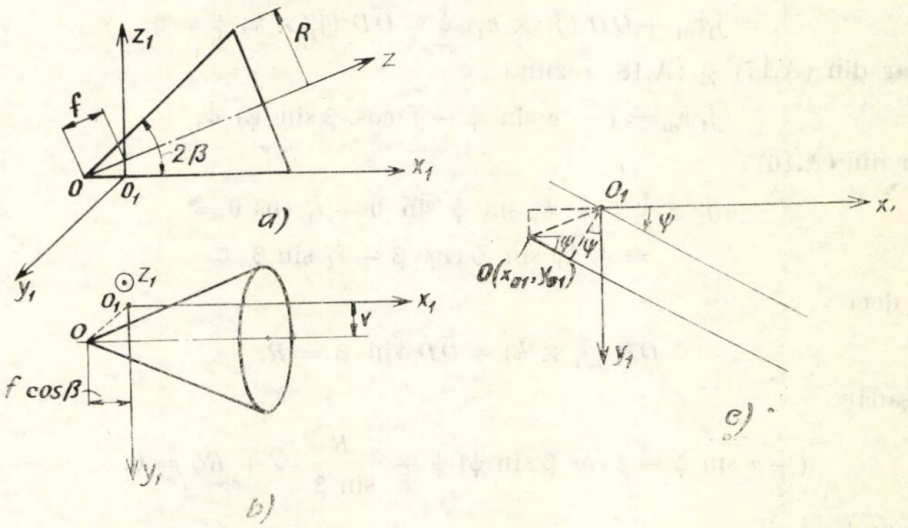


Fig. A. 4

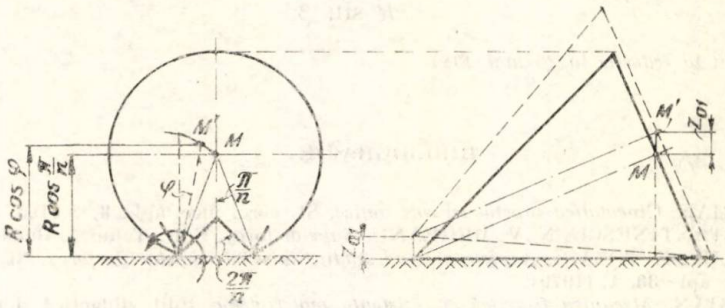


Fig. A. 5

În cele ce urmează se determină această lege cînd vîrful D al unui dinte de pe coroana marginală se deplasează pe direcția medie $\overline{OD}$ a amprentei lăsate pe talpa sondei, cînd toți dinții aflați pe generatoarea conului rolei, care trec prin D, iau contact prin ciocnire cu roca.

În această ipoteză, în perioada de timp care urmează, viteza punctului D este

$$\bar{v}_{1D} = \bar{v}^{tr}_{1D} + \bar{v}^{r}_{1D},$$

unde

$$\bar{v}_{1D}^{tr} = \bar{v}_{01} + \bar{k}_1 \dot{\psi} \times \overline{OD} \text{ şi } \bar{v}_{1D}^{r} = \bar{k}\dot{\psi} \times \overline{OD}.$$

Anulînd proiecţia acesteia pe direcţia normală, adică pe direcţia medie $\overline{OD}$, considerată paralelă cu axa x_1, adică $\overline{OD} = \bar{i}_1 \cdot OD$, rezultă

$$\bar{j}_1 \bar{v}_{1D} = \bar{j}_1 (\bar{v}_{01} + \bar{k}_1\dot{\psi} \times \overline{OD}) + \bar{j}_1 (\bar{k}\dot{\psi} \times \overline{OD}) =$$

$$= \bar{j}_1 \bar{v}_{01} + \overline{OD} (\bar{j}_1 \times \bar{k}_1) \dot{\psi} + \overline{OD} (\bar{j}_1 \times \bar{k}) \dot{\varphi} = 0.$$

Dar din (A.17) şi (A.18) rezultă

$$\bar{j}_1 \bar{v}_{01} = (- v \sin \psi - f \cos \beta \sin \psi) \dot{\psi},$$

iar din (A.16) :

$$\bar{j}_1 \times \bar{k} = - \bar{k}_1 \sin \psi \sin \theta + \bar{i}_1 \cos \theta =$$

$$= - \bar{k}_1 \sin \psi \cos \beta + \bar{i}_1 \sin \beta$$

şi deci

$$\overline{OD} (\bar{j}_1 \times \bar{k}) + \overline{OD} \sin \beta = R.$$

Aşadar

$$(- v \sin \psi - f \cos \beta \sin \psi) \dot{\psi} + \frac{R}{\sin \beta} \dot{\psi} + R\dot{\varphi} = 0,$$

de unde

$$\dot{\varphi} = - \frac{R - (v + f \cos \beta) \sin \beta \sin \varphi}{R \sin \beta} \dot{\psi} \qquad \text{(A.19)}$$

Primit la redacţie la 25 mai 1987

BIBLIOGRAFIE

1. V. FLORIAN, *Cinematica sapelor cu role conice*, St. cerc. mec. apl., **8**, 3 (1957).
2. D. CONSTANTINESCU, N. V. MEREANU, *Sape de foraj*, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1970.
3. D. RASEEV, E. TOCACI, *Aspecte privind studiul mişcării sapelor de foraj*, St. cerc. mec. apl., **38**, 1, (1979).
4. V. FLORIAN, *Mecanică teoretică şi rezistenţa materialelor*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1982.
5. V. OLARIU, P. SIMA, V. ACHIRILOAIE, *Mecanică tehnică*, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1982.

O METODĂ DE DETERMINARE A SOLUȚIEI PENTRU DEFORMAȚIILE DIN JURUL UNUI TUNEL ORIZONTAL CIRCULAR

de I. DUDA

Institutul de Construcții din București

În acest articol se prezintă o metodă de determinare a stării de tensiune, deformare și deplasare în jurul unui tunel orizontal circular, folosind ecuațiile cu comandă. Tunelul este considerat într-o rocă, a cărei ecuație constitutivă este de tip elasto-viscoplastic. Ecuația stării de deformare este transformată într-o ecuație aproximantă, apoi se determină soluția ei sub forma unei serii funcționale de tip Fliess.

1. INTRODUCERE

Studiul distribuției tensiunilor, deformațiilor și deplasărilor în jurul unui tunel orizontal este o problemă importantă pentru practică. Ne propunem să obținem o soluție pentru starea de tensiune din jurul unei cavități cilindrice orizontale într-o rocă, a cărei ecuație constitutivă este de forma (vezi [1]) :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{2G}\right)\dot{\sigma}_1 + \frac{1}{2G}\,\dot{\boldsymbol{\sigma}} + k(\sigma,\,\bar{\sigma},\,\Delta) < 1 - \frac{W^I(t)}{H(\sigma,\bar{\sigma},\Delta)} > \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (1)$$

unde

$\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$ reprezintă tensorii deformație și respectiv tensiune ; $k(\sigma,\,\bar{\sigma}\,\Delta)$ — coeficient care depinde de cei trei invarianți ai tensorului tensiune ;

K,G — constante elastice ale materialului ;

$$\langle\lambda\rangle = \begin{cases} 0 & \lambda \leqslant 0, \\ \lambda & \lambda > 0 \ ; \end{cases}$$

$$W^I(t) = \int_0^t \boldsymbol{\sigma}(\tau)\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \text{ — lucrul ireversibil al tensiunii} \quad (2)$$

sau

$$\dot{W}^I(t) = \frac{\mathrm{d}W^I}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\sigma}(t)\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\,(t), \quad (2')$$

$$H(\sigma,\,\bar{\sigma},\Delta) = W^I(t) \text{ — frontiera de stabilizare a fluajului.} \quad (3)$$

Prin metoda de rezolvare a ecuației (1) vom determina și timpul de exploatare al tunelului, t_f, adică exploatarea tunelului în deplină siguranță.

2. ECUAȚII APROXIMANTE ȘI OBȚINEREA UNOR ECUAȚII NELINIARE CU COMANDĂ

Presupunem că starea de deformare este plană, deci $\dot{\varepsilon}_{zz} = 0$ (deformația după axa z), atunci din (1) rezultă :

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3K}+\frac{1}{G}\right)\dot{\sigma}^R_{zz} = -k(\sigma,\bar{\sigma}) < 1 - \frac{W^I(t)}{H(\sigma,\bar{\sigma})} > \frac{\partial H}{\partial \sigma^R_{zz}}, \tag{4}$$

$$\dot{\sigma}^R_{zz} = -Ak(\sigma,\bar{\sigma}) < 1 - \frac{W^I(t)}{H(\sigma,\bar{\sigma})} > \frac{\partial H}{\partial \sigma^R_{zz}}, \tag{5}$$

unde $A = \dfrac{3}{\left(\dfrac{1}{3K}+\dfrac{1}{G}\right)}$, σ^R_{zz} — tensiunea relativă după direcția z.

Din (5) rezultă variația tensiunii relative σ^R_{zz} în intervalul (t_0, t_f) cu condiția inițială :

$$\sigma^R_{zz}(\tilde{t}=0) = \sigma^{R_0}_{zz}(t=t_0) = -\frac{3K-2G}{6K+2G}\,\frac{\sigma_h-\sigma_v}{2}\cdot\frac{4a^2}{r^2}\cos 2\theta, \tag{6}$$

unde t_0 este timpul de la care începe exploatarea tunelului, $(0, t_0)$ fiind intervalul de săpare și consolidare, interval scurt în raport cu intervalul de exploatare (t_0, t_f). În intervalul (t_0, t_f) vom presupune că celelalte componente ale tensiunii (în coordonate cilindrice) rămîn constante.
Din (1) și (2′) rezultă :

$$W^I(t) = \boldsymbol{\sigma}(t)\cdot\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^I(t) = k(\sigma,\bar{\sigma}) < 1 - \frac{W^I(t)}{H(\sigma,\bar{\sigma})} > \left(\frac{\partial H}{\partial \sigma}\,\sigma + \frac{\partial H}{\partial \bar{\sigma}}\,\bar{\sigma}\right), \tag{7}$$

din care într-o primă aproximare (dezvoltînd în serie Taylor pînă la termenul de ordinul întîi) se obține :

$$W^I(t) = W^{IP}(t_0) + k(\sigma,\bar{\sigma}) < 1 - \frac{W^{IP}}{H(\boldsymbol{\sigma}^P + \boldsymbol{\sigma}^{R_0})} > \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)(t_0)\,\frac{(t-t_0)}{1!}, \tag{8}$$

unde $W^{IP} = H(\boldsymbol{\sigma}^P)$ și $\sigma^P = \dfrac{2\sigma_h+\sigma_v}{3}$, $\bar{\sigma}^P = |\sigma_h - \sigma_v|$ corespund diverselor adîncimi h.
Atunci (5) devine :

$$\dot{\sigma}^R_{zz} = -\frac{Ak(\sigma,\bar{\sigma})}{H(\sigma,\bar{\sigma})}\cdot\frac{\partial H}{\partial \sigma^R_{zz}} < H - W^I(t_0) > + \frac{Ak(\sigma,\bar{\sigma})}{H(\sigma,\bar{\sigma})}\,\frac{\partial H}{\partial \sigma^R_{zz}}\,\dot{W}^I(t_0)\,\tilde{t}, \tag{9}$$

unde $\tilde{t} = t - t_0 \in [0, t_1 - t_0]$, iar $t_1 \in [t_0, t_f]$.

Notînd $g_0(\sigma^R_{zz}) = -\dfrac{Ak(\sigma,\bar{\sigma})}{H(\sigma,\bar{\sigma})}\,\dfrac{\partial H}{\partial \sigma^R_{zz}} < H - W^I(t_0) >$,

$$g_1(\sigma^R_{zz}) = \frac{Ak(\sigma,\bar{\sigma})}{H(\sigma,\bar{\sigma})}\,\frac{\partial H}{\partial \sigma^R_{zz}}\,\dot{W}^I(t_0)\,\tilde{t}, \tag{10}$$

unde expresia lui $W^I(t)$ este dată de (8), rezultă prima ecuație aproximantă :

$$\dot{\sigma}_{zz}^{R} = g_0(\sigma_{zz}^{R}) + g_1(\sigma_{zz}^{R})\tilde{t},\ \tilde{t} \in [0,\ T_1], \tag{11}$$

unde g_0 și g_1 sînt funcții analitice și T_1 va fi ales mai jos. Din (11) se va obține $\sigma_{zz(1)}^{R}$ cu $t \in [t_0,\ t_0 + T_1]$, apoi cu datele obținute în $t_1 = t_0 + T_1$ se recalculează σ, $\bar{\sigma}$ etc. și vom integra din nou prima ecuație aproximantă pe un interval $[t_1,\ t_1 + T_2]$ prin aceeași metodă. Continuînd procedeul vom obține într-un număr finit de pași soluții exacte pentru ecuațiile aproximante pe tot intervalul $[t_0,\ t_f]$ (deoarece este compact). De fapt procedeul se va opri cînd $H(\sigma, \bar{\sigma}) \leqslant W^I(t)$, condiție care va da aproximativ momentul t_f.

3. PRELIMINARII DESPRE ECUAȚIILE NELINIARE CU COMANDĂ

Fie m un întreg ($m \geqslant 1$). Vom considera ecuații neliniare cu m comenzi de forma :

$$\dot{x} = g_0(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)\, u_i(t), \tag{12}$$

unde $x \in U$, U interval deschis ; $g_0, g_1, \ldots, g_m : U \to \mathbb{R}$ sînt funcții analitice pe U, iar $u_1,\ u_2, \ldots, u_m$; $[0,\ T] \to \mathbb{R}$ sînt funcții continue pe porțiuni, care satisfac condițiile :

$$\max_{t \in [0,T]} |\, u_i(t)\, | < 1. \tag{13}$$

Funcțiile $u_1, \ldots, u_m$ se numesc *comenzi*. Funcția necunoscută $x = x(t)$ satisface condiția inițială :

$$x(0) = x_0. \tag{14}$$

Fie $\lambda : U \to \mathbb{R}$ o funcție analitică oarecare. Vom defini *derivata Lie* a funcției λ în raport cu o funcție analitică $g : U \to \mathbb{R}$, notată Lg, astfel :

$$Lg\ \lambda \overset{\text{def}}{=} g\,\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x}. \tag{15}$$

Lema 1. Fie $g_0,\ g_1, \ldots, g_m : U \to \mathbb{R}$ funcții anlitice pe U și $\lambda : U \to \mathbb{R}$ o funcție analitică, Pentru orice $x_0 \in U$, fixat, definim numerele reale :

$$c_{\emptyset} = \lambda(x_0),\ c_{i_k \ldots i_1 i_0} = Lg_{i_0}\, Lg_{i_1} \ldots Lg_{i_k}\, \lambda(x_0), \tag{14}$$

unde indicii $i_0, i_1, \ldots, i_k \in \{0,1,\ldots,m\}$.

Atunci există numerele reale $K > 0$, $M > 0$ astfel încît sînt îndeplinite condițiile de creștere :

$$|\, c_{i_k \ldots i_0}\, | \leqslant K(k+1)!\, M^{k+1}, \tag{15}$$

unde indicii $i_0, \ldots, i_k = 0,\ 1, \ldots, m$.

Demonstrația lemei 1 se face prin metoda seriilor majorante ale lui Gröbner, obținute din inegalitățile de tip Cauchy pentru funcții analitice (vezi [2], [3]).

Pentru orice $i = 0, 1, \ldots, m$ definim funcţiile :

$$\xi(t) = t,\ \xi_i(t) = \int_0^t u_i(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\ t \in [0, T],\ 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{16}$$

Definim acum prin recurenţă, integralele iterate :

$$\int_0^t \mathrm{d}\xi_{i_k}\,\mathrm{d}\xi_{i_{k-1}} \ldots \mathrm{d}\xi_{i_0} = \int_0^t \mathrm{d}\xi_{i_k}(\tau) \int_0^\tau \mathrm{d}\xi_{i_{k-1}} \ldots \mathrm{d}\xi_{i_0}, \tag{17}$$

iar integrala corespunzătoare indcelui ϕ este 1.
Vom avea rezultatul de bază :

Propoziţia 2. Presupunem că există numerele reale $K > 0$, $M > 0$ astfel încît :

$$|c_{i_k \ldots i_0}| \leqslant K(k+1)!\ M^{k+1},\ (\forall)\ k \geqslant 0,\ (\forall)\ (i_k, \ldots, i_0),$$

atunci există un număr real $T > 0$ astfel încît, pentru orice $0 \leqslant t \leqslant T$ şi orice funcţii continue pe porţiuni $u_1, \ldots, u_m : [0, T] \to \mathbb{R}$ care îndeplinesc condiţia :

$$\max_{t \in [0, T]} |u_i(t)| < 1,$$

seria

$$y(t) = c_\emptyset + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i_0, \ldots i_k = 0}^{m} c_{i_k \ldots i_0} \int_0^t \mathrm{d}\xi_{i_k}\,\mathrm{d}\xi_{i_{k-1}} \ldots \mathrm{d}\xi_{i_0} \right) \tag{18}$$

este absolut şi uniform convergentă pe $[0, T]$.
Pentru demonstraţie se arată prin inducţie după k, inegalitatea

$$\left| \int_0^t \mathrm{d}\xi_{i_k} \ldots \mathrm{d}\xi_{i_0} \right| \leqslant \frac{t^{k+1}}{(k+1)!},$$

de unde va rezulta majorarea :

$$\left| \sum_{i_0 \ldots i_k = 0}^{m} c_{i_k \ldots i_0} \int_0^t \mathrm{d}\xi_{i_k} \ldots \mathrm{d}\xi_{i_0} \right| \leqslant K[M(m+1)t]^{k+1}$$

şi alegînd

$$(*) \qquad T < \frac{1}{M(m+1)},$$

atunci, pentru orice $t \in [0, T]$, seria :

$$\sum_{k=0}^{\infty} K[M(m+1)]^{k+1}$$

este convergentă şi deci seria (18) este absolut şi uniform convergentă.

Propoziția 3. Fiind date funcțiile analitice $g_0, \ldots, g_m$, $\lambda : U \to \mathbb{R}$ ca mai sus, atunci seria

$$y(t) = \lambda(x_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_0,\ldots,i_k=0}^{m} L_{g_{i_0}} L_{g_{i_1}} \ldots L_{g_{i_k}} \lambda(x_0) \int_0^t \mathrm{d}\xi_{i_k} \ldots \mathrm{d}\xi_{i_0} \qquad (19)$$

este convergentă pentru $t \in [0, T]$.

Lema 4. Fie $g_0, g_1, \ldots, g_m$ definite ca mai sus și $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ funcții analitice reale, definite pe U. Fie $\gamma : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ o funcție analitică reală. Dacă $y_1(t), \ldots, y_l(t)$ sînt funcțiile din propoziția 3 asociate lui $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$, atunci funcția $y(t)$ asociată lui $\gamma(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ este $\gamma(y_1(t) \ldots, y_l(t))$.

Pentru demonstrație vezi ([2], [3]).

Revenind la ecuația (2), obținem următorul rezultat fundamental:

Teoremă 5. Dacă funcțiile $u_1, \ldots, u_m$ satisfac condiția (13) și $T > 0$ este suficient de mic, atunci pentru orice $t \in [0, T]$, soluția ecuației (12), care satisface condiția inițială (14) se scrie sub forma:

$$x(t) = x_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_0,\ldots,i_k=0}^{m} L_{g_{i_0}} \ldots L_{g_{i_k}} x(x_0) \int_0^t \mathrm{d}\xi_{i_k} \ldots \mathrm{d}\xi_{i_0}. \qquad (20)$$

Demonstrația se face cu ajutorul rezultatelor anterioare.

Observație. Relația (20) se numește *dezvoltarea funcțională Fliess* a soluțiilor ecuației neliniare (12) cu comenzi (vezi [2], [3]).

În continuare vom scrie dezvoltarea (20) sub forma unei serii Volterra.

Definim o integrală de convoluție generalizată astfel: fie $(i_k, \ldots, i_1)$ un multindex cu $i_k, \ldots, i_1 \in \{1, \ldots, m\}$ și fie submulțimea lui $\mathbb{R}^{k+1}$ definită prin

$$S_k = \{(t, \tau_k, \ldots, \tau_1) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid T \geqslant t \geqslant \tau_k \geqslant \ldots \geqslant \tau_1 \geqslant 0\} \ (t \text{ fixat}).$$

Dacă $u_1, \ldots, u_m$ sînt funcții reale, continue pe porțiuni, definite pe $[0, T]$, integrala de convoluție generalizată de ordin k, de $u_1, \ldots, u_m$ cu nucleul $w_{i_k} \ldots i_1$, se definește prin:

$$\int_0^t \int_0^{\tau_k} \ldots \int_0^{\tau_2} w_{i_k \ldots i_1}(t, \tau_k, \ldots, \tau_1)\, u_{i_k}(\tau_k) \ldots u_{i_1}(\tau_1)\, \mathrm{d}\tau_1 \ldots \mathrm{d}\tau_k, \ t \in [0, T]. \qquad (21)$$

Pentru $k = 0$, w_0 va fi o funcție continuă cu valori reale definită pe $S_0 = \{t \in \mathbb{R} \mid T \geqslant t \geqslant 0\}$.

Lema 6. Presupunem că există numerele reale $K > 0$, $M > 0$ astfel încît:

$$| w_{i_k} \ldots i_1 (t, \tau_k, \ldots, \tau_1) | < K \cdot k! M^k, \qquad (22)$$

oricare $k > 0$, oricare multiindex $(i_k, \ldots, i_1)$, oricare $(t, \tau_k, \ldots, \tau_1) \in S_k$. Atunci există un număr real $T > 0$ astfel încît, pentru orice $t \in [0, T]$

şi oricare funcţii continue pe porţiuni $u_1, \ldots, u_m : [0, T] \to \mathbb{R}$ care satisfac condiţia (13), seria

$$y(t) = w_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} \int_0^t \int_0^{\tau_k} \ldots \int_0^{\tau_2} w_{i_k \ldots i_1}(t, \tau_k, \ldots, \tau_1) \times$$

$$\times u_{i_k}(\tau_k) \ldots u_{i_1}(\tau_1)\, d\tau_1 \ldots d\tau_k, \tag{23}$$

este absolut şi uniform convergentă pe $[0, T]$.
Demonstraţia este similară cu cea de la proporţia 2.

Lema 7. Fie $g_0, g_1, \ldots, g_m$ funcţii analitice pe U şi $\lambda : U \to \mathbb{R}$ funcţie analitică. Fie $\Phi_t^{g_0}$ fluxul lui g_0 (asociat ecuaţiei diferenţiale $\dot{x} = g_0(x)$). Pentru orice pereche $(t, x) \in \mathbb{R} \times U$ pentru care fluxul $\Phi_t^{g_0}(x)$ este definit, notăm cu $Q_t(x)$ funcţia :

$$Q_t(x) = \lambda 0\ \Phi_t^{g_0}(x) \tag{24}$$

şi cu $P_t^1(x), \ldots, P_t^m(x)$ funcţiile :

$$P_t^i(x) = (\Phi_{-t^*}^{g_0})\ g_i \circ \Phi_t^{g_0}(x), \qquad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{25}$$

Fie
$$w_0(t) = Q_t(x_0), \tag{26}$$

şi
$$w_{i_m \ldots i_1}(t, \tau_k, \ldots, \tau_1) = (L_{P_{\tau_1}^{i_1}(x)} \ldots L_{P_{\tau_k}^{i_k}(x)} Q_t^{(x)}(x_0)). \tag{27}$$

Atunci există numerele reale $K > 0$, $M > 0$ astfel incit sint indeplinite condiţiile (22).
Demontraţia este similară cu cea din lema 1 (vezi [2], [3]).

Teorema 8. Presupunem că funcţiile $u_1, \ldots, u_m$ satisfac condiţiile (13). Dacă T este suficient de mic, atunci pentru orice $t \in [0, T]$ soluţia $x = x(t)$ a ecuaţiei (12), care verifică condiţia iniţială (14) se poate dezvolta în serie Volterra (23) cu nucleele date de (26) şi (27), unde $Q_t(x)$ şi $P_t^i(x)$ sint date de (24) şi (25), iar $\lambda = x$.

Pentru demonstraţie se stabileşte o corespondenţă între dezvoltările funcţionalelor Fliess şi seriile Volterra (vezi [2], [3]).

4. APLICAŢII LA REZOLVAREA ECUAŢIILOR APROXIMANTE

În paragraful al 2-lea am stabilit prima ecuaţie aproximantă sub forma

$$\dot{\sigma}_{zz}^R = g_0(\sigma_{zz}^R) + g_1(\sigma_{zz}^R)\, \tilde{t},$$

unde $\tilde{t} \in [0, T]$. Deocamdată $T > 0$ nu este precizat. Funcţia $\sigma_{zz}^R(\tilde{t})$ ($\tilde{t} = t - t_0$) satisface condiţia iniţială :

$$\sigma_{zz}^R(\tilde{t} = 0) = \sigma_{zz}^{R_0}(t = t_0) = -\frac{3K - 2G}{6K + 2G} \cdot \frac{\sigma_h - \sigma_v}{2} \cdot \frac{4a^2}{r^2} \cos 2\theta, \tag{28}$$

(vezi [1]).

Notînd $u_1(\tilde{t}) = \tilde{t}$ și $\sigma_{zz}^R(\tilde{t}) = x(\tilde{t})$, obținem o ecuație de forma (12),

$$\dot{x} = g_0(x) + g_1(x) \cdot u_1(\tilde{t}) \tag{29}$$

și condiția

$$x(0) = x_0 = -\frac{3K - 2G}{6K + 2G} \cdot \frac{\sigma_h - \sigma_v}{2} \cdot \frac{4a^2}{r^2} \cos 2\theta. \tag{30}$$

Alegem $T > 0$ astfel încît $| u_1(t) | < 1$, adică luăm $T < 1$. Din lema (1) aplicată funcțiilor g_0, g_1 și $\lambda = x$, aflăm constantele $K > 0$ și $M > 0$. Alegînd T_1 ca în propoziția 2 (relația (*)) putem aplica teorema 25 și obținem următorul rezultat :

Teoremă 9. Soluția ecuației aproximante (12), care satisface condiția (28) pe intervalul $[0, T_1]$ se scrie sub forma :

$$\sigma_{zz}^R(\tilde{t}) = \sigma_{zz}^R(t_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_0, \ldots i_k = 0}^{1} L_{g_{i_0}} \ldots L_{g_{i_k}} \times \sigma_{zz}^R(t_0) \int_0^{\tilde{t}} \mathrm{d}\xi_{i_k} \ldots \mathrm{d}\xi_{i_0}. \tag{31}$$

Deci pe intervalul $[t_0, t_0 + T]$ am obținut soluția exactă a ecuației aproximante (12) sub forma (31), unde coeficienții seriei sînt calculabili.

De exemplu

$$L_{g_0}\, \sigma_{zz}^R(t_0) = g_0(\sigma_{zz}^R(t_0)),$$

$$L_{g_1}\, \sigma_{zz}^R(t_0) = g_1(\sigma_{zz}^R(t_0)),$$

$$L_{g_0} L_{g_1}\, \sigma_{zz}^R(t_0) = L_{g_0}(g_1)(\sigma_{zz}^R(t_0)) = g_0(\sigma_{zz}^R(t_0))\, g_1'(\sigma_{zz}^R(t_0))$$

etc.

Observație. Folosind teorema 8, putem obține soluția ecuației (12) și sub forma unei serii Volterra, dar nucleele acestei serii sînt mai complicat de calculat. Pentru determinări numerice este preferabilă metoda din teorema 9 (dezvoltarea funcțională Fliess).

Vom arăta în continuare că soluția (31) se poate scrie ca o serie de puteri ale lui t (formula Mac-Laurin) cu coeficienți calculabili în funcție de coeficienții ecuației (11) și de datele inițiale. Mai precis are loc următorul rezultat :

Teorema 10. Soluția ecuației (11), care satisface condiția (28) pe intervalul $[0, T_1]$, se scrie sub forma :

$$\sigma_{zz}^R(\tilde{t}) = \sigma_{zz}^R(t_0) + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{\substack{k, n_0, \ldots, n_k \geqslant 0 \\ n_0 + n_1 + \ldots + n_k + 2k = p}} \tag{32}$$

$$(L_{g_0}^{n_0} L_{g_1} L_{g_0}^{n_1} \ldots L_{g_0}^{n_{k-1}} L_{g_1} L_{g_0}^{n_k}\, \sigma_{zz}^R(t_0)) \cdot \frac{t^p}{p!} \cdot$$

Demonstrație. Ținînd seama de faptul că $d\xi_0 = dt$ și $d\xi_1 = tdt$, vom calcula toate integralele iterate din formula (31).

Mai intîi să calculăm integralele iterate de forma :

$$\int_0^t \underbrace{d\xi_0 \ldots d\xi_0}_{\text{de } l \text{ ori}} = \int_0^t (d\xi_0)^l.$$

Acum vom pune in evidență pozițiile in care apare $d\xi_1$ intr-o integrală iterată oarecare, scriind-o sub următoarea formă :

$$\int_0^t (d\xi_0)^{n_k} d\xi_1 (d\xi_0)^{n_{k-1}} \ldots (d\xi_0)^{n_1} d\xi_1 (d\xi_0)^{n_0}, \tag{33}$$

unde $n_0 \geqslant 0$, $n_1 \geqslant 0, \ldots, n_k \geqslant 0$ și $k \geqslant 1$ este numărul de poziții in care apare $d\xi_1$. Menționăm că acestea pot fi consecutive in cazul in care $n_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n_{k-1})$.

Folosind definiția recursivă a integratelor iterate, se obține :

$$\int_0^t (d\xi_0)^{n_k} d\xi_1 (d\xi_0)^{n_{k-1}} \ldots (d\xi_0)^{n_1} d\xi_1 (\tau) \int_0^\tau (d\xi_0)^{n_0} =$$

$$= \int_0^t (d\xi_0)^{n_k} d\xi_1 (d\xi_0)^{n_{k-1}} \ldots (d\xi_0)^{n_1} d\xi_1 (\tau) \frac{\tau^{n_0}}{n_0!} = \ldots$$

$$\ldots = \int_0^t (d\xi_0)^{n_k} d\xi_1 (d\xi_0)^{n_{k-1}} \ldots d\xi_1 (\nu) \frac{\nu^{n_0+n_1+1} (n_0+1)}{(n_0+n_1+2)!}.$$

Continuind procedeul, rezultă că

$$\int_0^t (d\xi_0)^{n_k} d\xi_1 (d\xi_0)^{n_{k-1}} \ldots (d\xi_0)^{n_1} d\xi_1 (d\xi_0)^{n_0} =$$

$$= \frac{(n_0+1)(n_0+n_1+3) \ldots (n_0+n_1+\ldots+n_{k-1}+2k-1)}{(n_0+n_1+\ldots+n_k+2k)!} t^{n_0+\ldots+n_k+2k}$$

Notînd $n_0 + n_1 + \ldots + n_k + h = l$, $l + k = p$ și

$$a_{k,n_0,\ldots,n_{k-1}} = (n_0+1)\ (n_0+n_1+3) \ldots (n_0+n_1+\ldots+n_{k-1}+2k-1)$$

și grupînd convenabil coeficienții lui t^p in relația (31) se obține chiar (32).

Observație. Avantajul ultimei formule constă în aceea că se poate calcula aproximativ soluția, evaluînd și eroarea în funcție de ordinul p de la care neglijăm termenii :

Notînd soluția pe intervalul $[t_0, t_1]$ $(t_1 = t_0 + T_1)$ cu $\sigma_{zz}^{R_1}(t)$ putem afla noua condiție inițială $\sigma_{zz}^{R_1}(t_1)$.

Rezolvînd prin același procedeu prima ecuație aproximantă (11) cu condiția inițială

$$\sigma_{zz}^{R}(t_1) = \sigma_{zz}^{R_1}(t_1), \tag{34}$$

obținem pe un interval $[t_1, t_1 + T_2]$ soluția $\sigma_{zz}^{R_2}(t)$.

Continuînd procedeul, vom obține într-un număr finit de pași soluții exacte pentru primele ecuații aproximante pe tot intervalul $[t_0, t_f]$ (deoarece intervalul este compact). La fiecare pas r vom testa condiția :

$$H(\sigma, \bar{\sigma}) > W^I(t_r),$$

condiție care va da aproximativ momentul de trecere în domeniul elastic (adică t_f). Dacă condiția nu este îndeplinită, atunci t_f aparține intervalului $[t_{r-1}, t_r]$ și poate fi calculat aproximativ prin testarea condiției în puncte anterioare, deoarece soluția obținută este definită pe tot intervalul $[t_{r-1}, t_r]$.

Așa cum am arătat în paragraful 2, putem calcula în funcție de datele problemei (ecuația (4)) și condițiile inițiale (6) coeficienții dezvoltării în serie Taylor a lui $W^I(t)$.

Aproximînd pe $W^I(t)$ cu polinomul Taylor de ordinul $m (m \geqslant 2)$, obținem din ecuația (4) ecuația aproximantă de ordinul m, care va avea forma (asemănătoare cu prima ecuație aproximantă) :

$$\sigma_{zz}^{R} = g_0(\sigma_{zz}^{R}) + g_1(\sigma_{zz}^{R})\frac{\tilde{t}}{1!} + \ldots + g_m(\sigma_{zz}^{R})\frac{\tilde{t}^m}{m!}, \tag{35}$$

unde $\tilde{t} = t - t_0$.

Observăm că termenii g_0 și g_1 sînt aceeași ca în prima ecuație aproximantă. Notînd

$$u_1(\tilde{t}) = \frac{\tilde{t}}{1!}, \ldots, u_m(\tilde{t}) = \frac{\tilde{t}^m}{m!}, \text{ cu } \tilde{t} \in [0, T] \text{ și } T > 0,$$

obținem o ecuație neliniară cu m comenzi(35) și cu aceeași condiție inițială.

Aplicînd din nou rezultatele din paragraful 3, obținem un $T_1 > 0$ astfel încît pentru orice $\tilde{t} \in [0, T]$, soluția exactă a ecuației aproximante de ordinul m(35) se scrie sub forma :

$$\sigma_{zz}^{R}(\tilde{t}) = \sigma_{zz}^{R}(t_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_0, \ldots, i_k = 0}^{m} L_{\varepsilon_{i_0}} L_{\varepsilon_{i_k}} \sigma_{zz}^{R}(t_0) \int_0^t \mathrm{d}\xi_{i_k} \ldots \mathrm{d}\xi_{i_0} \tag{36}$$

Observație. Folosind aceeași metodă ca în teorema 10 se pot calcula integralele iterate din formula (36) și se obține astfel soluția sub forma unei serii de puteri cu coeficienții calculabili din datele problemei.

Fie $\sigma^R_{zz_m}(\bar{t})$ soluția ecuației (35). În general, această soluție, pentru $m \geqslant 2$, oferă o aproximare mai bună a soluției problemei decît soluția $\sigma^R_{zz(1)}(t)$ a primei ecuații aproximante. Ar fi interesant de arătat în ce condiții șirul soluțiilor $\{\sigma^R_{zz(m)}(t)\}_{m\geqslant 1}$ converge la soluția exactă a problemei pentru ecuația (4).

Primit la redacție la 27 mai 1987

BIBLIOGRAFIE

1. N. CRISTESCU, *Mecanica rocilor* (note de curs), Universitatea din București, 1984.
2. A. ISIDORI, *Nonlinear Control Systems: An Introduction*, în: *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, **72**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985.
3. M. FLIESS, *Fonctionnelles causales non linéaires et indeterminées non commutatives*, Bull. Soc. Math. France, 109 (1981).

INFLUENȚA FORȚELOR HIDRODINAMICE ASUPRA TURAȚIEI CRITICE A DISPOZITIVELOR DE AMESTECARE

GH. D. PASAT

Institutul Politehnic, București

A. PANTAZOPOL

TMUCB, Antrepriza Montaj București

Lucrarea își propune studierea comportării dinamice a arborelui dispozitivului de amestecare în condițiile considerării și a forțelor hidrodinamice dezvoltate ca urmare a curgerii induse de amestecătorul tip turbină standard [1]. Se prezintă succint o metodă originală de determinare a traiectoriei capătului liber a arborelui montat în consolă, a turației critice și a pulsațiilor proprii de încovoiere.

1. INTRODUCERE

Utilizarea pe scară largă a reactoarelor chimice și biochimice prevăzute cu dispozitive mecanice de amestecare s-a impus în decursul timpului ca una din posibilitățile de intensificare a proceselor de transfer de moment, de substanță sau termic [1].

Din punct de vedere constructiv, arborele dispozitivului de amestecare este, de regulă, montat în consolă (fig. 1).

Se consideră că rulmenții utilizați în realizarea rezemării arborelui permit preluarea deformațiilor de încovoiere care apar în funcționare.

Turbina standard*) de masă M prezintă, ca urmare a execuției și montării, o excentricitate ε, astfel încît coordonatele centrului de masă C, vor fi (vezi fig. 2) :

$$x_C = x_0 + \varepsilon \cos \omega t, \qquad y_C = y_0 + \varepsilon \sin \omega t. \tag{1}$$

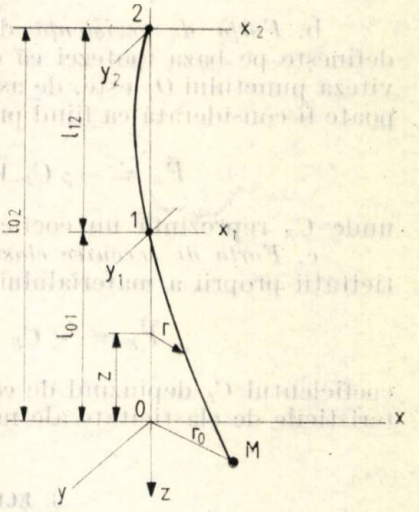


Fig. 1. — Schema montării în consolă a arborelui dispozitivului de amestecare.

2. ÎNCĂRCAREA SISTEMULUI ARBORE-TURBINĂ

În cele ce urmează se consideră următoarele sarcini care încarcă sistemul arbore-turbină :

a. Forța hidrodinamică $\vec{F}_H$, definită [2] prin intermediul relației

$$\vec{F}_H = -\rho \vec{V} \times \vec{\Gamma}, \tag{2}$$

*) Prin turbină standard în prezenta lucrare se înțelege turbina disc cu 6 pale drepte montate radial, soluție constructivă întîlnită și sub denumirea de turbină Rushton [1].

unde $\vec{V}$ reprezintă viteza capătului liber al arborelui (punctul O_1 fig. 2) :

$$\vec{V} = \vec{i}_1 \dot{x}_0 + \vec{i}_2 \dot{y}_0, \tag{3}$$

iar $\vec{\Gamma}$ — circulația vitezei, definite ca [3] :

$$\vec{\Gamma} = \vec{i}_3 \Gamma, \tag{4}$$

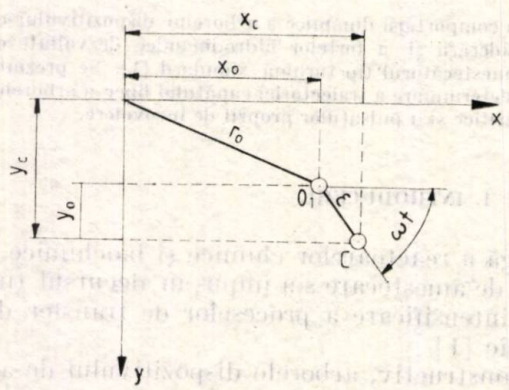


Fig. 2. — Sistemul de coordonate utilizat pentru studiul dinamic al arborelui dispozitivului de amestecare.

ceea ce permite obținerea următoarei relații pentru forța hidrodinamică :

$$\vec{F}_H = -\rho\Gamma\cdot(\vec{i}_1 \dot{y}_0 - \vec{i}_2 \dot{x}_0). \tag{5}$$

b. *Forța de rezistență* datorită viscozității mediului $\vec{F}_R$ — care se definește pe baza ipotezei că datorită săgeții relativ mici a arborelui, r_0, viteza punctului O_1 este, de asemenea, mică și în consecință această forță poate fi considerată ca fiind proporțională cu această viteză [4], [5],

$$\vec{F}_R = -\rho C_R \vec{V} = -\rho C_R(\vec{i}_1 \dot{x}_0 + \vec{i}_2 \dot{y}_0), \tag{6}$$

unde C_R reprezintă un coeficient de proporționalitate.

c. *Forța de revenire elastică* a arborelui $\vec{F}_E$, care se datorește elasticității proprii a materialului de execuție a arborelui,

$$\vec{F}_E = -C_E \vec{r}_0 = -C_E(\vec{i}_1 x_0 + \vec{i}_2 y_0), \tag{7}$$

coeficientul C_E depinzînd de configurația geometrică a arborelui și caracteristicile de elasticitate ale materialului arborelui.

3. ECUAȚIILE DE MIȘCARE

Aplicînd principiul conservării forțelor care acționează asupra sistemului arbore-turbină (ecuația fundamentală a dinamicii), rezultă :

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= -\rho\Gamma \dot{y}_0 - \rho C_R \dot{x}_0 - C_E x_0, \\ M\ddot{y}_C &= -\rho\Gamma \dot{x}_0 - \rho C_R \dot{y}_0 - C_E y_0, \end{aligned} \tag{8}$$

care prin considerarea relației (1) conduce la

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + 2q\,\dot{x}_0 + k^2 x_0 + 2p\,\dot{y}_0 &= \varepsilon\omega^2 \cos\omega t, \\ \ddot{y}_0 + 2q\,\dot{y}_0 + k^2 y_0 - 2p\,\dot{x}_0 &= \varepsilon\omega^2 \sin\omega t, \end{aligned} \tag{9}$$

unde s-au făcut următoarele notații :

$$2p = \frac{\rho\Gamma}{M}; \quad 2q = \frac{\rho C_R}{M}; \quad k^2 = \frac{C_E}{M}. \tag{10}$$

Soluțiile sistemului de ecuații sînt de forma :

$$\begin{aligned} x_p &= r_0 \cos(\omega t - \varphi), \\ y_p &= r_0 \sin(\omega t - \varphi), \end{aligned} \tag{11}$$

unde

$$r_0 = \frac{\varepsilon\omega^2}{\sqrt{(k^2 - \omega^2 + 2p\omega)^2 + 4q\,\omega^2}}, \tag{12}$$

și

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{2q\omega}{k^2 - \omega^2 + 2p\omega}. \tag{13}$$

Soluția (11) conduce la concluzia că, în regim permanent de mișcare, traiectoria capătului liber al arborelui, montat în consolă, corespunde unui cerc.

În regim nepermanent (tranzitoriu), mișcarea este caracterizată prin soluția (soluțiile) sistemului omogen de ecuații obținut din ecuația (9) :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + 2q\,\dot{x}_0 + k^2 x_0 + 2p\,y_0 &= 0, \\ \ddot{y}_0 + 2q\,\ddot{y}_0 + k^2 y_0 - 2p\,\dot{x}_0 &= 0, \end{aligned} \tag{14}$$

sistem care conduce la ecuația de ordinul al patrulea :

$$\dddot{x}_0 + 4q\,\ddot{x}_0 + 2(k^2 + 2p^2 + 2q^2)\,\ddot{x}_0 + 2qk^2\,\dot{x}_0 + k^4 x_0 = 0. \tag{15}$$

Ecuația caracteristică aferentă ecuației (19) se poate scrie sub forma :

$$(r^2 + k^2 + 2qr)^2 + 4p^2 r^2 = 0, \tag{16}$$

ale cărei soluții complexe sînt :

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= -(q + \mathrm{i}p) \pm \sqrt{(q + \mathrm{i}p)^2 - k^2}, \\ r_{3,4} &= -(q - \mathrm{i}p) \pm \sqrt{(q - \mathrm{i}p)^2 - k^2}. \end{aligned} \tag{17}$$

Soluțiile sistemului (14) pot fi scrise sub forma :

$$\begin{aligned} x_G &= \mathrm{e}^{\tau_1 t}(C_1 \cos \nu_1 t + C_2 \sin \nu_1 t), \\ y_G &= \mathrm{e}^{\tau_2 t}(C_3 \cos \nu_2 t + C_4 \sin \nu_2 t), \end{aligned} \tag{18}$$

unde

$$\tau_1 = -q + \sqrt{m}\cos\delta/2\,; \quad \tau_2 = -q - \sqrt{m}\cos\delta/2,$$
$$\nu_1 = -p + \sqrt{m}\sin\delta/2, \quad \nu_2 = -p - \sqrt{m}\sin\delta/2 \tag{19}$$

și

$$m = \sqrt{(q^2 - p^2 - k^2)^2 + 4p^2q^2},$$
$$\delta = \operatorname{arc\,tg}\frac{2qp}{q^2 - p^2 - k^2}. \tag{20}$$

Pentru determinarea constantelor C_i ($i = 1 \ldots 4$) se impune condiția la limită ca la timpul $t = 0$, punctul O_1 să se afle în poziția corespunzătoare punctului O (fig. 2), iar centrul de masă C să se afle în punctul de coordonate (ε, 0). Rezultă

$$C_1 = -r_0\cos\varphi\,; \quad C_2 = r_0\sin\varphi,$$
$$C_3 = r_0/\nu(\tau_1\cos\varphi - \omega\sin\varphi), \tag{21}$$
$$C_4 = r_0/\nu[\omega(1 - \cos\varphi) - \tau_2\sin\varphi],$$

făcîndu-se precizarea că r_0 este funcție de constanta elastică k, a cărei determinare se face prin considerarea geometriei rezemării și caracteristicilor elastice ale arborelui.

În sistemul arbore-turbină se consideră că se manifestă forța de natură elastică :

$$F_E = Mk^2 r(0) \tag{22}$$

și forțele de inerție ca urmare a sarcinii uniform distribuite a greutății arborelui :

$$f_c = \rho_a S\omega^2 r(z). \tag{23}$$

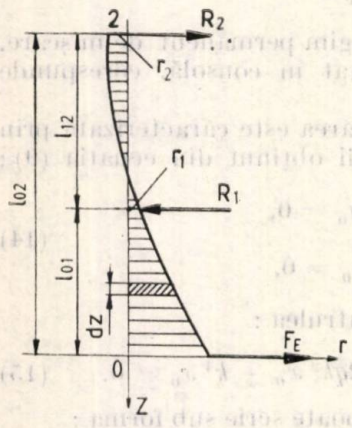


Fig. 3. — Schema echivalentă de rezemare a arborelui în consolă.

Reacțiunile din lagărele sistemului se determină pe baza schemei echivalente (fig. 3) :

$$F_E\, l_{01} - R_2\, l_{12} + \rho_a S\omega^2 \int_0^{l_{02}} (l_{01} - z)\, r(z)\, dz = 0, \tag{24}$$

$$F_E\, l_{02} - R_1\, l_{12} + \rho_a S\omega^2 \int_0^{l_{02}} (l_{02} - z)\, r(z)\, dz = 0.$$

Pentru obținerea unor rezultate concludente este necesară considerarea elasticității reazemelor, ceea ce conduce la determinarea liniei elastice (fibra medie deformată) în condițiile suprapunerii efectelor rezultate din încărcare și rezemare.

Prin procedee analitice adecvate [3], a rezultat în final, următoarea expresie care definește constanta elastică, în condițiile de rezemare-încărcare precizate :

$$\frac{1}{k^2} = \frac{M}{EI}\left[\frac{l_{01}^2\, l_{02}}{3} - \frac{l_{01}\, l_{02}}{l_{12}}\,\alpha^4 D - \frac{l_{01}\, l_{02}^3}{6 l_{12}}\,\alpha^4\left(b^4 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{840}\, l_{02}^4 + \frac{1}{40}\, l_{12}^2\, l_{02}^2\right) - \frac{l_{01}^4}{6 l_{12}}\,\alpha^4\, a^4 - \frac{l_{01}^7\, l_{02}}{5040\, l_{12}}\,\alpha^4\right], \qquad (25)$$

expresie în care s-au utilizat următoarele notații :

$$\alpha^4 = \frac{\rho_a\, S\omega^2}{EI},$$

$$a^4 = \frac{1}{360}(33\, l_{01}^4 + 85\, l_{01}^3\, l_{12} + 60\, l_{01}^2\, l_{12}^2 - 8\, l_{12}^4),$$

$$b^4 = \frac{1}{360}(33\, l_{01}^4 + 40\, l_{01}^3 l_{12} - 3\, l_{12}^4), \qquad (26)$$

$$D = \frac{l_{12}^2}{42}(7b^4 + l_{12}^4).$$

Definirea constantei elastice primite în final, trasarea traiectoriei capătului în consolă al arborelui, turația critică corespunzătoare și pulsațiile proprii de încovoiere, putînd fi, de asemenea, determinate.

4. EXEMPLU DE CALCUL

Se consideră cazul unui dispozitiv de amestecare cu arborele montat în consolă, executat din OLC 25 STAS 880-80, montaj caracterizat prin : diametrul arborelui $d_a = 0{,}25$ m ; lungimea totală $l_{02} = 5{,}86$ m ; distanța dintre lagăre $l_{12} = 1{,}35$ m, masa turbinei $M = 1600$ kg, turația arborelui $n = 78{,}125$ rot/min.

Pe baza relațiilor prezentate în cele ce preced, prin considerarea modelului fizic al curgerii induse de turbină pe baza modelului matematic echivalent, al teoriei jeturilor imersate [1], au rezultat :

a. constanta elastică :

$$k = 11{,}952\ \text{s}^{-1}.$$

b. ecuațiile de mișcare :

$$x_0 = \varepsilon e^{-4{,}35t}[-0{,}38 \cdot \cos\,(12{,}34\,t) - 0{,}3 \sin\,(12{,}34\,t) +$$

$$+ 0{,}456 \cdot \varepsilon \cdot \cos\,(8{,}18\,t - 0{,}59)],$$

$$y_0 = \varepsilon \cdot e^{-20{,}63t}[0{,}25 \cos\,(2{,}6\,t) + 2{,}26 \sin\,(2{,}6\,t) +$$

$$+ 0{,}456 \cdot \varepsilon \cdot \sin\,(8{,}18\,t - 0{,}59)].$$

(pe baza acestor ecuații s-a trasat traiectoria punctului O_1(fig. 4)).

e. turația critică :

$$n_{cr} = 291{,}53 \text{ rot/min.}$$

d. pulsația proprie din încovoiere :

$$\nu_p = 53{,}33 \text{ s}^{-1}.$$

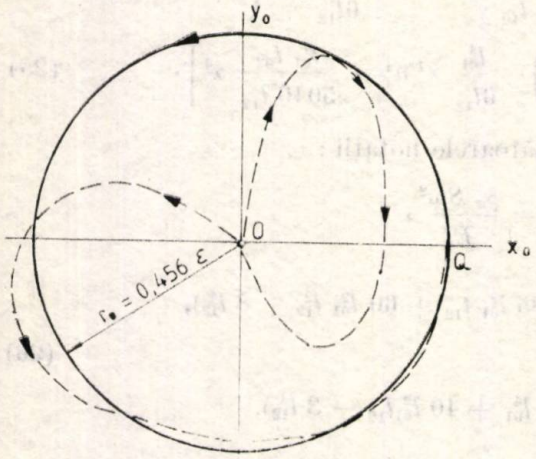


Fig. 4. — Traiectoria capătului liber al arborelui montat în consolă.

CONCLUZII

Metodologia de determinare a traiectoriei capătului liber al arborelui dispozitivului de amestecare montat în consolă, prin considerarea și a încărcării hidrodinamice, datorate contactului dintre amestecător și mediu, permite stabilirea unor parametri esențiali în proiectarea dispozitivelor de amestecare: turația critică și pulsația proprie.

NOTAȚII

a	— parametru relația (26),	[m]
b	— parametru relația (26),	[m]
$C_{1,2,3,4}$	— constante,	[m]
C_E, C_R	— constante de proporționalitate,	—
D	— parametru relația (26),	[m^6]
d_a	— diametrul arborelui,	[m]
F_e	— forța de inerție,	[N]
F_E	— forța elastică,	[N]
F_H	— forța hidrodinamică,	[N]
$\bar{i}_{1,2,3}$	— versorii axelor de coordonate x, y, z,	—
k	— constanta elastică,	[s^{-1}]
l_{01}, l_{02}, l_{12}	— lungimi (fig. 3),	[m]
m	— parametru relația (10),	[s^{-2}]
M	— masa turbinei,	[kg]
p	— parametru relația (10),	[s^{-1}]
q	— parametru relația (10),	[s^{-1}]
r	— raza traiectoriei,	[m]
S	— aria secțiunii,	[m^2]
t	— timpul,	[s]
V	— viteza instantanee,	[m/s]
x, y, z	— axele de coordonate,	[m]
α	— parametru relația (26),	[m^{-1}]

φ	— defazajul,	[rad.]
ε	— excentricitatea centrului de masă,	[m]
Γ	— circulație,	[$m^2 s^{-1}$]
$\nu_{1,2}$	— viteze unghiulare,	[s^{-1}]
ω	— pulsația,	[s^{-1}]
ρ	— densitatea fluxului,	[kg/m^3]
$\tau_{1,2}$	— factori de amortizare,	[s^{-1}]

Primit la redacție la 25 martie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. GH. D. PASAT, *Optimizarea dispozitivelor de amestecare ale reactoarelor chimice și biochimice de gabarit mare*, Teză de doctorat, IPB, 1986.
2. E. CARAFOLI, V. N. CONSTANTINESCU, *Dinamica fluidelor incompresibile*, Editura Academiei R.S. România, 1982.
3. A. PANTAZOPOL, *Bioreactor de regim 300 m^3*, Proiect de diplomă, I.P.B., 1985.
4. A. BURGER, *Schwingungsverhalten schnellaufender Rührwerke*, Teză de doctorat, T. U. München, 1969.
5. S. ADLHOCH, *Konstruction überkritisch laufender Rührwerke mit Abdichtung*, Teză de doctorat, T. U. München, 1975.

VIBRAȚIILE PLĂCILOR SUBȚIRI SUB ACȚIUNEA UNOR CIOCNIRI TRANSVERSALE

de M. MUNTEANU

Institutul Politehnic, București

În lucrare se studiază vibrațiile plăcilor sub acțiunea șocurilor transversale, în ipoteza că durata ciocnirii este mai mică decît un sfert din perioada vibrației. Este dezvoltată o metodă de determinare a percuției între placă și corpul rigid care ciocnește folosind modelul unei mase echivalente suspendate, concentrată în punctul ciocnirii. Se arată că funcție de raportul dintre masa redusă a plăcii și masa corpului rigid care ciocnește precum și de coeficientul de restituire, poate avea loc o ciocnire singulară sau o ciocnire principală urmată de o ciocnire secundară care are loc în prima semiperioadă a vibrației. Se determină domeniul de existență pentru cele două situații posibile și se calculează percuția corespunzătoare ciocnirii secundare. Cu ajutorul percuțiilor astfel determinate, se stabilesc expresiile deformațiilor plăcilor dreptunghiulare pentru orice condiții la limită. Rezultatele sînt particularizate pentru placa dreptunghiulară simplu rezemată ciocnită centric.

1. INTRODUCERE

Problema vibrațiilor tranzitorii ale unei plăci supusă ciocnirilor a fost relativ puțin studiată sub toate aspectele datorită și diferitelor moduri posibile de ciocnire cu aspecte calitativ diferite. Astfel, ciocnirea transversală a plăcii cu un corp rigid generează numai vibrații transversale dacă efectele locale sînt neglijabile. Dacă în punctul ciocnirii deformația plastică este mare, sînt generate atît vibrații transversale, cît și vibrații longitudinale [1]. Natura ciocnirii depinde în esență de raportul maselor, raportul dintre raza corpului care ciocnește și grosimea plăcii precum și de mărimea impulsului comparativ cu dimensiunile plăcii [1].

În lucrare se studiază vibrațiile unei plăci supusă unei ciocniri naturale ($0 < k < 1$), normală la suprafață într-un punct oarecare M. Coeficientul de restituire după direcția normală k se consideră cunoscut sau poate fi determinat după una din metodele prezentate în lucrarea [1]. Se consideră îndeplinită condiția că durata ciocnirii este mai mică decît un sfert din perioada vibrației plăcii după ciocnire [1]. În acest caz, deformația plăcii în timpul ciocnirii poate fi neglijată, deci studiul ciocnirii propriu-zise și cel al deformației plăcii pot fi făcute independent unul de altul, iar efectele locale sînt neglijabile. Integrarea ecuației diferențiale a vibrațiilor presupune cunoașterea percuției sau vitezei imprimate plăcii după ciocnire funcție de impulsul corpului care ciocnește. Aceste mărimi se determină cu aproximație folosind modelul unei mase echivalente suspendate concentrată în punctul ciocnirii. Studiul ciocnirii relevă posibilitatea unei ciocniri secundare în prima semiperioadă a vibrației, fenomen pus în evidență prin cercetări experimentale. În final se obțin expresiile vibrațiilor tranzitorii pentru plăci dreptunghiulare cu orice condiții pe contur.

Problema tratată prezintă de asemenea interes practic. Spre exemplu, stratul de oxizi de fier și metale neferoase ce se depun pe cilindrii

unor recuperatoare de căldură este îndepărtat prin ciocniri repetate. Proiectarea unui dispozitiv în acest scop presupune calculul vibrațiilor și tensiunilor din cilindru. Calculul la oboseală a plăcilor din utilaje supuse la ciocniri repetate presupune de asemenea un astfel de studiu.

2. STUDIUL CIOCNIRII

În ipoteza considerată, ciocnirea poate fi considerată ca un caz limită a unui fenomen de interacțiune cu variație continuă a vitezelor. Rezultă că forța percutantă poate fi exprimată astfel [5];

$$\bar{F} = \bar{P} f(\lambda, t), \tag{1}$$

unde $\bar{P}$ este vectorul percuție constant, iar $f(t,\lambda)$ este o funcție scalară ce satisface condițiile necesare astfel încît

$$\lim_{\lambda \to 0} f(\lambda, t) = \delta(t), \tag{2}$$

λ fiind un parametru, iar δ-distribuția lui Dirac.

Pentru a determina percuția se consideră că placa este ciocnită de un solid rigid, cu impulsul înainte de ciocnire mv. Placa este asimilată cu un rigid suspendat cu m_e — masa echivalentă în punctul ciocnirii M. Se notează cu v' și v_1' vitezele după ciocnire ale corpului și respectiv plăcii în punctul M. Pentru cazul în care v și v' au același sens, din relațiile de conservare a impulsului și de definiție a coeficientului de restituire normal k, se obține

$$v' = \frac{1 - \dfrac{m_e}{m} k}{1 + \dfrac{m_e}{m}} v; \qquad v_1' = \frac{1 + k}{1 + \dfrac{m_e}{m}} v \tag{3}$$

cu inegalitatea

$$m > m_e k \tag{4}$$

ce rezultă din relația $v,\ v' > 0$.

Deoarece prin definiție percuția este

$$P = m(v - v') = m_e v_1', \tag{5}$$

ținînd seama de (3), se obține

$$P = \frac{m_e m(1 + k)}{m_e + m} v, \tag{6}$$

unde masa echivalentă m_e urmează să fie determinată funcție de configurația plăcii, condițiile la limită și ipoteza de deformabilitate.

Considerînd placa plană, se alege sistemul de referință fix $xOyw$ astfel încît planul xOy coincide cu suprafața medie nedeformată a plăcii. Ecuația mișcării suprafeței medii după ciocnire poate fi considerată de forma

$$w(x, y, t) = Z(x, y)\, \varphi(t), \tag{7}$$

unde, într-o primă aproximație se poate considera că forma suprafeței medii este cea a primului mod propriu de vibrație.

Deformația plăcii în punctul ciocnirii $M(x_M, y_M)$ este

$$w_M = Z(x_M, y_M)\,\varphi(t) = Z_M\,\varphi(t) \tag{8}$$

Ținînd seama de (8), vitezele în momentul ciocnirii sînt

$$\dot{w}_0 = \dot{w}(x,\ y,\ 0) = Z(x,\ y)\,\dot{\varphi}(0). \tag{9}$$

Conform teoremei lui Carnot, pierderea de energie în timpul ciocnirii egală cu energia vitezelor pierdute este

$$\Delta E = \frac{m}{2}(v - v')^2 + \frac{1}{2}\iint \gamma\,\dot{w}_0^2\,dx\,dy = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv'^2}{2} - \frac{1}{2}\iint \gamma\dot{w}_0^2\,dx\,dy, \tag{10}$$

unde $\gamma = \gamma(x,\ y)$ este masa unității de suprafață.

Din relația (10) rezultă

$$mv'(v - v') + \iint \gamma\,\dot{w}_0^2\,dx\,dy = 0. \tag{11}$$

Deoarece $v_1' = \dot{w}_{0M}$, din (8) și (9) se obține

$$\dot{w}_0 = \frac{Z(x,\ y)}{Z(x_M,\ y_M)}\,v_1'. \tag{12}$$

Înlocuind (12) în (11) și ținînd seama de relațiile (3) se obține

$$v_1'^2 - v_1'\,v\mu(1 + 2k) + v^2\mu\,k(1 + k) = 0, \tag{13}$$

unde s-a notat

$$\mu = \frac{m}{m + m_M}, \tag{14}$$

$$m_M = \iint \gamma\,\frac{z(x,\ y)}{Z_M}\,dx\,dy. \tag{15}$$

Mărimea m_M are semnificația unei mase reduse a plăcii la punctul M, masa plăcii fiind $m_p = \iint \gamma\,dx\,dy$.

Din ecuația (13) se obține

$$v_1' = \varepsilon v, \tag{16}$$

unde s-a notat

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left[(1 + 2k)\,\mu + \sqrt{(1 + 2k)^2\,\mu^2 - 4k\,\mu(1 + k)}\right]. \tag{17}$$

Introducînd (16) în a doua ecuație (3), se obține

$$m_e = m\left(\frac{1 + k}{\varepsilon} - 1\right). \tag{18}$$

Condiția ca masa m_e să fie pozitivă adică $\frac{1+k}{\varepsilon} - 1 > 0$, conduce la $\mu < 1$, condiție îndeplinită întotdeauna. Soluția ecuației (13) cu semnul minus în fața radicalului nu are semnificație fizică deoarece condiția precedentă nu este îndeplinită.

Utilizînd (18), expresia (6) devine

$$P = \alpha\, mv, \tag{19}$$

unde

$$\alpha = 1 + k - \varepsilon. \tag{20}$$

Se analizează două situații posibile.

1. *Vitezele v' și v_1' au același sens.* În acest caz, după prima ciocnire se mai produce o ciocnire secundară în prima semiperioadă a vibrației plăcii.

Ținînd seama de (18), inegalitatea (4) devine

$$\varepsilon > 1. \tag{21}$$

Analiza inegalității (21) utilizînd relația (17), conduce la sistemele de inegalități simultane,

$$\frac{m_M}{m} \leqslant \frac{1}{4k(1+k)}; \quad \frac{m_M}{m} < k - \frac{1}{2} \tag{22}$$

și

$$\frac{m_M}{m} \leqslant \frac{1}{4k(1+k)}; \quad \frac{m_M}{m} < k(1-k); \quad \frac{m_M}{m} > k - \frac{1}{2} \tag{23}$$

ce definesc domeniul de existență a mulțimii valorilor m_M/m și k reprezentat în figura 1.

2. *Vitezele v' și v_1' au sensuri diferite.* În acest caz nu se mai produce o ciocnire secundară, presupunînd ciocnirea controlată.

Expresiile în modul ale vitezelor după ciocnire sînt

$$v' = \frac{\frac{m_e}{m}k - 1}{1 + \frac{m_e}{m}}\, v; \qquad v_1' = \frac{1+k}{1+\frac{m_e}{m}}\, v, \tag{24}$$

iar relațiile (16) — (20) se păstrează.

Relația de condiție $m < m_e k$, respectiv $\varepsilon < 1$, conduce la sistemul de inegalități

$$\frac{m_M}{m} \leqslant \frac{1}{4k(1+k)}; \quad \frac{m_M}{m} > k(1-k), \quad \frac{m_M}{m} > k - \frac{1}{2} \tag{25}$$

ce delimitează domeniul reprezentat în figura 1.

Studiul vibrațiilor în primul caz presupune determinarea percuției P' corespunzătoare ciocnirii secundare,

$$P' = m(v' - v''), \tag{26}$$

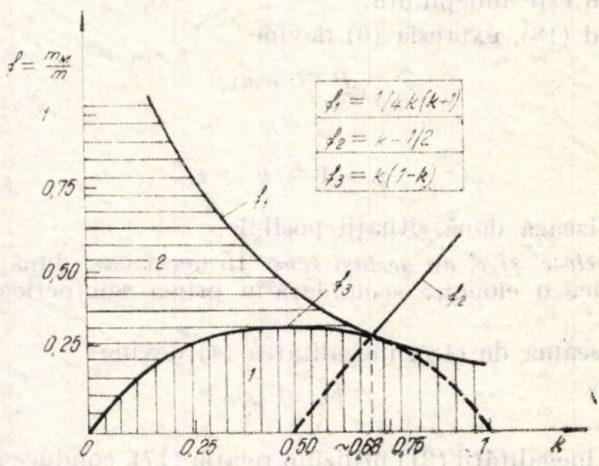


Fig. 1

unde v'' este viteza după ciocnirea secundară a corpului care ciocnește, dată de relația

$$v'' = v' - \frac{(v' - v'^*)(1+k)}{1 + \frac{m_e}{m}}. \tag{27}$$

Viteza punctului M a plăcii înainte de ciocnirea secundară poate fi pusă sub forma

$$v_1'^* = v\,\psi(x_M, y_M, t^*), \tag{28}$$

unde t este momentul ciocnirii secundare, iar $\psi(x_M, y_M, t^*)$ se determină funcție de caracteristicile vibrației după prima ciocnire.

Ținînd seama de (3), (18) și (28) se obține

$$P' = \alpha' mv, \tag{29}$$

unde

$$\alpha' = \alpha\left[\frac{\varepsilon - \alpha k}{1+k} - \psi(x_M, y_M, t^*)\right]. \tag{30}$$

3. VIBRAȚIILE PLĂCILOR OMOGENE DREPTUNGHIULARE

Ecuația diferențială a vibrațiilor plăcii dreptunghiulare este [2]:

$$c^2 \nabla^4 w + \ddot{w} = \frac{q(x, y, t)}{\rho h}, \tag{31}$$

unde

$$c^2 = \frac{Eh^2}{12\,\rho(1-\nu^2)}\,; \qquad \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

h — grosimea plăcii ; ρ — masa unității de volum ; q — sarcina distribuită pe placă.

Soluția ecuației diferențiale (31) pentru o placă de dimensiuni a și b este [2]

$$w(x, y, t) = \sum_{nm}^{\infty} W_{nm}(x, y) \int_0^a \int_0^b W_{nm}(u, v)\,du\,dv \left[f(u, v)\,\cos\omega_{nm}\,t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\omega_{nm}}\,g(u, v)\,\sin\omega_{nm}\,t \right] + \frac{1}{\rho h} \sum_{nm}^{\infty} W_{nm}(x, y) \int_0^a \int_0^b W_{nm}(u, v)\,du\,dv \times$$

$$\times \int_0^t q(u, v, \tau)\,\frac{\sin\omega_{nm}(t-\tau)}{\omega_{nm}}\,d\tau, \tag{32}$$

unde $f(x, y) = w(x, y, 0)$ și $g(x, y) = \dot{w}(x, y, 0)$ reprezintă condițiile inițiale.

Pentru cazul cînd are loc o singură ciocnire

$$q(x, y, t) = P\delta(x - x_M)\,\delta(y - y_M)\,\delta(t), \tag{33}$$

$$f(x, y) = 0\,; \qquad g(x, y) = 0. \tag{33'}$$

Introducînd relația (33) în (31) se obține o ecuație diferențială în care membrul doi este o distribuție deci și soluția va fi o distribuție. Utilizînd în locul distribuțiilor funcții reprezentative sau șiruri reprezentative, soluția poate fi obținută în termenii unor funcții. După efectuarea calculelor, soluția (31) devine [2]

$$w(x, y, t) = \frac{\alpha m v}{\rho h} \sum_{n,m}^{\infty} \frac{W_{nm}(x, y)\,W_{nm}(x_M, y_M)}{\omega_{nm}}\,\sin\omega_{nm}\,t, \tag{34}$$

unde W_{nm} $(n, m = 1, 2, \ldots)$ sînt funcții proprii ortogonale normate ce satisfac ecuațiile

$$\nabla^4 W_{nm} - \lambda_{nm}^4\,W_{nm} = 0\,; \qquad \lambda_{nm}^4 = \frac{\omega_{nm}^2}{c^2} \tag{35}$$

și se determină funcție de condițiile la limită.

Relația (34) exprimă vibrațiile plăcii pentru cazul cînd are loc o singură ciocnire.

Pentru determinarea vibrațiilor după ciocnirea secundară, cînd aceasta are loc, se integrează ecuația (31) în care se introduce relația (33) cu percuția dată de relația (29) și condiții inițiale ce se determină după cum urmează. Considerînd viteza v' după prima ciocnire constantă

pînă la ciocnirea secundară, momentul t^* al acestei ciocniri este dat de prima soluție a ecuației transcendente,

$$v't = \frac{\alpha mv}{\rho h} \sum_{nm}^{\infty} \frac{W_{nm}(x_M, y_M)}{\omega_{nm}} \sin \omega_{nm} t. \tag{36}$$

O valoare aproximativă a momentului t^* este dată de prima soluție a ecuației adimensionale,

$$\tau = \frac{m}{\rho h} \frac{\alpha(1+k)}{\varepsilon - \alpha k} W_{11}^2(x_M, y_M) \sin \tau; \quad \tau = \omega_{11} t, \tag{37}$$

unde s-a luat în considerație numai primul mod propriu și relațiile (3) (18) și (19).

Condițiile inițiale reprezintă funcțiile deplasării și vitezei în momentul t^* înaintea ciocnirii secundare. Pe baza relației (34) se obține

$$f(x, y) = w(x, y, t^*) = \frac{\alpha mv}{\rho h} \sum_{nm}^{\infty} \frac{W_{nm}(x, y)\, W_{nm}(x_M, y_M)}{\omega_{nm}} \sin \omega_{nm} t^*,$$

$$g(x, y) = \dot{w}(x, y, t^*) = \alpha\, mv \sum_{nm}^{\infty} W_{nm}(x, y)\, W_{nm}(x_M, y_M) \cos \omega_{nm} t^*. \tag{38}$$

Funcția ψ din relația (28) este

$$\psi(x_M, y_M, t^*) = \frac{\alpha mv}{\rho h} \sum_{nm}^{\infty} W_{nm}^2(x_M, y_M) \cos \omega_{nm} t^*. \tag{39}$$

Introducînd (33) și (38) în (32) se obține relația ce exprimă vibrațiile plăcii după ciocnirea secundară

$$w(x, y, t) =$$

$$= \frac{\alpha mv}{\rho h} \sum_{nm}^{\infty} W_{nm}(x, y) \int_0^a \int_0^b W_{nm}(u, v) \left[\left(\sum_{rp}^{\infty} \frac{W_{rp}(x, y) W_{rp}(x_M, y_M)}{\omega_{rp}} \sin \omega_{rp} t^* \times \right.\right.$$

$$\times \cos \omega_{nm} t + \left(\sum_{rp}^{\infty} \frac{W_{rp}(x, y)\, W_{rp}(x_M, y_M)}{\omega_{rp}} \cos \omega_{rp} t^* \right) \left. \sin \omega_{nm} t \right] du\, dv +$$

$$+ \frac{\alpha' mv}{\rho h} \sum_{nm}^{\infty} \frac{W_{nm}(x, y)\, W_{nm}(x_M, y_M)}{\omega_{nm}} \sin \omega_{nm} t. \tag{40}$$

4. APLICAȚIE

Placă dreptunghiulară simplu rezemată ciocnită centric.

Funcțiile proprii normate și valorile proprii sînt

$$W_{nm}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y; \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a}; \quad \beta_m = \frac{\pi m}{b} \tag{41}$$

$$\omega_{nm}^2 = (\alpha_n^2 + \beta_m^2) \frac{Eh^2}{12\rho(1 - \nu^2)}. \tag{42}$$

Placa este ciocnită în centrul de masă ($M(x_M = a/2, y_M = b/2)$.
Utilizînd primul termen al dezvoltării în serie de funcții proprii, din relația (15) se obține

$$m_M = \int_0^a \int_0^b \gamma \frac{W_{11}(x, y)}{W_{11}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)} \, dx \, dy = \frac{m_p}{4}. \tag{43}$$

Factorul α' definit prin relațiile (30) și (39) devine

$$\alpha' = \alpha \left[\frac{\varepsilon - \alpha k}{1 + k} - \frac{2\alpha m}{\rho h \, ab} \sum_{nm}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi n}{2} \sin^2 \frac{\pi m}{2} \cos \omega_{nm} t^* \right]. \tag{44}$$

Expresiile (34) și (40) iau forma

$$w(x, y, t) =$$

$$= \frac{4\alpha \, mabv}{\pi^2 h^2} \sqrt{\frac{12(1 - \nu^2)}{E\rho}} \sum_{nm}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{a} x \sin \frac{\pi m}{b} y \sin \frac{\pi n}{2} \sin \frac{\pi m}{2}}{n^2 a^2 + m^2 b^2} \sin \omega_{nm} t \tag{45}$$

și respectiv

$$w(x, y, t) = \frac{16\alpha \, mabv}{\pi^2 h^2} \sqrt{\frac{12(1 - \nu^2)}{E\rho}} \sum_{nm}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{a} x \sin \frac{\pi m}{b} y}{n^2 a^2 + m^2 b^2} \left[\left(\sum_{r,p}^{\infty} A_{rp} \sin \omega_{rp} t^* \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \cos \omega_{nm} t + \left(\sum_{rp}^{\infty} A_{rp} \cos \omega_{rp} t \right) \sin \omega_{nm} t \right] \right], \tag{46}$$

unde

$$A_{rp} = \sin \frac{\pi r}{2} \sin \frac{\pi p}{2} (r \sin m\pi \cos r\pi - n \cos n\pi \sin r\pi) \times$$

$$\times \frac{(p \sin m\pi \cos \pi p - m \cos m\pi \sin \pi p)}{(n^2 - r^2)(m^2 - p^2)}$$

5. CONCLUZII

Metoda de studiu propusă este valabilă în principiu pentru orice placă de configurație geometrică dată. Algoritmul de calcul presupune determinarea inițială a funcțiilor proprii după care se calculează cu relația (15) masa redusă a plăcii în punctul ciocnirii. Se stabilește apoi prin inegalitățile (22), (23), (25) sau prin diagrama din figura 1 dacă ciocnirea este singulară sau dacă este urmată de o ciocnire secundară. În primul caz se calculează percuția cu relația (19) și deformațiile cu relația (34). În al doilea caz se calculează în plus percuția ciocnirii secundare cu relația (29), condițiile inițiale (38) (pentru placa dreptunghiulară) funcție de momentul ciocnirii secundare dat de ecuația (36) sau (37), iar deformațiile sînt date de expresia (40).

Cu ajutorul expresiilor deformațiilor se poate calcula starea de tensiune într-un punct oarecare al secțiunii plăcii cu relațiile date și în lucrarea [2].

Primit la redacție la 27 martie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. C. M. HARRIS, C. E. CREDE, *Șocuri și vibrații*, vol. I, Edit. Tehnică, București, 1968.
2. W. NOWACKI, *Dinamica sistemelor elastice*. Edit. Tehnică, București, 1969.
3. S. P. TIMOSHENKO, S. WOINOWSKI-KRIEGER, *Teoria plăcilor plane și curbe*. Edit. Tehnică, București, 1968.
4. W. KECS, P. P. TEODORESCU, *Aplicații ale teoriei distribuțiilor în mecanică*, Edit. Academiei, București, 1970.
5. E. TOCAGI, *Fenomene discontinue în mecanica și rezistența materialelor*. Edit. Tehnică, București, 1974.

APLICAȚII LA CALCULUL PRELIMINAR AL SUPAPELOR DE PRESIUNE ÎN REGIM VÎSCOS

I. SPULBER
Institutul Politehnic, București

C. SPULBER
Întreprinderea Optică Română, București

Cercetările întreprinse de autori pînă în prezent în domeniul dinamicii supapelor de presiune în regim viscos, au evidențiat direcțiile în care se manifestă mai pregnant influențele acestuia.
În lucrarea de față este indicată metodologia de calcul preliminar a unor astfel de supape în care se ține seama de contribuția viscozității în interstițiul de curgere dintre piston și scaunul său de așezare. Prin compararea cu metodologiile clasice utilizate, se determină și erorile ce decurg din neluarea în calcul a viscozității lichidului de lucru.

1. GENERALITĂȚI

Prin aplicațiile de mai jos se urmărește exemplificarea metodologiei de proiectare a supapelor de presiune, ținînd seama de influența viscozității. Urmărind o mai ușoară înțelegere, calculele au fost realizate luînd în considerare o supapă cu scaun plat. Aplicațiile sînt utile atît proiectantului, cît și utilizatorului supapei. Proiectantului, deoarece în cadrul conceperii unei anumite instalații hidraulice în care sînt date numai valorile presiunii și debitului trebuie să calculeze (în funcție de performanțele impuse instalației) parametrii constructivi principali ai supapei și tipului acesteia, dinamica sa fiind ulterior îmbunătățită pe baza încercărilor unui model funcțional. Utilizatorului, deoarece fie că urmează să asigure separația unei supape din instalația hidraulică aferentă unei mașini-unelte aflate în revizie, fie că urmează să comande o astfel de supapă (la o întreprindere de profil) trebuie să-i cunoască acesteia caracteristicile constructive funcționale necesare asigurării performanțelor inițiale ale instalației în cauză. În ambele cazuri, metodologia se poate particulariza, după caz, la supapele cu comandă directă sau la pilotul celor cu comandă pilotată.

Pentru exemplificare s-au luat în considerare următoarele valori: domeniul de reglare a presiunilor, $5 \div 100$ bari, domeniul de variație a debitului, $0{,}5 \div 5$ l/s. Lichidul de lucru este ulei hidraulic cu viscozitatea $0{,}6 \cdot 10^{-4}$ m^2/s și densitatea 880 kg/m^3.

2. CONSIDERAȚII FENOMENOLOGICE

După cum s-a subliniat în diferite lucrări [1], [2] de specialitate, neglijarea influenței viscozității lichidului la curgerea printre scaunul și pistonul supapei oferă un profil de viteze al liniilor de curent din această zonă cu atît mai diferit de cel real cu cît interstițiul de curgere este mai mic, căci în acest caz crește raportul dintre forțele de viscozitate și cele de inerție. Or, întrucît tendințele actuale de proiectare a supapelor de presiune pun accentul pe creșterea rigidității arcului ca factor important

în stabilitatea dinamică, cît și pe reducerea debitelor de lucru în condițiile creșterii presiunii, apare evidentă tendința de micșorare a interstițiului. În acest fel însă are loc o micșorare a zonei de curgere ideale a lichidului, astfel că pe ansamblul jetului care trece prin interstițiul scaun-piston, crește ponderea zonei de curgere în care forțele de viscozitate sînt de ordin apropiat celui al forțelor de inerție.

Totodată, între momentul generator de cavitație în supape și zonele de mare viscozitate se constituie o strînsă legătură [3].

S-a subliniat în lucrarea [2], că, sintetic, influența viscozității poate fi integrată în dinamica supapei prin adiționarea la ecuația de mișcare a acesteia a termenului $a\sqrt{x}$, x fiind deplasarea pistonului, iar a un factor dimensional, determinat de particularitățile geometrice și funcționale ale supapei.

3. EXEMPLIFICĂRI METODOLOGICE

a) *Determinarea diametrului nominal* (d). Pentru un debit $Q = Q_{max}$, corespunzător unui interstițiu de curgere prin supapă, diametrul nominal preliminar se poate calcula cu relația din lucrarea [3],

$$d = \sqrt{\frac{4Q}{\pi C_d \sqrt{\frac{0{,}2}{\rho}} \cdot p_{min}}}, \tag{1}$$

p_{min} reprezentînd presiunea maximă reglată, ρ — densitatea lichidului de lucru, iar C_d este un coeficient de curgere.

Adoptînd $Q_{max} = 5$ l/min, $p_{min} = 5$ bar și $C_d = 0{,}7$ se obține: $d = 3{,}8$ mm, luîndu-se ca diametru normalizat $d = 4$ mm.

b) *Calculul limitelor de variație a interstițiului de curgere* (x_r). Pe măsură ce debitul Q crește, pistonul se ridică pînă cînd secțiunea de reglare devine aproximativ egală cu secțiunea nominală, adică

$$\frac{\pi d^2}{4} = \pi d x_{max}. \tag{2}$$

Considerînd $x_{r\,max} = x_{max} + aQ_{max}\sqrt{x_{max}}$, rezultă

$$x_{r\,max} = \frac{d}{4} + \frac{1}{2} aQ_{max}\sqrt{d}. \tag{3}$$

Deschiderea minimă este determinată de debitul Q_{min} care traversează supapa la presiunea p_{max}

$$x_{r\,min} = \frac{Q_{min}}{C_d \pi d \sqrt{\frac{2}{\rho} p_{max}}} + aQ_{min} \sqrt{\frac{Q_{min}}{c_d \pi d \sqrt{\frac{2}{\rho} p_{max}}}}, \tag{4}$$

unde

$$x_{r\,min} = x_{min} + a \cdot Q_{min}\sqrt{x_{min}}. \tag{5}$$

Pentru supapă cu scaun plat, parametrul a se poate calcula cu relația indicată în lucrarea [1],

$$a = \frac{0{,}1\, d\sqrt{\lambda_\nu}}{\sqrt{Q}}. \tag{6}$$

În cazul exemplificat, pentru $Q_{min} = 0{,}5$ l/min se obține $aQ_{min} = 0{,}65$ [mm$^{1/2}$]; iar pentru $Q_{max} = 5$ l/min obținem $aQ_{max} = 0{,}20$ [mm$^{1/2}$].

Așa cum s-a mai arătat, factorul de scară al viscozității este $\lambda_\nu = \nu_a/\nu = 60/45 = 1{,}33$, ν fiind indicat în lucrarea [1] de $45 \cdot 10^{-6}$ m^2/s, iar ν_a viscozitatea lichidului existent, în cazul exemplificat de $0{,}6 \cdot 10^{-4}$ m^2/s (cum s-a considerat la început).

Din calcule simple rezultă imediat $x_{r\,max} = 1{,}2$ mm și $x_{r\,min} = 0{,}056$ mm, deci $x_r = 0{,}056 \ldots 1{,}2$ mm.

În cazul în care nu s-ar lua în considerare stratul limită, s-ar obține un $x_r = x = 0{,}006 \ldots 1$ mm. Se poate constata că stratul limită, duce la creșterea de aproximativ nouă ori a interstițiului minim.

c) *Calculul arcului de reglare a presiunii.* La dimensionarea arcului se are în vedere realizarea limitelor

$$\frac{\pi d^2}{4} p_{min} \cdots \frac{\pi d^2}{4} p_{max},$$

prin neglijarea forțelor de frecare și a greutății arcului precum și a greutății pistonului supapei, se constată ușor că

$$C_f = \frac{d^2(p_{max} - p_{min})}{4(x_{r\,max} - x_{rmin})}, \tag{7}$$

C_f reprezintă constantă de elasticitate a arcului.

Cu valorile stabilite mai înainte, rezultă $C_f = 10{,}43$ daN/mm. Dacă nu ținem seama de viscozitate din calcule va rezulta $C_f = 12$ daN/mm.

d) *Verificarea incipienței cavitației.* Sub o anumită distanță, $x = x_{cav}$, curgerea este neuniformă și se manifestă efectul cavitațional. Deoarece, în general, spectrul de viteze corespunde curgerii laminare, se poate lua, pentru siguranță, $V_{max} = 2V_m$, unde V_m este viteza medie în secțiunea studiată.

Din relația lui Bernoulli scrisă pe linia centrală de curent obținem

$$p = \frac{2\rho Q^2}{\pi d^2}\left(\frac{1}{x_{1cav}^2} - \frac{1}{d^2}\right), \tag{8}$$

unde

$$x_{1\,cav} = x_{cav} - a \cdot Q\sqrt{x_{cav}}. \tag{9}$$

Notînd cu

$$A_j = Qd\sqrt{\frac{\rho}{5pd^4 + 4\rho Q^2}}, \tag{10}$$

se obține

$$x_{cav} = \frac{2A_j + a^2 - a\sqrt{a^2 + 4A_j}}{2}. \tag{11}$$

Este necesar ca $x_{cav} < x_{r\,min}$.

Deoarece x_{rmin} apare la Q_{min} și p_{max}, din (10) se determină $A_j = 0{,}873$ mm și $x_{cav} = 0{,}44$ mm.

Întrucît $x_{cav} \gg x_{r\,min}$, apare cavitație pentru funcționarea supapei în plaja de valori 0,056...0,44 mm.

e) *Determinarea variației frecvenței proprii medii.* Din lucrările [2] și [3] putem scrie

$$\omega_r = k_\omega \cdot \omega, \tag{12}$$

în care ω reprezintă pulsația proprie a pistonului, indicele r indicînd situația luării în considerare a viscozității, iar i situația în care se face abstracție de acesta, k_ω reprezentînd coeficientul de pulsație determinat cu relația indicată în lucrarea [2] și [3],

$$k_\omega = 1{,}41 \sqrt{\frac{x + a\sqrt{x}}{2x + a\sqrt{x}}}. \tag{13}$$

Pentru $x_{rmin} = 0{,}056$ mm, rezultă $k_{\omega min} = 1{,}34$, iar pentru $x_{rmax} = 1{,}2$ mm, rezultă $k_{\omega\,max} = 1{,}05$. Se adoptă $k_{\omega\,med} = 1/2\,(k_{\omega\,min} + k_{\omega\,max}) = 1{,}2$.

Deci frecvența proprie medie reală este mai mare cu 20 % decît cea calculată în situația în care nu se ține seama de viscozitate.

f) *Determinarea variației gradului relativ de amortizare.* Fenomenul fiind invers proporțional cu frecvența proprie, se poate scrie

$$k_{z\,med} = \frac{1}{k_{\omega\,med}} = 0{,}85,$$

deci amortizarea este în medie cu 15 % mai mică decît în situația în care se face abstracție de viscozitate.

4. CONCLUZII

Din exemplele prezentate se poate constata cu ușurință ponderea deosebită a viscozității asupra caracteristicilor constructive și dinamice ale unei supape de presiune, în special în domeniul debitelor mici.

Influența viscozității și cavitației se manifestă preponderent la valori reduse ale interstițiului de curgere prin supapă. Deoarece dimensionarea acesteia din urmă tinde să se facă, totuși, la mărimi reduse ale interstițiului nominal, se impune adoptarea măsurilor canonice de secțiune ale stratului limită.

Primit la redacție la 26 mai 1987

BIBLIOGRAFIE

1. I. MAZILU, V. MARIN, *Sisteme hidraulice automate*, Edit. Academiei, București, 1982.
2. I. SPULBER, C. SPULBER, *L'étude de l'influence de la couche — limite laminaire dans l'écoulement axial-symétrique sur la stabilité des régulateurs de pression*, în: *Proceedings of the second Symposium on Fluid Motion Stability in Hydraulic Systems with Automatic Regulators*, București, oct. 1—3, 1984.
3. C. SPULBER, Teză de doctorat, Institutul Politehnic București, 1985.

STABILIREA PARAMETRILOR DINAMICI AI TRANSPORTOARELOR VIBRATOARE ELICOIDALE

de GH. I. ENE

Institutul Politehnic București

P. BRATU

INCERC, București

Lucrarea urmărește corelarea diferiților parametri constructivi și funcționali ai transportoarelor vibratoare elicoidale, în cazul general în care mișcarea acestora se obține ca o suprapunere a unei mișcări vibratoare după direcția verticală peste o mișcare vibratoare rotativă în planul orizontal.
Sînt prezentate relațiile de calcul necesare proiectării transportoarelor de acest tip.

1. GENERALITĂȚI

Transportoarele vibratoare elicoidale sînt destinate pentru ridicarea sarcinilor individuale (de obicei piese identice de o anumită formă și dimensiune) sau a materialelor vărsate (pulverulente sau granulare). În cazul transportării pieselor de același fel, transportorul vibrator elicoidal poate să realizeze ordonarea și poziționarea lor în vederea alimentării unor mașini-unelte automate, de exemplu, iar în cazul transportării materialelor pulverulente și granulare, prelucrarea tehnologică a acestora (încălzire, uscare, umezire etc.).

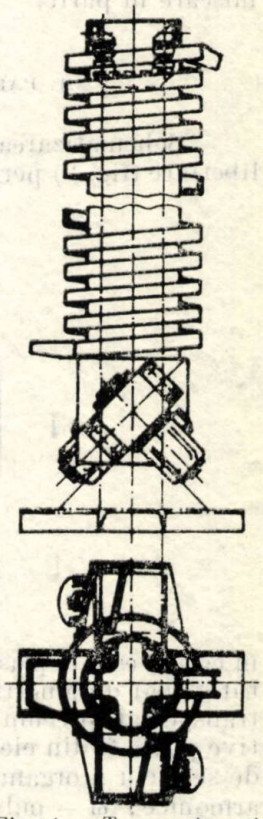


Fig. 1. — Transportor vibrator elicoidal.

Transportorul vibrator elicoidal (fig. 1) este, de regulă, realizat dintr-un tub portant vertical pe exteriorul căruia este fixat jgheabul elicoidal de transport, unghiul de înclinare a spirei jgheabului avînd valori de 2...10°. Mișcarea oscilatorie după o linie elicoidală a transportorului este realizată cu ajutorul unor vibratoare (vibroexcitatoare inerțiale) plasate, de regulă, la partea inferioară a transportorului, iar unghiul de aruncare, corespunzător diametrului mediu al jgeabului este de 40... ...50°. Asemenea transportoare au suspensie liberă, adică sînt așezate sau suspendate utilizînd elemente elastice cu rigiditate relativ redusă.

Înălțimea transportorului depinde de înălțimea la care trebuie ridicat materialul și de stabilitatea utilajului în timpul lucrului. În medie înălțimea de ridicare este de 7—8 m. De obicei raportul dintre înălțimea transportorului și diametrul mediu al jgheabului este $H/D = 7...10$, uneori avînd și valori mai mari. Pentru a asigura stabilitatea transportorului în cazul apariției unor încărcări laterale întîmplătoare, transportoarele cu valori

ST. CERC. MEC. APL., TOM 46, NR. 5, P. 471—477

mari ale raportului H/D sînt sprijinite la partea inferioară pe fundație (prin intermediul unor elemente elastice), iar la partea superioară sînt legate elastic de un suport fix.

2. PARAMETRI DINAMICI FUNCȚIONALI

În vederea corelării parametrilor dinamici funcționali cu cei constructivi și tehnologici este necesară adoptarea unui model capabil să reflecte cît mai fidel rezultatele calculului cu cele reale. La transportoarele vibratoare elicoidale, efectul de avans al materialului pe jgheab are loc ca urmare a generării a două mișcări pulsatorii simultan și anume: una pe verticală, iar cea de-a doua rotativă în plan orizontal.

Cele două mișcări sînt generate ca urmare a existenței unei forțe perturbatoare armonice verticale și a unui cuplu de moment pulsator, ambele fiind defazate în cvadratură. Pentru anumite condiții constructive impuse în alcătuirea utilajului se poate realiza decuplarea celor două mișcări. Astfel, parametrii dinamici vor fi determinați pentru fiecare mișcare în parte.

2.1. PARAMETRI MIȘCĂRII PULSATORII VERTICALE

Schematizarea transportorului ca un sistem cu un singur grad de libertate (fig. 2) permite scrierea ecuației diferențiale de forma

$$\ddot{y} + 2ny + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} \sin \omega t. \qquad (1)$$

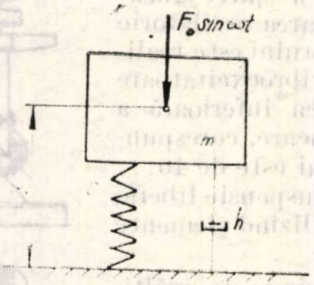


Fig. 2. — Schema dinamică de calcul.

în care y este deplasarea instantanee a organului de lucru; n — coeficientul global de amortizare adoptînd ipoteza disipării vîscoase la materialul transportat, precum și la sistemul elastic care în anumite soluții constructive poate fi din elemente antivibratile de cauciuc; m — masa totală de de serviciu a organului de lucru; F_0 — amplitudinea forței perturbatoare armonice; ω — pulsația forței perturbatoare; ω_0 — pulsația proprie a sistemului este de forma

$\omega_0 = \sqrt{k_y/m}$, unde k_y este coeficientul elastic echivalent al sistemului elastic pe direcția verticală.

Soluția ecuației diferențiale de mișcare pentru cazul vibrațiilor staționare necesare procesului tehnologic este de forma :

$$y = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4\omega^2 n^2}{\omega_0^4}}} \sin(\omega t - \varepsilon) \tag{2}$$

în care se utilizează următoarele notații, astfel :

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{2\omega n}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{2\frac{\omega}{\omega_0}\frac{n}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}, \tag{3}$$

$$y_{st} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \tag{4}$$

$$A = y_{st} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4\omega^2 n^2}{\omega_0^4}}}, \tag{5}$$

$$\mu = \frac{A}{y_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4\omega^2 n^2}{\omega_0^4}}}, \tag{6}$$

unde ε este unghiul de defazaj dintre forța perturbatoare și deplasare; y_{st} — deformația statică echivalentă în cazul în care forța perturbatoare maximă F_0 ar acționa static asupra sistemului elastic pe verticală (expresia lui F_0 se dă la 2.2); μ este factorul de amplificare.

În figura 3 se prezintă variația factorului de amplificare μ în funcție de raportul ω/ω_0 considerată variabilă curentă și parametrul n/ω_0 ce individualizează familia de curbe, iar în figura 4 este redată familia de curbe ce exprimă variația unghiului de defazaj ε.

Pe baza analizei variației parametrilor μ și ε funcție de rapoartele ω/ω_0 și n/ω_0 rezultă că debitul materialului transportat poate fi modificat funcție de regimul dinamic de lucru ca urmare a valorilor amplitudinii. Astfel, din punct de vedere al debitului maxim și deci al amplitudinii maxime, zona cea mai favorabilă de lucru este cea caracterizată de raportul $\omega/\omega_0 = 1$, adică la rezonanță.

Dacă mașina este reglată în *regim de postrezonanță* ($\omega > \omega_0$), în gol va avea amplitudinea corespunzătoare punctului de funcționare A (fig. 3). În cazul funcționării în sarcină (cu material) amortizarea crește, iar factorul de amplificare μ scade, astfel încît punctul de funcționare din A va coborî în B. Ca urmare a adaosului de masă din partea materialului, față de funcționarea în gol, pulsația proprie scade, iar raportul ω/ω_0 crește astfel încît punctul de funcționare ajunge în C, caz în care factorul de amplificare este diminuat.

Se constată că pentru funcționarea în regim de postrezonanță prezența materialului duce la creșterea amortizării sistemului și la scăderea substanțială a amplitudinii, cea ce implică diminuarea debitului.

Din acest motiv se evită funcționarea în postrezonanță a mașinilor de transportat prin vibrații. De asemenea, un alt dezavantaj al utilizării mașinii în acest regim îl constituie faptul că pornirea și oprirea implică trecerea prin rezonanță cu efecte defavorabile asupra durabilității și stabilității sistemului.

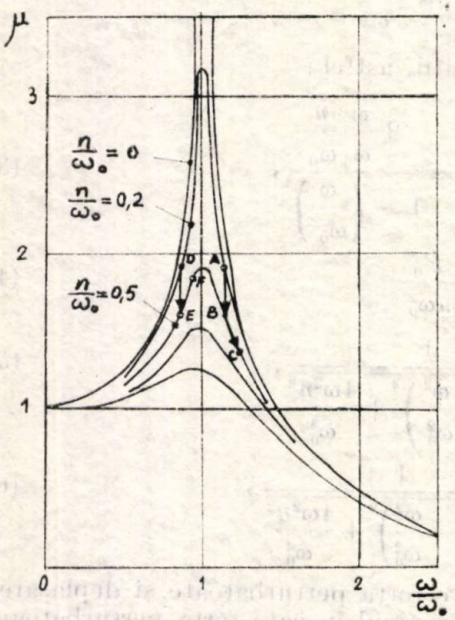


Fig. 3. — Curbele de variație ale factorului de amplificare μ funcție de raportul ω/ω_0.

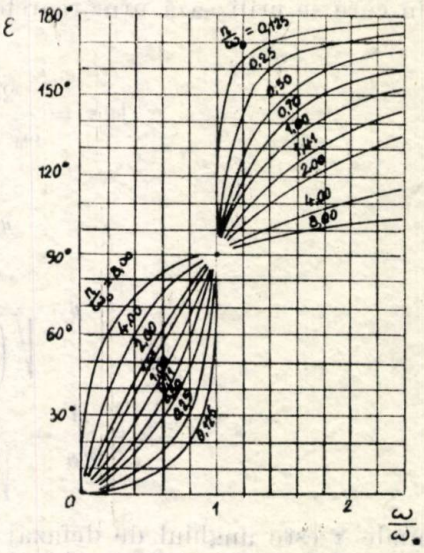


Fig. 4. — Curbele de variație ale unghiului de defazaj ε funcție de raportul ω/ω_0.

Dacă mașina este reglată în *regim de anterezonanță* ($\omega < \omega_0$), în gol va lucra în punctul de funcționare D (fig. 3). În sarcină, ca urmare a prezenței materialului, amortizarea sistemului crește, iar punctul de funcționare va coborî în E. Pulsația proprie ω_0 scade, iar raportul ω/ω_0 crește deci punctul de funcționare va ajunge în F. Rezultă că factorul de amplificare crește și ca urmare va mări amplitudinea care va asigura suplimentarea debitului de material. În acest caz, se constată că regimul de anterezonanță oferă o anumită lățime stabilă de frecvență la funcționarea în sarcină, cu variații nesemnificative ale amplitudinii vibrațiilor.

În vederea proiectării unor mașini de transportat din această categorie, se recomandă reglarea funcționării astfel : $\omega/\omega_0 = 0{,}95$ pentru transportul materialelor constituite din unități individuale (piese de același fel) și $\omega/\omega_0 = 0{,}80...0{,}90$ pentru materiale granulare (în vrac).

2.2. PARAMETRI VIBRAȚIILOR ÎN PLAN ORIZONTAL

În figura 5 sînt date elemente geometrice privind amplasarea vibrogeneratoarelor cu mase excentrice. În general, se utilizează soluția constructivă cu două vibrogeneratoare, avînd fiecare cîte o masă excentrică (în construcția monobloc cu motor electric sau hidraulic).

Axele vibrogeneratoarelor sînt dispuse înclinat cu unghiul γ față de planul orizontal (fig. 5). Masele excentrice se rotesc în sens invers realizînd o mișcare oscilatorie după o elice dreaptă.

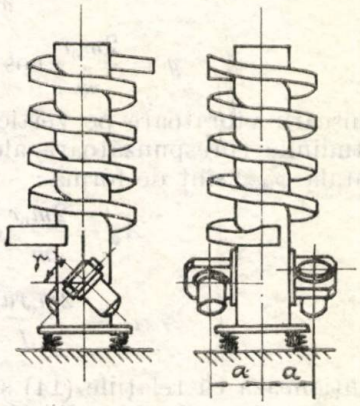


Fig. 5. — Soluția constructivă a mașinii.

Componentele orizontale ale forțelor centrifuge de inerție ale maselor excentrice, paralele cu dreapta care unește centrele de rotație ale acestora se echilibrează reciproc, iar cele normale la această dreaptă se descompun după direcțiile orizontală și verticală.

Suma componentelor verticale este de forma:

$$F_{0y} = 2m_0 r\omega^2 \cos\gamma \sin\omega t = F_0 \sin\omega t \tag{7}$$

unde m_0 este masa elementului excentric de dezechilibrare; r — excentricitatea; ω — viteza unghiulară aceeași cu pulsația vibrațiilor de lucru.

Componentele orizontale ale forțelor centrifuge de inerție generează un cuplu perturbator, în plan orizontal, avînd momentul echivalent de forma

$$M_{0y} = 2\, m_0 r\, \omega^2 a \sin\gamma \sin\omega t = M_0 \sin\omega t, \tag{8}$$

în care $2a$ este distanța dintre axele vibratoarelor (fig. 5).

Ecuația diferențială a mișcării oscilatorii în plan orizontal este

$$J\ddot{\varphi} = M_{0y}, \tag{9}$$

unde J este momentul de inerție al mașinii în sarcină (cu material) față de axa verticală de simetrie; φ — deplasarea unghiulară în plan orizontal.

Astfel, se obține

$$\varphi = \frac{2m_0 ra}{J} \sin\gamma \sin\omega t. \tag{10}$$

Deplasarea x în plan orizontal a unui punct situat pe raza R a jgheabului elicoidal este de forma:

$$x = R\varphi = \frac{2m_0 raR}{J} \sin\gamma \sin\omega t \tag{11}$$

Unghiul de aruncare β corespunzător razei R a jgheabului elicoidal este dat de

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{y}{x}, \tag{12}$$

în care

$$y = \frac{2m_0 r}{m} \cos\gamma \sin\omega t \tag{13}$$

este legea mișcării vibratoare pe verticală.

Amplitudinile corespunzătoare ale mișcării după direcția verticală A_y și orizontală φ_{max} sînt de forma:

$$A_y = \frac{2m_0 r}{m} \cos\gamma, \tag{14}$$

$$\varphi_{max} = \frac{2m_0 raR}{J} \sin\gamma. \tag{15}$$

Se menționează că relațiile (14) și (15) sînt utilizate pentru proiectarea transportoarelor vibrante elicoidale acționate cu vibrogeneratoare *inerțiale* care asigură o funcționare stabilă în regim de postrezonanță. Dacă raportul $\omega/\omega_0 = 2...3$, atunci influența amortizării și elementelor elastice este neglijabilă numai pentru regimul vibrațiilor forțate staționare. Se remarcă faptul că în acest regim amplitudinile tind asimptotic către valori stabile dictate de parametri constructivi ai vibrogeneratoarelor (m_0, r, a, J, R, m) ca în figurile 6 și 7.

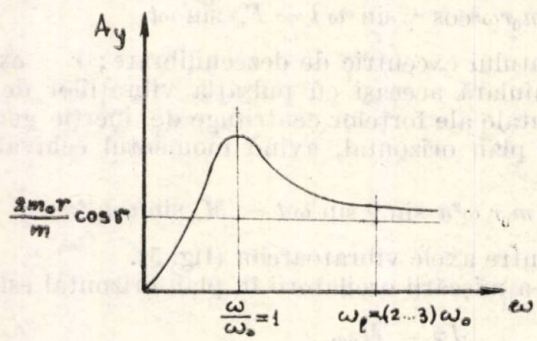


Fig. 6. — Variația amplitudinii A_y a vibrațiilor verticale funcție de pulsația ω.

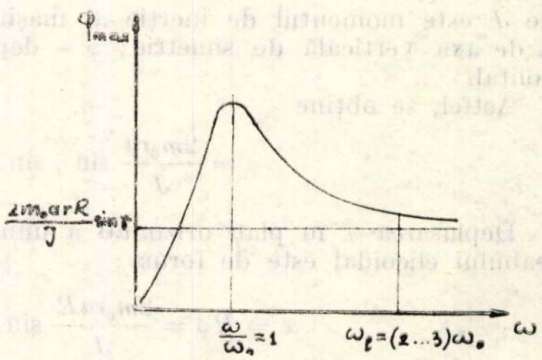


Fig. 7. — Variația amplitudinii unghiulare φ_{max} în plan orizontal funcție de pulsația ω.

Folosind relaţiile (11), (12) şi (13) avem

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{J}{mRa}\operatorname{ctg}\gamma, \tag{16}$$

care realizează corelaţia principalilor parametri constructivi ai maşinii.

De asemenea, în vederea stabilirii valorii amplitudinii pe verticală, corelată cu pulsaţia ω şi coeficientul de aruncare C, se recomandă relaţia :

$$A_y = \frac{Cg}{\omega^2}\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}, \tag{17}$$

în care C se alege între valorile 1,6...3,0 pentru realizarea transportului.

Unghiurile α de înclinare a spirei jgheabului faţă de planul orizontal şi β de aruncare, se aleg astfel : $\alpha \in (2^\circ...10^\circ)$ şi $\beta \in (40^\circ...50^\circ)$.

3. CONCLUZII

În vederea calculului şi proiectării transportoarelor vibrante elicoidale cu vibratoare inerţiale se propune utilizarea relaţiilor şi ipotezelor formulate în capitolul 2.2.

Pentru utilizarea unor vibratoare electromagnetice de acţionare a transportului se vor utiliza relaţiile şi explicaţiile din capitolul 2.1.

În vederea decuplării vibraţiilor pe direcţiile verticală şi orizontală este necesară respectarea corelaţiilor date pentru parametrii constructivi şi funcţionali.

Primit la redacţie la 19 martie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. V. A. BAUMAN, I. I. BÎHOVSKI, B. G. GOLDSTEIN, *Vibraţionnîe maşinî v stroitelstve i proizvodstve stroitelnîh materialov*, Spravocinik, Izd. Maşinostroenie, Moskva, 1970.
2. V. A. POVIDOILO, *Rasciot i konstruirovanie vibraţionnîh pitatelei*, Izd. Maşghiz, Moskva, Kiev, 1962.
3. A. N. RABINOVICI, V. A. IAHIMOVICI, B. IU. BOICIKO, *Avtomaticeskie zagruzocinîe ustroistva vibraţionogo tipa*, Izd. Tehnika, Kiev, 1965.
4. C. STANCIU, *Vibraţii şi dinamica maşinilor*, Note de curs, Institutul de Construcţii, Bucureşti, fascicolele 1 şi 2 (1974, 1975).

NOTĂ ASUPRA UNOR PROBLEME IZOPERIMETRICE ÎN CALCULUL ELICEI DE RANDAMENT MAXIM

de ADELINA GEORGESCU
INCREST, București

Mai jos semnalăm o eroare sistematică întîlnită în lucrările [5] —[8] privind radamentul maxim al elicei, lucrări bazate pe teoria dezvoltată în [4].

Curgerea unui fluid în jurul unei elice, dată fiind complexitatea sa, este studiată pe baza unor modelări fizice simplificatoare i.e. modelul discului activ, modelul elementului de pală și modelul cu vîrtejuri (linie și suprafață portantă). Aceasta permite scrierea relativ ușoară a principiilor de bilanț ale masei, impulsului și momentului cinetic. Fluidul fiind în majoritatea cazurilor considerat incompresibil aceste principii sînt suficiente să determine mărimile globale (e.g. energia, tracțiunea (împingerea), randamentul) de prim interes în calculul elicei. O prezentare a teoriei elicei este dată în [3] în care, printre altele, se arată în ce mod prezența dîrei turbulente din avalul elicei este luată în considerație cu ajutorul a două viteze induse adimensionale a și a' care sînt funcție de distanța r dintre secțiunea ce conține elementul de pală și axa elicei. Dacă — V_∞ este viteza de înaintare a elicei, iar Ω — viteza unghiulară a sa, notînd cu R raza palei, atunci energia curentului la distanța r de axa elicei va fi, abstracție făcînd de un factor,

$$\mathcal{F}(a) = \int_0^{\frac{\Omega^2 R^2}{V_\infty^2}} (1 + a)\,(ya' - a)\mathrm{d}y, \tag{1}$$

iar tracțiunea se va scrie, abstracție făcînd de același factor multiplicativ,

$$\mathcal{T}(a) = \int_0^{\frac{\Omega^2 R^2}{V_\infty^2}} a\,(1 + a)\ \mathrm{d}y, \tag{2}$$

în care $y = \dfrac{r^2\Omega^2}{V_\infty^2}$, iar a' este funcție de y și a. Legătura dintre a și a' este

$$a(a + 1) = y(1 - a')a'. \tag{3}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 46, NR. 5, P. 478—482

Evident, $a,\ a' : \left[0, \frac{\Omega^2 R^2}{V_\infty^2}\right] \to \mathbb{R}$. Randamentul η_{ri} datorat vitezelor induse a și a' la distanța r este

$$\eta_{ri} = \frac{1 - a'}{1 + a}, \tag{4}$$

iar randamentul (total) $\eta = \mathcal{T}(a)/\mathcal{F}(a)$. Dacă la principiile mai sus menționate s-ar adăuga condițiile la limită (condițiile inițiale nefiind necesare, mișcarea fluidului fiind presupusă staționară), atunci, teoretic ar fi cu putință determinarea cîmpului vitezelor și presiunilor care caracterizează mișcarea fluidului în jurul elicei și, prin aceasta, s-ar găsi și mărimile globale menționate. Cum principiile de bilanț în modelele specificate nu se aplică în mod general fiecărui domeniu material de fluid, metodele bazate pe aceste modele lasă nedeterminate vitezele induse a și a' astfel că sînt necesare alte cerințe care să facă posibil calculul lui a și a'. Dintre aceste cerințe una dintre cele mai importante este aceea a randamentului maxim η_i cu restricția ca tracțiunea să fie dată. Cu alte cuvinte, a și a' vor fi determinate din problema ca energia $\mathcal{F}(a)$ să fie minimă, iar tracțiunea $\mathcal{T}(a)$ dată. În acest fel a este o extremală a problemei izoperimetrice : *să se determine funcția* $a : \left[0, \frac{\Omega^2 R^2}{V_\infty^2}\right] \to \mathbb{R}_+$, *cu derivată continuă pe* $\left[0, \frac{\Omega^2 R^2}{V_\infty^2}\right]$ *care minimizează* $\mathcal{F}(a)$ *și pentru care* $\mathcal{T}(a)$ *are o valoare dată*. Această problemă este de tipul : să se găsească funcția reală f definită pe $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ care minimizează funcționala $\mathcal{F}(f) = \int_\alpha^\beta F(x, f(x))\ \mathrm{d}x$ (în clasa funcțiilor $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, continuu diferențiabile pe $[\alpha, \beta]$, avînd aceleași valori $f_\alpha = f(\alpha)$ și $f_\beta = f(\beta)$) și este supusă constrîngerii $\mathcal{G}(f) = \int_\alpha^\beta G(x, f(x))\ \mathrm{d}x = \Gamma_1 = \text{dat}$. O condiție necesară ca funcția f să fie un astfel de punct de minim cu legături este ca ea să satisfacă ecuația

$$\frac{\partial(F - KG)}{\partial f} = 0. \tag{5}$$

Constanta K, numită multiplicatorul lui Lagrange, se determină înlocuind soluția $f(x, K)$ a lui (5) în restricția $G(f) = \Gamma_1$. Formal, ecuația (5) se deduce din ecuația Euler din teoria clasică a calculului variațional,

$$\frac{\partial(F - KG)}{\partial f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial(F - KG)}{\partial f'} = 0 \tag{6}$$

pentru cazul particular cînd $F - KG$ (care în general depinde de x, $f(x)$ și $f' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$) nu depinde de $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$. Să schițăm demonstrația lui (5)

notînd în prealabil $H \equiv F - KG$ și observînd că funcția H care depinde de x și $f(x)$ poate fi considerată ca funcție de două variabile reale. Astfel, dacă $\bar{f}(x)$ și $f(x)$ ($\leqslant \bar{f}(x)$) sînt două funcții reale cu derivate continue pe $[\alpha, \beta]$, iar $H(x, f(x))$ este derivabilă în raport cu f, atunci există funcția $\tilde{f}(x)$ cu $f(x) < \tilde{f}(x) < \bar{f}(x)$ cu proprietatea că $H(x, \bar{f}(x)) - H(x, f(x)) = \left.\frac{\partial H}{\partial f}\right|_{f=\tilde{f}} (\bar{f}(x) - f(x))$. Cu acestea, notînd $\mathcal{H} = \mathcal{F} - K\mathcal{G}$, avem

$$\mathcal{H}(\bar{f}) - \mathcal{H}(f) = \int_\alpha^\beta [H(x, \bar{f}(x)) - H(x, f(x))]\, dx = \int_\alpha^\beta \left.\frac{\partial H}{\partial f}\right|_{f=\tilde{f}} (\bar{f}(x) - f(x))\, dx =$$

$$= \int_\alpha^\beta \left.\frac{\partial H}{\partial f}\right|_{f=f} (x, f(x))\, (\bar{f}(x) - f(x))\, dx + \int_\alpha^\beta \left(\left.\frac{\partial H}{\partial f}\right|_{f=\tilde{f}} - \left.\frac{\partial H}{\partial f}\right|_{f=f} \right) (\bar{f}(x) - f(x))\, dx. \tag{7}$$

Presupunînd că H este continuu diferențiabilă în raport cu f, deci $\frac{\partial H}{\partial f}$ este continuă, rezultă că $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta(\varepsilon) > 0$, astfel încît de îndată ce $|\bar{f}(x) - f(x)| < \eta(\varepsilon)$, avem $\left| \frac{\partial H}{\partial f}(x, \bar{f}(x)) - \frac{\partial H}{\partial f}(x, f(x)) \right| < \varepsilon$. Ținînd seama de aceasta, rezultă că ultima integrală din (7) este de un ordin de mărime mai mic decît diferența $\bar{f}(x) - f(x)$ pentru $\bar{f}(x)$ tinzînd la $f(x)$. Cum, în plus, pentru f fixat, penultima integrală din (7) este o funcțională liniară în $\bar{f}(x) - f(x)$ rezultă că acea integrală reprezintă, de fapt, diferențiala întîi Fréchet a funcționalei $\mathcal{H}(f)$ în f notată $\delta\mathcal{H}$ și numită variația întîi a lui $\mathcal{H}$. O condiție necesară de extremum este anularea acestei diferențiale pe extremala f, deci

$$\int_\alpha^\beta \frac{\partial H}{\partial f}(x, f(x))\quad (\bar{f}(x) - f(x))\, dx = 0. \tag{8}$$

Această diferențială fiind o funcție de $\bar{f}(x) - f(x)$, anularea sa înseamnă egalitatea cu zero a integralei din (8) pentru orice funcție $\bar{f}(x) - f(x)$ continuu diferențiabilă, fapt care, conform lemei lui Lagrange, este îndeplinit dacă are loc egalitatea cu zero a derivatei Fréchet a lui $\mathcal{H}$ în f i.e.

$$\frac{\partial H}{\partial f}(x, f(x)) = 0, \tag{9}$$

care este tocmai ecuația lui Euler (5). Această condiție este analoagă condiției de anulare a diferențialei unei funcții reale y de o variabilă reală x în punctul de extremum x_0, acea diferențială fiind funcția liniară $dy = \frac{dy}{dx}(x_0)\,(x - x_0)$, în care caz condiția necesară de extremum era $\frac{dy}{dx}(x_0) = 0$.

Se poate demonstra că (5) constituie o condiţie necesară de extremum folosind diferenţiala Gateaux în locul celei Fréchet, adaptîndu-se de exemplu demonstraţia din [1] p. 50 sau [2], p. 39 la cazul cînd integrandul H nu depinde de $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Atragem atenţia că în demonstraţia de mai sus, posibilitatea aplicării lemei lui Lagrange era condiţionată de anularea lui $\bar{f}(x) - f(x)$ pentru α şi β, deci extremumul se caută în clasa funcţiilor care au valori date la $x = \alpha$ şi $x = \beta$.

Demonstraţia dată în [1] p. 68, 69 sau [2], p. 40 poate fi imediat adaptată pentru cazul lui H care nu depinde de $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, deducîndu-se rezultatul că o condiţie suficientă de minim este ca $\frac{\partial^2 H}{\partial f^2} \geqslant 0$, iar de maxim, $\frac{\partial^2 H}{\partial f^2} \leqslant 0$.

Aplicînd cele de mai sus la cazul problemei izoperimetrice min $\mathcal{F}$, $\mathcal{S} = \text{const}$, unde $\mathcal{F}$ şi $\mathcal{S}$ sînt daţi de (1) şi (2), rezultă că o condiţie necesară de extremum este ca $a(x)$ să satisfacă ecuaţia (5) care se scrie ca

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[(1+a)\,(ya'(y,\,a) - a) - K\,a(1+a)\right] = 0, \tag{10}$$

adică

$$ya' - a + (1+a)\left[y\frac{\partial a'}{\partial a} - 1\right] - K(1+2a) = 0,$$

care, ţinînd seama că din (3), rezultă

$$\frac{\partial a'}{\partial a} = \frac{1+2a}{y(1-2a')},$$

se rescrie sub forma

$$\frac{ya'}{1+2a} + \frac{a+1}{1-2a'} = K. \tag{10^{I}}$$

În loc de această ecuaţie care apare deja în 1935 în [3], în literatura română (în afara lucrărilor lui N. N. Patraulea) este folosită, în mod curent ([5] — [8]), începînd cu 1954, anul apariţiei lucrării [4], următoarea relaţie:

$$(1+a)\,(ya' - a) - K(1+a)a = \text{const.}, \tag{10^{II}}$$

constanta luîndu-se cu valoarea membrului stîng la $y = 0$, deci valoarea zero. De aceea (10^{II}) devine

$$ya' - a = Ka, \tag{10^{III}}$$

care, ţinînd seama de (3), se mai scrie, echivalent, sub forma

$$1 + \frac{a'^2 y}{a^2} = \frac{K}{a}. \tag{10^{IV}}$$

Eroarea care se face în trecerea de la (10) la $(10)^{II}$ este aceea că din condiția $\frac{\partial(F-KG)}{\partial a}=0$ se conchide că $F-KG=\text{const.}$ În realitate $F-KG$ este funcție de x și a, astfel că diferențiala lui $F-KG$ este

$$\mathrm{d}(F-KG)=\frac{\partial(F-KG)}{\partial x}+\frac{\partial(F-KG)}{\partial a}\cdot\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x}.$$

Cum $F-KG$ depinde explicit de x, rezultă că $\frac{\partial(F-KG)}{\partial x}\neq 0$ și deci $\mathrm{d}(F-KG)\neq 0$ cînd $\frac{\partial(F-KG)}{\partial a}=0$. Numai pentru cazurile cînd $\frac{\partial(F-KG)}{\partial x}=0$ rezultă și $\mathrm{d}(F-KG)=0$ și deci $F-KG=\text{const.}$

Comparații între rezultatele bazate pe relația aevărată $(10)^{I}$ și pe cea eronată $(10)^{IV}$ se găsesc în unele lucrări ulterioare [9]. Menționăm că [9] a fost efectuată în urma clarificărilor aduse de prezenta notă.

Primit la redacție la 31 mai 1985

BIBLIOGRAFIE

1. M. A. LAVRENTIEV, L. A. LIUSTERNIK, *Curs de calcul variațional*, Edit. Tehnică, București, 1955.
2. L. CESARI, *Optimization-Theory and Applications*, Applications of Mathematics, **17**, Springer-Verlag, New York—Heidelberg — Berlin, 1983.
3. H. GLAUERT, *Airplane propellers*, în: *Aerodynamic Theory*, W. F. Durand (ed.), vol. **IV**, Springer, Berlin, 1935.
4. E. CARAFOLI, *Elice aeriene*, Expunere rezumativă, 1954.
5. P. V. MARINESCU, *Îndrumar pentru proiectarea elicei de avion*, IPB, București, 1975.
6. S. GĂLEȚUȘE, *Asupra proiectării elicei eoliene de randament maxim*, St. Cerc. Mec. Appl., **40**, 4 (1981).
7. S. GĂLEȚUȘE, *Efectul frecării asupra vitezelor induse la o elice eoliană*, Buletinul Institutului Politehnic, București, Seria Mecanică, 6 (1981).
8. S. GĂLEȚUȘE, Asupra adaptării otime a elicei la avion, St. Cerc. Mec. Appl., **40**, 6 (1981).
9. H. DUMITRESCU, ADELINA GEORGESCU, A. DUMITRACHE, *Proiectarea aerodinamică a elicei de randament maxim*, St. Cerc. Mec. Apl., **45**, 2 (1986).

J. A. COLLINS (sub red.), *The Changing Face of Manufacturing* (Fața schimbătoare a fabricației), *Proceedings of the 9th Annual British Robot Association Conference, 13—14 mai 1986, Stratford-upon-Avon*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1986, 355 p., 160 fig.

Volumul „Fața schimbătoare a fabricației" conține un număr de 35 articole prezentate la cea de-a 9-a conferință anuală a „Asociației britanice de roboți" care a avut loc în zilele de 13—14 mai 1986 la Stratford upon Avon, Marea Britanie.

Volumul este organizat în 8 capitole, dintre care 6 sînt organizate pe tematici, iar ultimele două conțin articolele suplimentare și cele întîrziate.

În primul capitol intitulat „Schimbarea în conducere" se include un singur articol, care tratează despre eficiența economică a noilor tehnologii.

Capitolul al II-lea abordează problemele utilizării senzorilor în fabricație, inclusiv vederea artificială. Se remarcă în mod deosebit articolul lui G. Edling de la ASEA Robotics, Suedia, tratînd despre o nouă generație de senzori de rost pentru echiparea roboților industriali utilizați pentru operații de sudare cu arc în mediu de gaz protector. Alte două articole ale capitolului sînt consacrate unei tendințe moderne în dezvoltarea roboticii: realizarea de aplicații în domeniul metrologiei inspecției obiectelor fără contact.

Cel de-al treilea capitol este consacrat manipulării integrate de material. Se prezintă descrierea unui sistem de manipulare senzorizat pentru industria alimentară și cea a unui sistem de transport uzinal flexibil utilizat în industria de automobile.

Capitolul al IV-lea se referă la asamblarea automată flexibilă a componentelor electronice. Unul din articole prezintă necesitatea modernizărilor tehnice în vederea creșterii competitivității industriei electronice. Celelalte articole tratează despre un sistem flexibil pentru asamblarea plăcilor cu circuite integrate și despre utilizarea roboților industriali în asamblarea componentelor electronice.

Capitolul al V-lea se referă la proiectarea produselor adecvată pentru fabricație automată. Se discută în cele trei articole cuprinse în capitol „managementul" produselor, avînd drept scop realizarea unei fabricații automate economicoase, un studiu de caz arătînd cum prin conlucrarea inginerilor tehnologi cu proiectanții, s-a realizat adaptarea unui produs la procesul de fabricație automată flexibilă și reorganizarea celulei de fabricație în condiții mai raționale, cît și considerente care au dus la proiectarea unor produse siliconice economicoase.

În capitolul al VI-lea se tratează în trei articole probleme ale integrării fabricației. Se prezintă considerații privind conducerea proceselor de fabricație cu calculatorul, modalitățile de integrare într-un singur sistem automat a unor componente provenind de la diferiți furnizori. Capitolul se încheie cu un interesant articol referitor la analiza stadiului de introducere a automatizării proceselor de fabricație în industria din Marea Britanie.

Ultimele două capitole, intitulate „Articole suplimentare", respectiv „Articole întîrziate" conțin un număr de 19 articole pe teme diverse, pornind de la probleme constructive ale roboților industriali — vedere artificială, sistem de comandă cu buclă închisă utilizînd senzori multipli, sistem postprocesor și altele — și încheind cu analiza unor aplicații — dintre care merită o atenție deosebită articolul lui K. H. Wurst de la Universitatea din Stuttgart despre debavurarea robotizată a pieselor turnate și forjate. Numeroase articole din aceste capitole se referă la probleme de management și organizarea activității întreprinderilor și secțiilor de fabricație în condițiile introducerii automatizării flexibile a proceselor de fabricație.

Volumul constituie o interesantă trecere în revistă a problemelor construcției și implementării roboților industriali, a nivelului atins în anul 1986 mai ales în Marea Britanie. Se adresează cercetătorilor care lucrează în domeniul roboticii, al tehnologiilor flexibile și al organizării și conducerii întreprinderilor.

Articolele sînt semnate de un număr de 52 autori, dintre care 35 sînt din Marea Britanie. Două articole sînt publicate de autori din China și unul de autori din Jugoslavia.

F. Kovács

C. A. VOSS (sub red.), *Managing Advanced Manufacturing Technology* (Conducînd tehnologii de fabricație avansată), Proceedings of the UK Operations Management Association Conference, 2—3 ianuarie 1986, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1986, 430 p., 22 fig.

Volumul „Conducînd tehnologii de fabricație avansată" conține un număr de 30 articole prezentate la Conferința „Asociației de management de operații", care a avut loc în 2—3 ianuarie 1986 la Universitatea Warwick din Coventry, Marea Britanie.

Volumul este organizat în opt capitole. Primul capitol este consacrat privirii de ansamblu strategic și conține două articole. Unul dintre articole se referă la utilizarea sistemelor de fabricație flexibilă în Marea Britanie, iar cel de-al doilea la o pertinentă comparație a strategiilor de fabricație în Europa, în comparație cu cele din America de Nord și Japonia.

Cel de-al doilea capitol se referă la implementări, conținînd un număr de șase articole. Se discută perspectivele strategice ale unor asemenea implementări, metodologia implementărilor și modalitățile de integrare a sistemelor în ansamblul întreprinderii, particularitățile asistenței întreprinderilor privind implementarea sistemelor de fabricație flexibilă. Interesantă este „istoria" realizării a două sisteme de fabricație flexibilă, descrisă de un cadru didactic de la Boston University School of Management U.S.A. Un articol se ocupă de determinarea cerințelor materiale aferente unei implementări.

Capitolul al III-lea este consacrat unor studii de caz. Se prezintă date referitoare la difuzarea automatizării flexibile în industria prelucrătoare de metal din Italia, problemele implementării tennologiilor noi în întreprinderi de inginerie mecanică și tipografii, utilizarea calculatoarelor în managementul de operații, cît și descrierea unui număr de cinci studii de caz.

Capitolul al IV-lea al cărții se referă la evaluarea costurilor și conține un număr de trei articole. Ele tratează probleme ale evaluării financiare a sistemelor de fabricație avansate și un studiu de caz al calculelor economice referitoare la implementarea unor asemenea sisteme la Intreprinderea Rolls-Royce din Derby, Marea Britanie.

Capitolul al V-lea se referă la relații vînzător-utilizator. El conține două articole care se referă la aceste relații în industria constructoare de mașini din Marea Britanie și în industria electronică din Scoția.

Capitolul al VI-lea este consacrat măsurării performanței. Problemele sînt prezentate în două articole. Unul expune corelația dintre evaluarea economică a sistemelor de fabricație flexibilă și performanțele acestora, iar cel de-al doilea tratează posibilitățile de utilizare a unor indicatori nefinanciari ai performanței sistemelor de fabricație pentru îmbunătățirea managementului și a deciziilor privind investițiile.

Capitolul al VII-lea se referă la modelare și planificare. El conține de asemenea două articole, dintre care primul se referă la dezvoltarea unui model pentru utilizarea în planificare la un sistem de fabricație integrat condus cu calculatorul.

Ulimul capitol, cel de-al VIII-lea, este consacrat factorilor umani. Problemele sînt tratate în șapte articole. Ele se referă la probleme de instruire a managerilor și de organizare.

Volumul constituie o prezentare interesantă a stadiului actual al problemelor de management legate de implementarea și exploatarea sistemelor de fabricație avansate și, în cadrul acestora, a sistemelor de fabricație flexibilă.

Lucrarea se adresează cercetătorilor care lucrează în domeniul roboticii, al tehnologiilor flexibile și al organizării conducerii întreprinderilor.

Articolele sînt semnate de un număr de 48 de autori, dintre care 35 cadre din învățămîntul superior.

Marea majoritate a articolelor, 25, sînt semnate de autori din Marea Britanie. Autorii din Statele Unite ale Americii și Italia sînt prezenți cu cîte două articole, iar cei din Franța, cu un articol.

F. Kovács

ANNA KOCHAN, D. COWAN, *Implementing CIM Computer Integrating Manufacturing* (Implementînd CIM. Producție integrată cu calculator), Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1986, 100 p., 35 fig.

Cartea reprezintă o introducere în domeniul de știință referitor la producția integrată cu calculator (CIM) ca un tot unitar.

Se prezintă o privire generală a tehnologiilor utilizate şi a deciziilor din domeniul conducerii necesare pentru implementarea CIM într-o întreprindere productivă.

Cartea este scrisă într-un stil care o face accesibilă cititorilor de diferite nivele de pregătire. Ea facilitează obţinerea de către cititor a unei imagini generale asupra principalelor probleme privind CIM, cu deosebire în acelea în care persistă semne de întrebare.

Cartea constituie o folositoare unealtă de comunicare, care tratează problemele fundamentale ale CIM şi de ce aceasta este o modalitate de operare eficientă. Sînt discutate în cadrul lucrării tendinţa istorică spre integrare, tehnologiile care fac posibil CIM, sisteme de comunicaţie, modul de conducere a schimbării tehnologice.

Cartea are 11 capitole, bibliografice şi un glosar de termeni.

Primul capitol cuprinde o introducere în CIM, prezentînd tehnologiile componente, strategia dezvoltării CIM, relaţii comerciale aferente şi relaţiile cu angajaţii.

Capitolul 2 cuprinde istoricul dezvoltării CIM.

Capitolul 3 se referă la proiectarea asistată de calculator (CAD), atît operînd izolat cît şi integrată în sisteme mai complexe.

Se tratează hardware şi software aferent, modalităţile de instalare a CAD. Capitolul 4 este consacrat fabricaţiei asistate de calculator (CAM). Sînt tratate problemele controlului numeric direct, sistemele de fabricaţie flexibilă şi programarea fabricaţiei propriu-zise.

În capitolul 5 se abordează încercarea produselor asistată de calculator (CAT).

Capitolul 6 este consacrat planificării şi controlului producţiei asistate de calculator. Se discută elaborarea programului de producţie, a bonurilor de materiale, administrarea dotării şi planificarea necesarului de material.

În cadrul capitolului 7 se tratează elaborarea proceselor tehnologice la calculator, cu referiri la tehnologia de grup, definirea datelor necesare şi funcţionarea sistemelor expert.

Capitolul 8 se referă la robotică. Sînt prezentate principalele tipuri de roboţi industriali, cîteva aplicaţii, modul de selectare a sarcinilor pentru roboţi în corelare cu justificarea implementării, simularea sistemelor robotizate.

Capitolul 9 este consacrat manipulării automate a materialelor. Se discută problemele depozitării, identificării automate a materialelor, transportul acestora, posibilităţi de simulare a funcţionării sistemului.

Capitolul 10 se ocupă de comunicaţii în cadrul întreprinderii în condiţiile CIM. Se tratează reţelele locale de comunicaţii, baze de date, compatibilitatea componentelor achiziţionate de la diferiţi furnizori.

Capitolul 11 se referă la strategia CIM. Se tratează modalităţile de stabilire a scopurilor, considerentele comerciale, resursele umane şi simularea CIM.

Volumul are caracter informativ general, fără a intra în prea multe detalii concrete. Se adresează cercetătorilor care lucrează în domeniul organizării şi conducerii producţiei şi a roboticii.

F. Kovács

M. BRIOT (sub. red.), *Robot Vision and Sensory Controls*. (Lucrările celei de-a 6-a Conferinţă internaţională asupra roboţilor înzestraţi cu vedere artificială şi a controlului senzorial. 3—5 iunie 1986, Paris), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1986, 278 p., 152 fig.

Volumul „Roboţi înzestraţi cu vedere artificială şi control senzorial" conţine un număr de 28 articole prezentate la cea de a 6-a Conferinţă internaţională cu tema din titlu, care a avut loc la Paris, în zilele de 3—5 iunie 1986.

Volumul este organizat în 7 capitole, dintre care 6 cu teme bine definite, ultimul conţinînd articole întîrziate.

Primul capitol cuprinde două comunicări prezentate cu ocazia şedinţei de deschidere. Într-unul dintre acestea, D.W. Braggins, un consultant în probleme de vedere artificială, se ocupă de integrarea în sisteme unitare a dispozitivelor de vedere artificială achiziţionabile din comerţ. Se indică 3 căi distincte după care se poate realiza această integrare. Cel de-al doilea articol este scris de cunoscutul specialist al domeniului, prof. A. Pugh de la Universitatea Hull, împreună cu K. Selke şi se referă la problemele generale ale asamblării ghidate de senzori; pe lîngă analiza pertinentă a diverselor faze ale montajului automat, a funcţionării dispozitivelor componente ale sistemului, se prezintă şi două aplicaţii concrete.

Cel de-al doilea capitol este consacrat sistemelor de senzori și cuprinde 7 articole. Două dintre articole se referă la cunoașterea culorilor obiectelor prin sisteme de vedere artificială; primul articol se referă la folosirea recunoașterii culorii pentru identificarea obectelor, cel de-al doilea prezintă o aplicație de colorimetrie cu un sensor utilizînd fibre optice. Alte trei articole se referă la recunoașterea formei obiectelor prin sensor tactil de mare rezoluție, cu ajutorul unei matrice circulare de sensori video și în condițiile suprapunerii parțiale a obiectelor. Un interesant articol se referă la evaluarea automată, cu sistem de vedere artificială, a imaginilor obținute la măsurarea tensiunilor prin fotoelasticitate, iar altul relatează despre prelucrarea în timp real a imaginii recepționate pentru comanda unui dispozitiv inteligent de tăiere cu laser.

Capitolele 3 și 6 se referă la aplicații. Se prezintă modalitatea de clasificare a obiectelor a căror imagine a fost percepută artificial în condițiile de luminozitate variabilă, clasificarea ierarhică a unor fotocasete necodificate bazată pe identificarea vizuală de semne purtate, o metodă de respectare vizuală tridiemsnsională a unor piese turnate, o soluție de dispozitiv de asamblare a pantofului cu talpa în condiții de control multisensor, două aplicații de sensori pentru sudare cu robot industrial și utilizarea în robotică a sensorilor cu laser pentru măsurarea distanțelor (luînd în considerare „timpul de zbor").

În capitolul 4 au fost grupate articolele referitoare la controlul sensorial al roboților mobili. Se prezintă într-un număr de 7 articole, dispozitive de vedere artificială în 3 dimensiuni utilizate pentru funcția de percepție artificială a unor roboți mobili, cît și pentru localizarea roboților mobili, pentru sinteze de imagini (amplasarea unui obiect real în imagine artificială și invers), utilizarea telemetriei ultrasonice în robotică, cît și un dispozitiv de prehensiune cu sensori de forță/temperatură pentru aplicații de robotizare în industria grea.

Capitolul 5 este consacrat sensorilor video tridimensionali și inspecției video. Se prezintă construcția unui sensor tridimensional pentru aplicații industriale, considerații optice referitoare la un instrument de urmărire laser în trei dimensiuni cît și considerații privind cuantificarea unor aspecte calitative ca și problemă de percepție și comunicare.

În capitolul de „Articole întîrziate" se includ două lucrări. Prima se referă la tehnici sensoriale aplicate la montajul componentelor electronice, cea de a doua la utilizarea holografiei și a analizei imaginilor la încercarea unor etanșări.

Volumul se constituie ca o reprezentativă trecere în revistă a stadiului atins de cercetările și aplicațiile practice ale recunoașterii automate a formei și poziției obiectelor cu ajutorul unor sensori video, tactili și ultrasonori. Se adresează cercetătorilor care lucrează în domeniul roboticii. Articolele sînt semnate de 62 autori din Europa de Vest și America de nord (S.U.A. și Canada) și 2 autori din Republica Populară Chineză.

F. Kovács

M. LINK, *Finite Elemente in der Statik und Dynamik* (Elemente finite în statică și dinamică), B.G. Teubner, Stuttgart, 1984, 320 p., 87 fig., 77 indic. bibl.

Ținînd seama de existența multor programe de calcul bazate pe metoda elementelo finite, autorul și-a orientat cartea preponderent spre aspectele de mecanica structurilor, presupunînd cunoscute principalele procedee numerice utilizate la realizarea metodei. Acest lucru este justificat și de faptul că aplicarea programelor necesită idealizarea structurilor și interpretarea rezultatelor, condiționate de înțelegerea aspectelor fizice.

După un scurt capitol introductiv, ideea de bază a metodei elementelor finite este dezvoltată intuitiv în capitolul al 2-lea, pe exemplul unei grinzi cu zăbrele. Capitolul al 3-lea se referă la ecuațiile de bază ale teorici liniare a elasticității — insistîndu-se asupra principiilor extremale pentru acțiuni statice — urmînd prezentarea metodei ca un procedeu Ritz generalizat în capitolul al 4-lea. Aproximativ, un sfert din volumul cărții este rezervat capitolului al 5-lea, ce tratează matricele rigidităților elementelor finite. După o prezentare a principalelor modele, expunerea se concentrează pe modelele de deplasări pentru grinzi, șaibe, dale și elemente de plăci curbe oarecare și axial-simetrice. S-a încercat, pe cît posibil, să se dea forma analitică a rigidităților pentru a ușura interpretarea comportării elementelor finite. Vectorii echivalenți ai încărcărilor distribuite și ai variațiilor de temperatură sînt deduși în capitolul al 6-lea, cu accent pe forma lor consistentă.

Partea de dinamică a cărții începe în capitolul al 7-lea cu deducerea ecuațiilor mișcării pe baza principiului deplasărilor virtuale și a principiului lui Hamilton, obținîndu-se o extindere consecventă a ipotezelor și principiilor din capitolul al 3-lea. În capitolul al 8-lea se prezintă

două procedee de condensare a materialelor caracteristice, iar în capitolul al 9-lea se tratează problema vibrațiilor proprii neamortizate și amortizate, în măsura în care este necesară pentru înțelegerea comportării structurii la acțiuni dinamice. După prezentarea diagonalizării matricelor K, M și C în capitolul al 10-lea, în capitolul al 11-lea se tratează unele procedee pentru calculul răspunsului structurii la excitații periodice și neperiodice, fiind abordată și problematica spectrelor de răspuns. Din volumul primelor 11 capitole aproximativ o treime se referă direct la probleme de dinamică.

Ultimul capitol cuprinde opt exemple foarte interesante din practica de utilizare a metodei elementelor finite, atît în probleme de statică, cît și de dinamică. Acestea se referă la: pilnia unui siloz de cereale, antena parabolică a unui satelit de telecomunicații, sonda Giotto pentru studiul cometei Halley, o antenă din aluminiu, rezervoarele treptei a doua a rachetei Ariane, o roată dințată, un amortizor de oscilații și structura unei tribune din beton precomprimat.

Tratarea clară a problemelor cu exemple numerice simple în text face lucrarea de față foarte utilă celor interesați în aplicarea MEF la calculul structurilor.

R. Friedrich

O. C. ZIENKIEWICZ, K. MORGAN, *Finite Elements and Approximation* (Elemente finite și aproximații), John Wiley & Sons, New York, 1985, 328 p., 104 fig., 83 ref. bibl.

Spre deosebire de volumele anterioare, noua carte a cunoscutului profesor Zienkiewicz — scrisă în colaborare cu K. Morgan — acordă o atenție deosebită esenței matematice a metodelor numerice pentru aproximarea soluțiilor ecuațiilor diferențiale și cu derivate parțiale. Se adresează inginerilor interesați în aprofundarea acestui subiect, deosebit de utilă aplicării eficiente a aproximărilor numerice în mecanica solidelor și fluidelor, în termotehnică, acustică și elasticitate.

Primul capitol este dedicat celei mai vechi metode numerice, metoda diferențelor finite. După studiul cazului unidimensional liniar se fac extinderi atît la probleme bi- și tridimensionale cît și la cazuri neliniare.

Metoda reziduriilor ponderate cu funcții de aproximare continue este prezentată în capitolul al doilea atît pentru probleme liniare, cît și neliniare. Sînt tratate și unele soluții pe frontieră. Funcțiile de aproximare definite pe porțiuni și metoda elementelor finite fac obiectul capitolului al treilea, cel mai dezvoltat. Se arată că metoda diferențelor finite reprezintă un caz particular al metodei elementelor finite, constatare ce permite extinderea aplicabilității acesteia. Capitolul al patrulea completează expunerea cu prezentarea elementelor finite de ordin superior, obișnuite și ierarhice. Transformările parametrice și cele de altă natură necesare în definirea elementelor finite de ordin superior cît și integrările numerice idispensaile sînt cuprinse în capitolul al cincilea.

Capitolul al șaselea este rezervat metodelor variaționale, pe lîngă principii variaționale naturale prezentîndu-se și utilizarea multiplicatorilor Lagrange respectiv deducerea unor principii variaționale generale. Discretizarea parțială și problemele dependente de timp sînt tratate în capitolul al șaptelea.

Cu toate că metoda elementelor de frontieră nu este tratată explicit, frecventele referiri la tehnicile corespunzătoare acesteia permit — în capitolul al optulea — formularea metodei generalizate a elementelor finite. Aceasta include cele trei metode numerice de bază: a diferențelor finite, elementelor finite și elementelor de frontieră. Capitolul tratează și evaluarea erorilor de discretizare și reducerea acestora în vederea îmbunătățirii aproximării soluțiilor exacte.

Autorilor le-a reușit o expunere foarte clară și unitară a metodelor de aproximare numerică a soluțiilor ecuațiilor cu derivate parțiale, fără a depăși matematica inginerească. Cele 44 exemple de calcul ilustrează aplicarea practică a teoriei, iar cele 165 exerciții propuse permit cititorului să-și verifice cunoștințele și să aprofundeze materia. Cartea poate fi deci de mare folos participanților la cursurile postuniversitare, cît și tuturor celor ce doresc să aplice practic metodele numerice moderne.

R. Friedrich

MINISTERUL INDUSTRIEI UȘOARE
CENTRALA INDUSTRIEI LÎNII

București Șoseaua Pantelimon 300 Sector II
Cont virament nr. 3024.3.8101 B.N.R.S.R. Filiala sector II
Telex 510 Telefon 27.44.80

„WOOLMARK"

20 de întreprinderi producătoare de țesături, confecții, tricotaje, pături, covoare mecanice din cadrul Ministerului Industriei Ușoare realizează din lînă pură la prima prelucrare (virgină) articole ce au un numitor comun :

CALITATE

Însemnul „WOOLMARK" și eticheta care-l conține sînt pentru dvs. o garanție a unor parametri ridicați a unui control de calitate, exigent, a utilizării unei materii prime — *lînă*, ce prezintă calități incontestabil superioare, față de alte fibre naturale.

Toate noutățile tehnologice și în domeniul creației pe plan internațional sînt înglobate în articolele ce sînt etichetate „WOOLMARK" ! ! !

ACADEMIA REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

R 72557

STUDII ŞI CERCETARI DE MECANICĂ APLICATĂ

15-70-1984

6

TOMUL 46

noiembrie — decembrie

1987

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CONSILIUL DE CONDUCERE

Acad. IOAN ANTON, *redactor şef*

Membri:

Acad. ŞTEFAN BĂLAN
Acad. CAIUS IACOB
Acad. DAN MATEESCU
Acad. RADU VOINEA
Prof. GHEORGHE BUZDUGAN, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
Dr. ing. NICOLAE PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
Prof. RADU C. BOGDAN
Prof. VIRGIL N. CONSTANTINESCU
Dr. ing. ION CRIŞAN
Prof. TRAIAN DEMIAN
Prof. CONSTANTIN IAMANDI
Prof. DUMITRU MANGERON
Dr. ing. DAN PANTAZOPOL
Prof. DAN PAVELESCU
Prof. CRISTIAN PELECUDI
Dr ing. MIRCEA RADEŞ
Prof. GHEORGHE SILAŞ
Dr. ing. CONSTANTIN TEODORESCU
Dr. doc. VIOREL VISARION

Prof. TEODOR OROVEANU, *secretar de redacţie*

COLEGIUL DE REDACŢIE

Acad. IOAN ANTON, *redactor şef*

Membri:

Acad. DAN MATEESCU
Dr. ing. ION CRIŞAN
Prof. TRAIAN DEMIAN
Dr. ing. DAN PANTAZOPOL
Dr. ing. CONSTANTIN TEODORESCU

Prof. TEODOR OROVEANU, *secretar de redacţie*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei R. S. România se vor aresa la: ROMPRESFILATELIA, sectorul export-import presă, P. O. Box 12—201, telex 10376 prsfi r, Calea Griviţei nr. 64—66, 78104 Bucureşti, România; în ţară, abonamentele se primesc la oficiile poştale.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă se trimit pe adresa Colegiului de redacţie al revistei, 79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei nr. 125.

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 46, nr. 6 noiembrie — decembrie 1987

SUMAR

STUDII

A. COZMA, Asupra unor proprietăţi ale dezlocuirii trifazice 491

N. PANDREA, Vibraţiile rigidului cu legături elastice 499

GH. D. PASAT şi M. RENERT, Modelarea curgerii induse de amestecătorul tip turbină cu pale drepte, în recipiente prevăzute cu dispozitive de amestecare. 513

D. DUBINĂ şi C. PACOSTE, Modele şi metode de calcul exacte şi aproximative în mecanica structurilor 525

AL. D. STAN şi M. ALBULESCU, Posibilităţi de corecţie a debitului de gaze la fracţiuni mari de apă în curentul de gaze 553

I. SPULBER şi C. SPULBER, O contribuţie la studiul indicelui de refracţie în spaţiul finit 563

RECENZII 567

INDEX ALFABETIC 575

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Articolele, originale și de înalt nivel științific, vor fi redactate într-un stil concis, evitîndu-se introducerile foarte lungi. Articolele vor fi dactilografiate la două rînduri, pe hîrtie albă de bună calitate, în două expemplare. Prima pagină trebuie să conțină titlul lucrării, numele autorului (autorilor) și locul de muncă precum și un rezumat de cel mult 150 cuvinte. Toate datele științifice și tehnice prezentate trebuie formulate în unități S. I. Formulele trebuie dactilografiate sau scrise cu cerneală, clar și indicîndu-se caracterul literelor (aldine, italice etc.). Indicii inferiori și superiori trebuie indicați clar, pentru evitarea confuziilor. Ca semn zecimal se va utiliza virgula. Tabelele vor fi dactiolografiate pe foi separate, cu indicarea titlurilor și cu numerotarea cu cifre arabe. Desenele și diagramele trebuie executate în tuș, pe hîrtie de calc, la dimensiuni aproximativ duble față de acelea finale și cu litere scrise cu îngrijire și suficient de mari pentru a fi vizibile după reproducere. Referințele bibliografice vor fi menționate, pe cît posibil, în ordine alfabetică, la sfîrșitul articolului. În text vor fi indicate prin numărul din lista referințelor, în paranteze drepte.

Referințele din reviste vor conține inițiala și numele autorului (autorilor), titlul articolului (subliniat cu o linie), numele revistei (prescurtat conform uzanțelor internaționale), numărul volumului (subliniat dublu), numărul fasciculei și anul de apariție în paranteză, de exemplu :

1. S. AIZICOVICI, C. FETECĂU, Existence of Couette flows in second grade fluids, Rev. Roum. Sci. Techn.— Méc. Appl., 31, 5 (1986).

Referirea la o carte se face indicînd inițiala și numele autorului (autorilor), titlul cărții (subliniat cu o linie), editura, orașul, anul apariției și numerele paginilor, dacă referirea se face la o parte a cărții, de exemplu :

3. W. FLÜGGE, Tensor Analysis and Continuum Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972, p. 93—99.

Manuscrisele vor fi trimise la adresa : 79717 București 22, Calea Victoriei, 125.

ASUPRA UNOR PROPRIETĂȚI ALE DEZLOCUIRII TRIFAZICE

de C. COZMA

Academia de Studii Economice, București

Lucrarea consideră problema dezlocuirii trifazice, tridimensională dar negravitațională în medii poroase omogene. După ce s-a realizat o dezlocuire cu un fluid se introduce în mediul poros un al doilea fluid, ambele nemiscibile cu fluidul dezlocuit. Pentru scrierea ecuațiilor se face apel la o lucrare anterioară în care s-a consderat dezlocuirea bifazică. Se presupune că între cele două zone, ambele cu saturație variabilă, se realizează o suprafață de contact a cărei evoluție se caută. Concepînd rezolvarea problemei prin aproximații succesive, după scrierea condițiilor la limită și inițiale se arată că la fiecare moment există o soluție.

1. INTRODUCERE

S-a arătat în [1], [2] că sistemul de relații care descrie mișcarea bifazică, bidimensională într-un mediu poros omogen, poate fi redus la o singură ecuație pentru saturația în una din faze (s-a ales faza umectantă). Totodată s-a remarcat că această ecuație, particularizată la cazul unidimensional, coincide cu ecuația corespunzătoare (V—31) din [3].

Folosind acest rezultat și ținînd seama că metoda prin care a fost dedusă ecuația notată cu (18) în [1] poate fi extinsă și în cazul tridimensional dacă mișcarea este negravitațională, ne ocupăm de următoarea problemă: după ce s-a realizat o dezlocuire a țițeiului cu un fluid se introduce în mediul poros omogen, care ocupă volumul $V \subset \mathbb{R}^3$, un alt fluid astfel încît V se prezintă ca reuniunea a două domenii disjuncte V_1 și V_2 caracterizate, respectiv, de saturațiile $S_1(x, T)$ și $S_2(x, T)$; $(x \in V_i;\ i = 1,2,\ T \in [0, T_m])$. Se va nota cu $C(T)$ frontiera comună la momentul T a domeniilor V_1 și V_2, iar prin C înțelegem totalitatea pozițiilor lui $C(T)$ în intervalul $[0,\ T_m]$.

Familia suprafețelor $C(T)$ nu este dată ci constituie o necunoscută a problemei. Se va admite că ecuația suprafeței $C(0)$ se poate scrie și că această suprafață satisface condiții suficiente de regularitate pentru condițiile ce se vor pune.

Frontierele fixe ale lui V_1 și V_2 vor fi notate, respectiv, cu C_1 și C_2 concepute ca suprafețe netede în $\mathbb{R}^3$. În cazuri concrete, C_1 și C_2 urmează să fie precizate dîndu-se ecuațiile corespunzătoare. Menționăm însă faptul că și în cele mai simple cazuri privitoare la forma domeniului sau a condițiilor problema este nestaționară, aceasta fiind aspectul de maxim interes.

2. FORMULAREA MATEMATICĂ A PROBLEMEI

Vom folosi în general notațiile curente expuse în [2] cu următoarele precizări: fluidele 1 și 2 se introduc în mediul poros în această ordine și sînt socotite umectante, nemiscibile cu fluidul dezlocuit ale cărui ca-

racteristici se identifică prin indicele t. Saturațiile S_1 și S_2, respectiv în V_1 și V_2, sînt privite în faza umectantă, iar presiunile capilare sînt diferențe între presiunile acestora și presiunea fluidului dezlocuit (neumectant).

Modul în care privim problema reprezintă de fapt o generalizare a studiului deplasării suprafeței de contact între două fluide omogene, [3], [4]. Această problemă, încă actuală prin posibilitățile pe care le oferă aplicațiilor practice este studiată pe larg și în literatura română în mono grafiile [3], [4] și nu mai puțin în unele lucrări ulterioare datorate altor autori ca de exemplu [5].

Pornind de la sistemul fundamental de relații,

$$\vec{V}_i = -k\frac{k_{ri}}{\mu_i}\nabla p_i (i=1,2); \quad \vec{V}_t = -k\frac{k_{rt}}{\mu_t}\nabla p_t, \tag{1}$$

$$\vec{V}^{(i)} = \vec{V}_i + \vec{V}_t \ (i=1,2), \tag{2}$$

$$\nabla \vec{V}^{(i)} = 0, \tag{3}$$

$$p_i(x, T) - p_t(x, T) = P_c(S_i), \tag{4}$$

$$m\frac{\partial S_i}{\partial T} + \nabla \vec{V}_i = 0, \tag{5}$$

deducem ecuațiile care descriu mișcarea sub forma

$$\frac{\partial S_i}{\partial T} - \frac{k}{m}\frac{k_{ri}}{\mu_i A_i(S_i)}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{k_{rt}}{\mu_t}P_c'(S_i)\frac{\partial S_i}{\partial x_j}\right) = f_i(x, T), \tag{6}$$

unde s-a folosit notația

$$A_i(S_i) = \frac{k_{ri}(S_i)}{\mu_i} + \frac{k_{rt}(S_i)}{\mu_t}.$$

Concepînd rezolvarea problemei printr-un proces de aproximații succesive, funcțiile $f_1(x, T)$ și $f_2(x, T)$ sînt definite, respectiv, în domeniile $W_1 = V_1 \times [0, T_m]$ și $W_2 = V_2 \times [0, T_m]$ și se pot da expresiile lor pe baza datelor cunoscute la momentul inițial și apoi la fiecare moment cu ajutorul celor cunoscute la momentul anterior.

În ecuația (1) s-au notat : k_{ri} — permeabilitatea relativă față de fluidul de dezlocuire în domeniul W_i, $(i=1, 2)$; k_{rt} — permeabilitatea relativă a fluidului umectant (țiței)dependentă de saturația din fiecare domeniu. Expresiile funcțiilor $f_i(x, T)$ rezultă prin comparație cu ecuația (18) din [1].

Faptul că ecuațiile (6) au fost deduse ținînd seama de prezența forțelor capilare ne îndreptățește să presupunem că prin aceasta se înlătură posibilitatea apariției multiformității pentru funcțiile $S_1(x, T)$ și $S_2(x, T)$.

În conformitate cu notațiile folosite se poate presupune că există o valoare $S^x \in (0,1)$ astfel încît pentru $\forall (x, T) \in W_i$ avem

$$S_1(x, T) < S^x \text{ și } S_2(x, T) > S^x. \tag{7}$$

În acest mod, cele două domenii adiacente W_1 și W_2 pot fi identificate prin inegalitatea coresunzătotoare între S_i și S^x.

Pentru condițiile la limită vom adopta un punct de vedere similar cu cel expus în [6].

Pe frontierele fixe vom avea

$$S_i(x,\ T) = s_i(x,\ T);\ (x,\ T) \in C_i \times [0,\ T_m], \tag{8}$$

$$s_1(x,\ T) < S^x,\ s_2(x,\ T) > S^x.$$

Pe frontiera de separare,

$$C = \bigcup_{T \in [0,\ T_m]} C(T)$$

se vor impune condițiile

$$S_1 = S_2, \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{3} \left[\frac{k_{rt}}{\mu_t} P_c'(S)\right]^{(2)} \frac{\partial S_2}{\partial x_j} \cos(\vec{n}, x_j) = r \cdot \cos(\vec{n}, T) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{3} \left[\frac{k_{rt}}{\mu_t} P_c'(s)\right]^{(1)} \frac{\partial S_1}{\partial x_j} \cos(\vec{n}, x_j), \tag{10}$$

unde prin $\vec{n}$ s-a înțeles normala la $C(T)$ îndreptată spre interiorul fazei 1, iar r este un factor care depinde de caracteristicile fluidelor și de mediul poros dar este independent de punct și de timp.

În afară de cele de mai sus există și condiții inițiale date sub forma

$$S_1(x,\ 0) = S_{01}(x);\ S_{01}(x) < S^x,$$

$$S_2(x,\ 0) = S_{02}(x);\ S_{02}(x);\ S_{02}(x) < S^x, \tag{11}$$

reprezentînd distribuția cîmpului saturațiilor la $T = 0$. În (10) parantezele drepte cu indice superior reprezintă limitele expresiilor respective în punctul $(x,\ T)$ de pe $C(T)$. În forma scrisă relația (10) este o adaptare la cazul nostru a condiției clasice impuse pe suprafața de discontinuitate cerînd continuitatea componentei normale a vitezei totale la traversarea frontierei mobile.

Rezolvarea problemei dată prin ecuațiile (6) cu condițiile (8), (9), (10), (11), realizabilă printr-un proces iterativ, presupune examinarea succesivă a următoarelor chestiuni:

a) existența și unicitatea soluției pentru problema considerată la fiecare etapă în parte;

b) evidențierea modalităților de folosire a rezultatelor obținute într-o iterație la iterația următoare;

c) convergența procesului și stabilirea etapei la care s-a obținut o „soluție suficient de bună".

Dintre aceste probleme, în lucrarea de față ne ocupăm doar de prima și vom utiliza unele rezultate expuse în [7].

3. TRANSFORMAREA ECUAȚIILOR ȘI CONDIȚIILOR

Considerăm o valoare particulară S_0 a lui S astfel încît mărimile $k_{rt}(S_0)$ și $P_c(S_0)$ sînt bine determinate în ambele domenii.
Cu notația

$$B(S) = \int_{S_*}^{S} \frac{k_{rt}}{\mu_t} P_c'(S)\, dS = \frac{k_{rt}}{\mu_t} P_c(S) - \frac{1}{\mu_t} \int_{S_*}^{S} k_{rt}'(S)\, P_c(S)\, dS \qquad (12)$$

punem în evidență o primitivă a funcției

$$R(S) = \frac{K_{rt}(S)}{\mu_t} P_c(S).$$

$B(S)$ va fi monoton crescătoare deoarce, ținînd seama de (4), funcția $R(S)$ este pozitivă. Facem acum substituțiile

$$\sigma_i = B(S_i) \quad (i = 1,\ 2) \qquad (13)$$

cu care avem

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_j} = B'(S_i)\, \frac{\partial S_i}{\partial x_j},$$

$$\Delta \sigma_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} (B'(S_i)) \frac{\partial S_i}{\partial x_j};\ S_i = B^{-1}(\sigma_i),$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial T} = [B^{-1}(\sigma_i)]' \frac{\partial \sigma_i}{\partial T} = \frac{1}{B'(S_i)} \frac{\partial \sigma_i}{\partial T} = \frac{\mu_t}{K_{rt}(B^{-1}(\sigma_i))\, P_c'(B^{-1}(\sigma_i))} \frac{\partial \sigma_i}{\partial T}.$$

Cu acestea, noua formă a ecuațiilor (6) este :

$$\frac{m}{k} \frac{\mu_t}{\mu_i} \frac{k_{ri}(B^{-1}(\sigma_i))}{k_{rt}(B^{-1}(\sigma_i))} A_i(B^{-1}(\sigma_i)) \frac{\partial \sigma_i}{\partial T} - \Delta \sigma_i = f_i(x,\ T). \qquad (14)$$

Ținînd seama de monotonia funcției $B(S)$ vom nota cu $\sigma^* = B(S^*)$ și

$$\sigma_1(x,\ T) < \sigma^* < \sigma_2(x,\ T).$$

La fel, condițiile pe frontierele fixe se transpun în forma

$$\sigma_i(x,\ T) = B(S_i(x,\ T))$$

iar pe frontiera de separare C vom avea

$$\sigma_1 = \sigma_2 \qquad (15)$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial n} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial n} = r \cos(\vec{n},\ T). \qquad (16)$$

Transpunerea condițiilor inițiale este imediată.

Noua formă a problemei este folositoare în cele ce urmează în special datorită faptului că dă posibilitatea de a scrie condițiile pe frontiera de separare sub forma (16).

Putem transforma în continuare problema notînd cu $F_i(\sigma)$ expresia

$$F_i(\sigma) = \frac{m}{k}\frac{\mu_t}{\mu_i}\frac{k_{ri}(B^{-1}(\sigma_i))}{k_{ri}(B^{-1}(\sigma_i))}A_i(B^{-1}(\sigma_i))$$

și apoi introducînd funcțiile $E_i(\sigma)$ determinate pînă la o constantă aditivă prin relațiile

$$\frac{dE_i}{d\sigma} = F_i(\sigma) \tag{17}$$

în care s-a introdus funcția σ definiă în $W = V \times [0, T_m]$ prin

$$\sigma(x, T) = \begin{cases} \sigma_1(x, T) \text{ în } W_1, \\ \sigma_2(x, T) \text{ în } W_2. \end{cases} \tag{18}$$

4. EXISTENȚA SOLUȚIEI

Se va nota cu $\mathcal{D}(W)$ spațiul funcțiilor indefinit derivabile în W avînd suport compact în W, iar prin $\mathcal{D}'(W)$ se notează spațiul distribuțiilor în W.

Cu notația (18) obținem (14) sub forma

$$\frac{\partial}{\partial T}((F(\sigma)) - \Delta\sigma = f(x, T) \tag{19}$$

și vom arăta că această ecuație are o soluție în $\mathcal{D}'(W)$.

Pentru a simplifica scrierea notăm

$$L_i = C_i \times [0, T_m] \quad (i = 1, 2)$$

și atunci $\sigma = B(S)$ este dată pe $L_1 \cup L_2$ prin

$$\sigma_i = B(S_i) \text{ pe } L_i \quad (i = 1, 2), \tag{20}$$

$$\sigma(x, 0) = \sigma_0(x). \tag{21}$$

Vom nota cu φ un element oarecare din $\mathcal{D}(W)$ și folosind notațiile și regulile obișnuie în calculul cu distribuții, obținem:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial T} F(\sigma) - \Delta\sigma, \varphi \right\rangle = -\left\langle F(\sigma), \frac{\partial\varphi}{\partial T} \right\rangle - \langle \sigma, \Delta\varphi \rangle. \tag{22}$$

Primul termen devine

$$-\left\langle F(\sigma), \frac{\partial \varphi}{\partial T}\right\rangle = -\int\limits_{\sigma_1<\sigma^x} F(\sigma_1)\frac{\partial \varphi}{\partial T}\,dx\,dT -$$

$$-\int\limits_{\sigma_2>\sigma^x} F(\sigma_2)\frac{\partial \varphi}{\partial T}\,dx\,dT =$$

$$=\int\limits_C \left(\left[\frac{k_{rt}(S)}{\mu_t}P_c'(S)\right]^{(2)} - \left[\frac{k_{rt}(S)}{\mu_t}P_c'(S)\right]^{(1)}\varphi\cdot\cos(\vec{n},\ T)\,ds +\right.$$

$$+\int\limits_{\sigma_1<\sigma^x}\left[\frac{\partial}{\partial T}R(B^{-1}(\sigma_1))\right]\varphi\,dx\,dT + \int\limits_{\sigma_2>\sigma^x}\left[\frac{\partial}{\partial T}R(B^{-1}(\sigma_2))\right]\varphi\,dx\,dT =$$

$$= r\int\limits_C \varphi\cos(\vec{n},\ T)\,ds + \int\limits_{\sigma_1<\sigma^x}\frac{\partial}{\partial T}\left[R(B^{-1}(\sigma_1))\right]\varphi\,dx\,dT +$$

$$+\int\limits_{\sigma_2>\sigma^x}\frac{\partial}{\partial T}\left[R(B^{-1}(\sigma_2))\right]\varphi\,dx\,dT. \tag{23}$$

În expresia scrisă s-au folosit (10) şi (16), iar prin s s-a notat elementul de arie pe C.

Pentru al doilea termen din membrul drept al relaţiei (22) se obţine

$$\langle\sigma,\ \Delta\varphi\rangle = \int\limits_C(\sigma_1-\sigma_2)\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,ds - \int\limits_C\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial n}-\frac{\partial\sigma_2}{\partial n}\right)\varphi\,ds +$$

$$+\int\limits_{\sigma_1<\sigma^x}(\Delta\sigma_1)\,\varphi\,dx\,dT + \int\limits_{\sigma_2>\sigma^x}(\blacktriangle\sigma_2)\,\varphi\,dx\,dT. \tag{24}$$

Ţinînd seama de (15), prima integrală din egalitatea de mai sus dispare. Introducînd (23) şi (24) în (22), datorită relaţiei (16), integralele pe C se reduc şi rezultă

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial T}F(\sigma)-\Delta\sigma,\ \varphi\right\rangle = \int\limits_{\sigma_1>\sigma^x}\left(\frac{\partial F(\sigma_1)}{\partial T}-\Delta\sigma_1\right)\varphi\,dx\,dT +$$

$$+\int\limits_{\sigma_2>\sigma^x}\left(\frac{\partial F(\sigma_2)}{\partial T}-\Delta\sigma_2\right)\varphi\,dx\,dT.$$

Cu aceasta, avînd în vedere relaţia care defineşte pe $F(\sigma)$ şi de (14) se găseşte

$$\left\langle\frac{\partial F(\sigma)}{\partial T}-\Delta\sigma,\ \varphi\right\rangle = \langle f,\ \varphi\rangle. \tag{25}$$

Urmează că există $\sigma\in\mathcal{D}'(W)$ care satisface (19).

Modul în care s-a găsit (25) reprezintă și punctul de plecare pentru determinarea efectivă a soluției. Este evident că cele de mai sus rămîn valabile și în condiții mai slabe. De exemplu, din punct de vedere practic poate fi interesant cazul cînd pe frontierele fixe se adoptă valori constante pentru saturație.

Primit la redacție la 29 iunie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. C. COZMA, *Asupra unei mișcări bifazice într-un mediu poros omogen*, St. cerc. mec. apl., **37**, 1 (1978).
2. C. COZMA, *O generalizare a ecuației lui Buckley și Leverett*, St. cerc. mec. apl., **34**, 3 (1975).
3. T. OROVEANU, *Scurgerea fluidelor multifazice prin medii poroase*, București, Edit. Academiei, 1966.
4. ȘT. I. GHEORGHIȚĂ, *Metode matematice în hidrogazodinamica subterană*, București, Edit. Academiei, 1966.
5. ELENA UNGUREANU, *Asupra unei generalizări a formulei lui Milionșcicov*, Comunicările Acad. R. P. R., **XII**, 10 (1962).
6. C. JACOB, *Introduction mathématique à la mècanique des fluides*, Paris, Gauthier-Villars, 1959.
7. J. L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Paris Gyauthier-Villars 1969.

VIBRAȚIILE RIGIDULUI CU LEGĂTURI ELASTICE

de N. PANDREA

Institutul de subingineri Pitești

În lucrare se stabilesc cu ajutorul teoriei șuruburilor, ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor libere ale rigidului cu legături elastice, se interpretează din punct de vedere geometric modurile de vibrație, se stabilesc condițiile generale sub formă matriceală de decuplare a vibrațiilor de translație față de cele de rotație, iar pentru cazul sistemului cu două plane de simetrie se deduc relațiile finale necesare calculului de proiectare a unei suspensii cu vibrații decuplate.

1. INTRODUCERE

Modelul de rigid cu legături elastice [1] este utilizat în studiul vibrațiilor autovehiculelor rutiere, motoarelor [2], mașinilor vibratoare monomasice [3] precum și în studiul vibrațiilor unui anumit tip de construcții.

Pentru stabilirea unor elemente generale de calcul încă din faza de proiectare precum și în scopul realizării unor condiții de menținere a vibrațiilor între anumite limite, se urmărește a se stabili condițiile de decuplare a vibrațiilor de translație față de cele de rotație.

Aceste condiții conduc la determinarea centrului elastic al sistemului, aspect studiat cu ajutorul teoriei șuruburilor și al metodei deplasărilor relative, în lucrarea precedentă [7].

În prezenta lucrare, se vor stabili, pe baza teoriei șuruburilor și a metodei deplasărilor relative, ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor libere ale rigidului cu legături elastice, se vor interpreta modurile proprii de vibrație, se vor stabili condițiile generale de decuplare sub formă matriceală, iar pentru cazul sistemului cu două plane de simetrie se vor deduce relațiile finale necesare calculului de proiectare a unei suspensii cu vibrații decuplate.

2. FORMA MATRICEALĂ A TEOREMELOR GENERALE

Considerăm rigidul din figura 1 asupra căruia în punctul O acționează torsorul forțelor de componente $\bar{F}$ și $\bar{M}$ și fie $OXYZ$ un sistem de referință solidar cu rigidul, iar $O_0X_0Y_0Z_0$ un sistem de referință fix.

Utilizînd notațiile :

m — masa rigidului;

$\bar{a}$ — accelerația punctului O;

a_X, a_Y, a_Z — proiecțiile accelerației $\bar{a}$ pe axele OX, OY, OZ;

$\bar{\omega}$ — viteza unghiulară a rigidului;

ω_X, ω_Y, ω_Z — proiecțiile pe axele OX, OY, OZ ale vectorului $\bar{\omega}$;

$\bar{\varepsilon}$ — acceleratia unghiulară a rigidului;

ε_X, ε_Y, ε_Z — proiecțiile pe axele OX, OY, OZ ale vectorului $\bar{\varepsilon}$;

ST. CERC. MEC. APL., TOM 46, NR. 6, 1987, P. 499—511

J_X, J_Y, J_Z — momentele de inerţie ale rigidului în raport cu axele OX, OY, OZ;

J_{XY}, J_{XZ}, J_{YZ} — momentele de inerţie centrifugale;

G_X, G_Y, G_Z — momentele statice ale rigidului faţă de planele OYZ, OXZ, OXY;

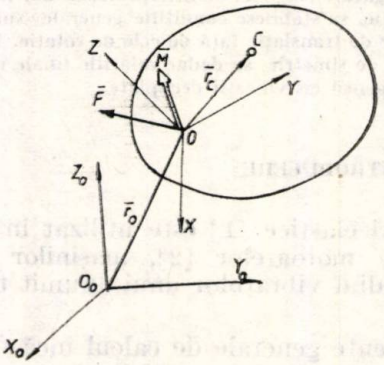


Fig. 1. — Poziţia rigidului faţă de sistemul de erferinţă $O_0X_0Y_0Z_0$.

$\bar{r}_0$ — vectorul de poziţie al punctelor O faţă de sistemul $O_0X_0Y_0Z_0$;

$\bar{K}_0$ — momentul cinetic al rigidului faţă de punctul O;

C — centrul de greutate al rigidului;

$\bar{r}_c$ — vectorul de poziţie al punctului C faţă de sistemul $OXYZ$;

F_X, F_Y, F_Z — proiecţiile forţei $\bar{F}$ pe axele OX, OY, OZ;

M_X, M_Y, M_Z — proiecţiile momentului $\bar{M}$ pe axele OX, OY, OZ; din teorema impulsului şi din teorema momentului cinetic faţă de punctul O [9], rezultă relaţiile vectoriale,

$$m[\bar{a} + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_c + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_c)] = \bar{F}, \tag{1}$$

$$m\bar{r}_c \times \bar{a} + \bar{K}_0 = \bar{M}, \tag{2}$$

unde componentele pe axele OX, OY, OZ ale momentului cinetic $\bar{K}_0$ sînt:

$$\begin{aligned} K_{OX} &= J_X\omega_X - J_{XY}\omega_Y - J_{XZ}\omega_Z, \\ K_{OY} &= -J_{YX}\omega_X + J_Y\omega_Y - J_{YZ}\omega_Z, \\ K_{OZ} &= -J_{ZX}\omega_X - J_{ZY}\omega_Y + J_Z\omega_Z. \end{aligned} \tag{3}$$

Folosind în continuare notaţiile matriceale,

$$[m] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}; \quad [G] = \begin{bmatrix} 0 & -G_Z & G_Y \\ G_Z & 0 & -G_X \\ -G_Y & G_X & 0 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$\{\omega\} = \begin{bmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{bmatrix}; \{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \varepsilon_Z \end{bmatrix}; \{a\} = \begin{bmatrix} a_X \\ a_Y \\ a_Z \end{bmatrix}; \{F\} = \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ F_Z \end{bmatrix}; \{M\} = \begin{bmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_Z \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} J_X & -J_{XY} & -J_{XZ} \\ -J_{YX} & J_Y & -J_{YZ} \\ -J_{ZX} & -J_{ZY} & J_Z \end{bmatrix}; [\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_Z & \omega_Y \\ \omega_Z & 0 & -\omega_X \\ -\omega_Y & \omega_X & 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

rezultă [9], [10] că relațiile (1), (2) se scriu

$$[m]\{a\} + [G]^T\{\varepsilon\} + [\omega][G]^T\{\omega\} = \{F\}, \quad (7)$$

$$[G]\{a\} + [J]\{\varepsilon\} + [\omega][J]\{\omega\} = \{M\}, \quad (8)$$

unde prin $[G]^T$ s-a notat transpusa matricei $[G]$.

Relația (7), reprezintă forma matriceală a teoremei impulsului, iar relația (8) reprezintă forma matriceală a teoremei momentului cinetic în raport cu punctul O al rigidului;

Trecînd la expresia relațiilor (7) (8) cu ajutorul coordonatelor plückeriene [1] ale șuruburilor, $\hat{\hat{a}}$, $\hat{\hat{\omega}}$, $\hat{\hat{F}}$,

$$\hat{\hat{a}} = (\varepsilon_X\ \varepsilon_Y\ \varepsilon_Z\ a_X\ a_Y\ a_Z), \quad (9)$$

$$\hat{\hat{\omega}} = (0\ 0\ \omega_0\ \omega_X\ \omega_Y\ \omega_Z), \quad (10)$$

$$\hat{\hat{F}} = (F_X, F_Y, F_Z\ M_X\ M_Y\ M_Z), \quad (11)$$

ținînd seama de notațiile matriceale,

$$[M] = \begin{bmatrix} [G]^T & [m] \\ [J] & [G] \end{bmatrix}; [GJ] = \begin{bmatrix} [0] & [\omega][G]^T \\ [0] & [\omega][J] \end{bmatrix}, \quad (12)$$

se obține expresia matriceală a teoremelor impulsului și momentului cinetic sub forma:

$$\hat{\hat{F}} = [M]\hat{\hat{a}} + [G\ J]\hat{\hat{\omega}}. \quad (13)$$

În expresia matriceală (13) ca și în calculele algebrice matriceale care vor urma se consideră organizarea coordonatelor plückeriene ale șuruburilor sub formă de vectori coloană.

3. MATRICEA DE RIGIDITATE A SISTEMULUI

Considerăm sistemul format dintr-un rigid legat la bază (corpul fix) prin bare elastice (fig. 2).

În poziția nedeformată sistemul este reprezentat în figura 2 cu linie plină, iar în poziție deformată cu linie punctată.

Se consideră sistemele de referinţă, $OXYZ$ mobil, solidar cu rigidul şi $O_0X_0Y_0Z_0$ fix, astfel alese încît să coincidă atunci cînd sistemul elastic este nedeformat.

Deplasarea sistemului de referinţă mobil faţă de sistemul fix se defineşte prin deplasarea liniară $\bar{\delta}$ şi prin deplasarea unghiulară $\bar{\theta}$ (fig. 2).

Notînd cu $(\delta_{X_0}, \delta_{Y_0}, \delta_{Z_0})$, $(\theta_{X_0}, \theta_{Y_0}, \theta_{Z_0})$ proiecţiile acestor vectori în sistemul $O_0 X_0 Y_0 Z_0$, cunoscînd că aceste deplasări sînt mici, prin ne-

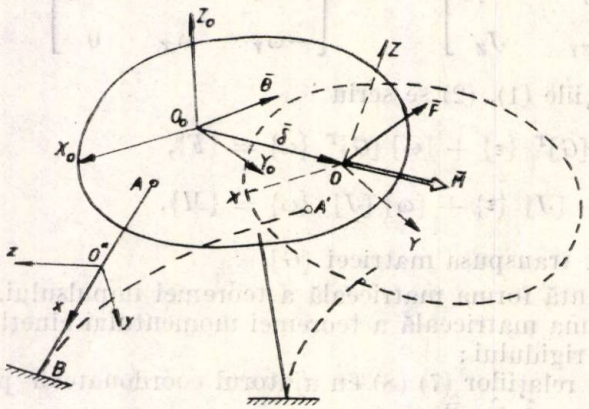


Fig. 2. — Rigidul cu legături elastice formate din bare.

glijarea termenilor cu puteri superioare lui unu, se obţine matricea de transformare din sistemul $OXYZ$ în sistemul $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ sub forma

$$[T_0] = \begin{bmatrix} [\theta] & [0] \\ [\delta] & [\theta] \end{bmatrix}, \tag{14}$$

unde

$$[\theta] = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_{Z_0} & \theta_{Y_0} \\ \theta_{Z_0} & 1 & -\theta_{X_0} \\ -\theta_{Y_0} & \theta_{X_0} & 1 \end{bmatrix}; \quad [\delta] = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_{Z_0} & \delta_{Y_0} \\ \delta_{Z_0} & 0 & -\delta_{X_0} \\ -\delta_{Y_0} & \delta_{X_0} & 0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Dacă se notează cu $(\delta_X, \delta_Y, \delta_Z)$, $(\theta_X, \theta_Y, \theta_Z)$ proiecţiile vectorilor $\bar{\delta}$, $\bar{\theta}$ pe axele sistemului $OXYZ$ prin utilizarea exprimărilor matriceale,

$$\{\theta_0\} = \begin{bmatrix} \theta_{X_0} \\ \theta_{Y_0} \\ \theta_{Z_0} \end{bmatrix}; \quad \{\delta_0\} = \begin{bmatrix} \delta_{X_0} \\ \delta_{Y_0} \\ \delta_{Z_0} \end{bmatrix}; \quad \{\theta\} = \begin{bmatrix} \theta_X \\ \theta_Y \\ \theta_Z \end{bmatrix}; \quad \{\delta\} = \begin{bmatrix} \delta_X \\ \delta_Y \\ \delta_Z \end{bmatrix}, \tag{16}$$

rezultă relaţiile

$$\{\theta_0\} = [\theta]\{\theta\}; \quad \{\delta_0\} = [\delta]\{\theta\} + [\theta]\{\delta\} \tag{17}$$

şi prin neglijarea puterilor superioare lui unu ale parametrilor mici se obţine

$$\{\theta_0\} = \{\theta\}; \quad \{\delta_0\} = \{\delta\}. \tag{18}$$

Se desprinde de aici ideea că în calculul de ordinul unu proiecțiile vectorilor deplasare $\bar{\delta}$, $\bar{\theta}$ în cele două sisteme sînt egale.

Să considerăm că deplasarea sistemului se realizează prin acționarea în punctul O cu forța $\bar{F}$ și momentul $\bar{M}$.

Notînd cu $(F_{X_0}, F_{Y_0}, F_{Z_0})$ $(M_{X_0}, M_{Y_0}, M_{Z_0})$, (F_X, F_Y, F_Z), $(M_X, M_Y M_Z)$ proiecțiile acestor vectori în sistemele de referință $O_0X_0Y_0Z_0$, $OXYZ$, organizînd aceste componente sub forma de vectori coloană, $\{F_0\}$, $\{M_0\}$, $\{F\}$, $\{M\}$, ținînd seama de matricea de transformare (14) cu componentele (15), (16), se obțin relațiile

$$\{F_0\} = \{F\} + \{\Delta F\}\,;\ \{M_0\} = \{M\} + \{\Delta M\}, \tag{19}$$

unde $\{\Delta F\}$, $\{\Delta M\}$ fiind funcții liniare de deplasările mici θ_{X_0}, θ_{Y_0}, θ_{Z_0}, δ_{X_0}, δ_{Y_0}, δ_{Z_0}, se pot neglija și relațiile (19) devin :

$$\{F_0\} = \{F\}\,;\ \{M_0\} = \{M\}. \tag{20}$$

Rezultă în concluzie că pentru calculul de ordinul unu proiecțiile oricărui vector în cele două sisteme sînt egale, fapt pentru care în continuare ne vom referi numai la sistemul $OXYZ$.

În vederea desfășurării calculelor se folosesc notațiile :

O^* — mijlocul unei bare oarecare AB :

O^*_y, O^*_z — axele principale de inerție ale secțiunii normale prin O^* ;

O^*x — axa longitudinală a barei ;

I_y, I_z — momentele geometrice de ineție ale secțiunii ;

I_x — momentul geometric de inerție echivalent pentru calculul de răsucire ;

l — lungimea barei AB ;

A — aria secțiunii normale ;

E, G — modulul de elasticitate longitudinal, respectiv transversal ;

X^*_0, Y^*_0, Z^*_0 — coordonatele punctului O^* față de sistemul de referință $OXYZ$;

α_i, β_i, γ_i $(i = 1, 2, 3)$ — cosinusurile directoare ale axelor O^*x, O^*y, O^*z.

Utilizînd în continuare notațiile

$$k_1 = \frac{EA}{l}\,;\ k_2 = \frac{12EI_z}{l^3}\,;\ k_3 = \frac{12EI_y}{l^3}\,;\ k_4 = \frac{GI_x}{l}\,;\ k_5 = \frac{EI_y}{l}\,;\ k_6 = \frac{EI_z}{l} \tag{21}$$

$$[k_{11}] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix};\ [k_{22}] = \begin{bmatrix} k_3 & 0 & 0 \\ 0 & k_4 & 0 \\ 0 & 0 & k_5 \end{bmatrix}, \tag{22}$$

$$[R] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}; \quad [S] = \begin{bmatrix} 0 & -Z_0^* & Y_0^* \\ Z_0^* & 0 & -X_0^* \\ -Y_0^* & X_0^* & 0 \end{bmatrix}, \tag{23}$$

potrivit cu lucrările [4], [5], [7] se obțin, succesiv, matricea de rigiditate a barei AB în sistemul local de referință O^*xyz,

$$[k] = \begin{bmatrix} [0] & [k_{11}] \\ [k_{22}] & [0] \end{bmatrix}, \tag{24}$$

matricea de transformare din sistemul O^*xyz în sistemul $OXYZ$

$$[T] = \begin{bmatrix} [R] & [0] \\ [S][R] & [R] \end{bmatrix}, \tag{25}$$

matricea de rigiditate a barei în sistemul general de referință $OXYZ$,

$$[K_{AB}] = [T]\,[k]\,[T]^{-1}, \tag{26}$$

matricea de rigiditate a sistemului de bare elastice, raportată la sistemul general de referință $OXYZ$,

$$[K] = \Sigma[K_{AB}]. \tag{27}$$

Matricea de rigiditate (27) a sistemului, scrisă sub forma,

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{12}] & [K_{11}] \\ [K_{22}] & [K_{21}] \end{bmatrix} \tag{28}$$

conține [7] componentele matriceale simetrice $[K_{11}]$, $[K_{22}]$ și componentele matriceale $[K_{12}]$, $[K_{21}]$ care îndeplinesc condiția,

$$[K_{21}]^T = [K_{12}]. \tag{29}$$

Între eforturi și deplasări, potrivit cu lucrările [4], [7] există relațiile:

$$\{F\} = [K_{12}]\,\{\theta\} + [K_{11}]\{\delta\}, \tag{30}$$

$$\{M\} = [K_{22}]\,\{\theta\} + [K_{21}]\,\{\delta\}. \tag{31}$$

Aceste relații, ținînd seama de matricea de rigiditate (27), prin utilizarea coordonatelor plückeriene [1] ale șurubului deplasare $\hat{\Delta}$ și ale șurubului efort $\hat{F}$,

$$\hat{\Delta} = (\theta_X\ \theta_Y\ \theta_Z\ \delta_X\ \delta_Y\ \delta_Z), \tag{32}$$

$$\hat{F} = (F_X\ F_Y\ F_Z\ M_X\ M_Y\ M_Z) \tag{33}$$

se scriu sub forma concentrată;

$$\hat{\hat{F}} = [K]\ \hat{\Delta}. \tag{34}$$

4. ECUAȚIA DIFERENȚIALĂ MATRICEALĂ A VIBRAȚIILOR LIBERE ALE RIGIDULUI CU LEGĂTURI ELASTICE

Prin izolarea rigidului (fig. 3*b*) rezultă că dacă asupra acestuia acționează în punctul O torsorul $(\bar{F}, \bar{M})$, atunci asupra sistemului elastic format din barele elastice și rigidul fără masă, reprezentat punctat în figura 3*a*, acționează torsorul $(-\bar{F}, -\bar{M})$ și din relațiile (13) (28) se obțin ecuațiile

$$\hat{\bar{F}} = [M]\,\hat{\bar{a}} + [G\,J]; \quad -\hat{\bar{F}} = [K]\,\hat{\bar{\Delta}}, \tag{35}$$

din care rezultă ecuația matriceală:

$$[M]\,\hat{\bar{a}} + [G\,J]\;\hat{\bar{\omega}} + [K]\,\hat{\bar{\Delta}} = 0. \tag{36}$$

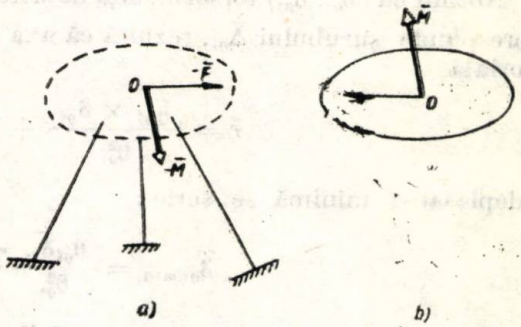


Fig. 3. — Izolarea rigidului de sistemul elastic.

Ținînd seama de cele anterior stabilite, vectorii $\bar{\delta}$ și $\bar{\theta}$ fiind mici, notînd cu $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ versorii axelor OX, OY, OZ, rezultă

$$\bar{a} = \ddot{\bar{\delta}} = \ddot{\delta}_X\bar{i} + \ddot{\delta}_Y\bar{j} + \ddot{\delta}_Z\bar{k}, \tag{37}$$

$$\bar{\omega} = \dot{\bar{\theta}} = \dot{\theta}_X\bar{i} + \dot{\theta}_Y\bar{j} + \dot{\theta}_Z\bar{k}, \tag{38}$$

$$\bar{\varepsilon} = \ddot{\bar{\theta}} = \ddot{\theta}_X\bar{i} + \ddot{\theta}_Y\bar{j} + \ddot{\theta}_Z\bar{k} \tag{39}$$

și cum termenul $[G\,J]\hat{\bar{\omega}}$ este neglijabil, deoarece conține termeni cu puteri superioare ale parametrilor $\dot{\theta}_X$, $\dot{\theta}_Y$, $\dot{\theta}_Z$, se obține din relația (36) ecuația diferențială matriceală a vibrațiilor libere ale rigidului cu legături elastice formate din bare drepte,

$$[M]\,\ddot{\hat{\bar{\Delta}}} + [K]\,\hat{\bar{\Delta}} = 0, \tag{40}$$

unde

$$\ddot{\hat{\bar{\Delta}}} = (\ddot{\theta}_X\ \ddot{\theta}_Y\ \ddot{\theta}_Z\ \ddot{\delta}_X\ \ddot{\delta}_Y\ \ddot{\delta}_Z). \tag{41}$$

5. MODURILE PROPRII DE VIBRAȚIE

O soluție a ecuației (40) este de forma

$$\hat{\bar{\Delta}} = \hat{\bar{\Delta}}_0 \cos(pt - \varphi). \tag{42}$$

Înlocuind, se obține ecuația caracteristică

$$\det[-p^2[M] + [K]] = 0, \tag{43}$$

din care rezultă pulsațiile proprii p_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$.

Cele șase moduri proprii sînt definite prin relațiile:

$$\hat{\bar{\Delta}}_i = \hat{\bar{\Delta}}_{0i} \cos(p_i t - \varphi_i) \quad i = 1, 2, \ldots, 6. \tag{44}$$

Notînd cu $(\bar{\theta}_{0i}, \bar{\delta}_{0i})$ torsorul, față de sistemul de referință fix $O_0X_0Y_0Z_0$, ce corespunde șurubului $\hat{\bar{\Delta}}_{0i}$, rezultă că axa (D_{0i}) a șurubului are ecuația vectorială

$$\bar{r} = \frac{\bar{\theta}_{0i} \times \bar{\delta}_{0i}}{\theta_{0i}^2} + \lambda \bar{\theta}_{0i}, \tag{45}$$

iar deplasarea minimă se scrie:

$$\bar{\delta}_{0i\,min} = \frac{\bar{\theta}_{0i}\bar{\delta}_{0i}}{\theta_{0i}^2} \bar{\theta}_{0i}. \tag{46}$$

Reprezentarea parametrilor esențiali ai șurubului $\hat{\bar{\Delta}}_{0i}$ este redată în figura 4.

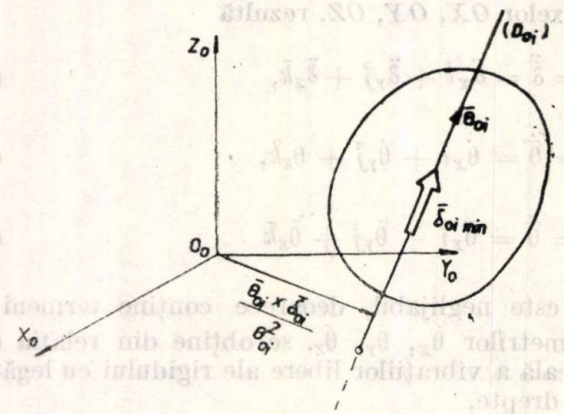


Fig. 4. — Reprezentarea unui mod de vibrație.

Mișcarea rigidului după modul de vibrație cu numărul i este o mișcare de șurub oscilatorie cu axa fixă (D_{0i}), variațiile unghiului de rotație $\bar{\theta}_i$ și a deplasării $\bar{\delta}_{i\,min}$ în lungul axei, fiind date de relațiile

$$\bar{\theta}_i = \bar{\theta}_{0i} \cos(p_i t - \varphi_i); \quad \bar{\delta}_{i\,min} = \bar{\delta}_{0i\,min} \cos(p_i t - \varphi_i), \tag{47}$$

pasul mișcării de șurub fiind :

$$h = 2\pi \frac{\overline{\theta}_{0i}\,\overline{\delta}_{0i}}{\theta_{0i}^2}. \tag{48}$$

Prin compararea celor șase moduri de vibrație se obține mișcarea rigidului în cazul general.

6. DECUPLAREA VIBRAȚIILOR DE TRANSLAȚIE FAȚĂ DE VIBRAȚIILE DE ROTAȚIE

Ecuația matriceală (40), ținînd seama de relațiile (12) (28), se descompune în ecuațiile matriceale :

$$\begin{aligned} &[G]^T\{\ddot{\theta}\} + [m]\,\{\ddot{\delta}\} + [K_{12}]\,\{\theta\} + [K_{11}]\,\{\delta\} = \{0\}, \\ &[J]\{\ddot{\theta}\} + [G]\,\{\ddot{\delta}\} + [K_{22}]\,\{\theta\} + [K_{21}]\,\{\delta\} = \{0\}. \end{aligned} \tag{49}$$

Din aceste ecuații rezultă că decuplarea vibrațiilor de rotație față de cele de translație se realizează atunci cînd

$$[G] = [0], \tag{50}$$

$$[K_{12}] = [K_{21}] = [0]. \tag{51}$$

Relațiile (50), (51) arată în ordine că originea sistemului de referință $OXYZ$ trebuie să coincidă atît cu centrul de greutate, cît și cu [7] centrul elastic al sistemului.

Dacă aceste condiții sînt realizate, sistemul (49) se scrie :

$$[m]\,\{\ddot{\delta}\} + [K_{11}]\,\{\delta\} = \{0\}, \tag{52}$$

$$[J]\,\{\ddot{\theta}\} + [K_{22}]\,\{\theta\} = \{0\}. \tag{53}$$

În cazul în care axele principale centrale de inerție coincid cu axele principale elastice, matricele $[K_{11}]$, $[K_{22}]$, $[J]$ devin matrice diagonale și se obține și decuplarea componentelor de translație, respectiv de rotație între ele.

În acest caz modurile proprii de vibrație de rotație au axele comune cu axele modurilor proprii de vibrație de translație.

Dacă însă axele principale de inerție nu coincid cu axele principale elastice atunci direcțiile modurilor proprii de translație coincid cu axele principale elastice însă direcțiile modurilor proprii de rotație nu coincid nici cu axele principale de inerție nici cu axele principale elastice și nu sînt în general, nici ortogonale.

7. SISTEM CU DOUĂ PLANE DE SIMETRIE ȘI PATRU LEGĂTURI ELASTICE

Considerăm rigidul cu legături elastice din figura 5, cu sistemul de referință $OXYZ$, unde O coincide cu centrul de greutate, iar axele coincid cu axele principale de inerție, planele OXZ și OYZ fiind plane de simetrie.

Notînd cu O^* mijlocul barei AB, cu X_0, Y_0, Z_0, coordonatele punctului O^*, cu α_i, β_i, γ_i $(i = 1, 2, 3)$ cosinusurile directoare ale axelor O^*x, O^*y, O^*z, cu l_i, m_i, n_i $(i = 1, 2, 3)$ proiecțiile pe axele OX, OY, OZ ale vectorilor $\overline{OO^*} \times \bar{i}$, $\overline{OO^*} \times \bar{j}$, $\overline{OO^*} \times \bar{k}$, $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ fiind versorii axelor O^*x,

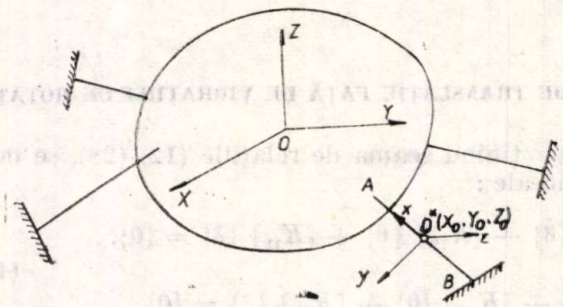


Fig. 5. — Sisteme cu două plane de simetrie ($X = 0$, $Y = 0$).

O^*y, O^*z, ținînd seama de relațiile (21), (22), (23), (24) se obține matricea de rigiditate $[K_{AB}]$ a barei AB care se exprimă prin relația (26).

Matricea de rigiditate $[K]$ a sistemului se obține cu ajutorul relației :

$$[K] = \Sigma[K_{AB}]. \tag{54}$$

Potrivit cu cele stabilite în lucrarea [7] rezultă că simetria față de planul OYZ conduce la faptul că elementele componentelor matriceale $[K_{11}]$, $[K_{22}]$ ale matricei (54) nesituate pe diagonala principală dar situate pe linia și coloana întîi sînt nule în timp ce elementele matricelor $[K_{12}]$, $[K_{21}]$ sînt diferite de zero numai cele nesituate pe diagonala principală dar situate pe linia și coloana întîi. Pentru simetriile față de planele OXZ, OYZ, se procedează în mod analog luîndu-se în discuție elementele liniei și coloanei a doua, respectiv a treia.

Ținînd seama de acestea, matricea (54) se scrie

$$[K] = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{k}_7 & 0 & \tilde{k}_1 & 0 & 0 \\ \tilde{k}_8 & 0 & 0 & 0 & \tilde{k}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{k}_3 \\ \tilde{k}_4 & 0 & 0 & 0 & \tilde{k}_8 & 0 \\ 0 & \tilde{k}_5 & 0 & \tilde{k}_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{k}_6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{55}$$

unde

$$\tilde{k}_1 = \Sigma\, k_i\alpha_i^2\,;\ \tilde{k}_2 = \Sigma\, k_i\beta_i^2\,;\ \tilde{k}_3 = \Sigma\, k_i\gamma_i^2, \tag{56}$$

$$\tilde{k}_4 = \Sigma(k_{3+i}\alpha_i^2 + k_i l_i^2)\,;\ \tilde{k}_5 = \Sigma(k_{3+i}\beta_i^2 + k_i m_i^2)\,;\ \tilde{k}_6 = \Sigma(k_{3+i}\gamma_i^2 + k_i n_i^2), \tag{57}$$

$$\tilde{k}_7 = \Sigma k_i\alpha_i m_i\,;\ \tilde{k}_8 = \Sigma k_i\beta_i l_i. \tag{58}$$

Sistemul de ecuații diferențiale al vibrațiilor rigidului, potrivit cu relațiile (52), (53), se scrie

$$m\ddot{\delta}_X + \tilde{k}_7\theta_Y + \tilde{k}_1\delta_X = 0,$$
$$J_Y\ddot{\theta}_Y + \tilde{k}_5\theta_Y + \tilde{k}_7\delta_X = 0, \tag{59}$$

$$m\ddot{\delta}_Y + \tilde{k}_8\theta_X + \tilde{k}_2\delta_Y = 0, \tag{60}$$
$$J_X\ddot{\theta}_X + \tilde{k}_4\theta_X + \tilde{k}_8\delta_Y = 0,$$

$$m\ddot{\delta}_Z + \tilde{k}_3\delta_Z = 0,$$
$$J_Z\ddot{\theta}_Z + \tilde{k}_6\theta_Z = 0 \tag{61}$$

și arată că vibrațiile de translație și vibrațiile de rotație pe direcția axei OZ sînt decuplate.

Pentru decuplarea celorlalte vibrații este necesar a realiza condițiile

$$\tilde{k}_7 = \tilde{k}_8 = 0. \tag{62}$$

În acest scop vom considera ca exemplu sistemul din figura 6 format dintr-un paralelipiped suspendat pe patru bare elastice înclinate și simetrice.

Notînd cu φ unghiul dintre bara AB și axa OZ și cu β unghiul dintre axa OX și proiecția segmentului AB pe planul XOY, alegînd axa O^*z

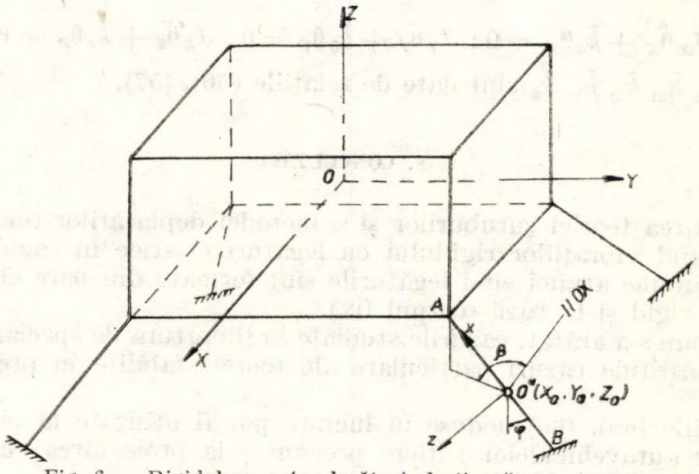


Fig. 6. — Rigidul cu patru legături elastice (bare) simetrice.

în planul format de bara AB și paralela la axa OZ, notînd funcțiile cos, sin prin c, s, rezultă

$$\alpha_1 = -s\varphi c\beta;\ \beta_1 = -s\varphi s\beta;\ \gamma_1 = c\varphi,$$
$$\alpha_2 = -s\beta;\ \beta_2 = c\beta;\ \gamma_2 = 0, \tag{63}$$
$$\alpha_3 = -c\varphi c\beta;\ \beta_3 = -c\varphi s\beta;\ \gamma_3 = -s\varphi,$$

$$l_1 = Y_0 c\varphi + Z_0 s\varphi s\beta\,;\; m_1 = -Z_0 s\varphi c\beta - X_0 c\varphi\,;\; n_1 = -X_0 s\varphi s\beta + Y_0 s\varphi c\beta,$$
$$l_2 = -Z_0 c\beta\,;\; m_2 = -Z_0 s\beta\,;\; n_2 = X_0 c\beta + Y_0 s\beta, \tag{64}$$
$$l_3 = -Y_0 s\beta + Z_0 c\varphi s\beta\,;\; m_3 = -Z_0 c\varphi c\beta + X_0 s\varphi\,;\; n_3 = -X_0 c\varphi s\beta + Y_0 c\varphi c\beta$$

şi ţinînd seama de relaţiile (58), (62), se obţin condiţiile de decuplare :

$$X_0(k_1 - k_3) s\varphi c\varphi c\beta + Z_0[k_2 s^2\beta + (k_1 s^2\varphi + k_3 c^2\varphi)c^2\beta] = 0, \tag{65}$$

$$Y_0(k_1 - k_3)\, s\varphi c\varphi s\beta + Z_0[k_2 c^2\beta + (k_1 s^2\varphi + k_3 c^2\varphi)s^2\beta] = 0. \tag{66}$$

Într-o aplicaţie numerică, dacă se consideră

$$k_1 = 3k_2 = 3k_3\,;\; Y_0 = \frac{5\sqrt{3}}{7} X_0\,;\; Z_0 = -\frac{2\sqrt{3}}{7} X_0, \tag{67}$$

se obţine soluţia

$$\varphi = 54^\circ\,;\quad \beta = 30^\circ. \tag{68}$$

În cazul în care se consideră barele înclinate într-un singur plan ($\beta = 0$), caz rezolvat în lucrarea [2] se realizează numai condiţia $\tilde{k}_7 = 0$ şi se obţine numai decuplarea vibraţiilor definite prin ecuaţiile (59), vibraţiile definite prin ecuaţiile (60) rămînînd în continuare cuplate.

Revenind la cazul analizat, rezultă că dacă sînt îndeplinite condiţiile (65), (66) vibraţiile rigidului sînt decuplate şi au ecuaţiile

$$m\ddot{\delta}_X + \tilde{k}_1\delta_X = 0\,;\; m\ddot{\delta}_Y + \tilde{k}_2\delta_Y = 0\,;\; m\ddot{\delta}_Z + \tilde{k}_3\delta_Z = 0,$$
$$J_X\ddot{\theta}_X + \tilde{k}_4\theta_X = 0\,;\; J_Y\ddot{\theta}_Y + \tilde{k}_5\theta_Y = 0\,;\; J_Z\ddot{\theta}_Z + \tilde{k}_6\theta_Z = 0, \tag{69}$$

unde $\tilde{k}_1$, $\tilde{k}_2$, $\tilde{k}_3$, $\tilde{k}_4$, $\tilde{k}_5$, $\tilde{k}_6$ sînt date de relaţiile (56), (57).

8. CONCLUZII

Utilizarea teoriei şuruburilor şi a metodei deplasărilor relative face posibil studiul vibraţiilor rigidului cu legături elastice în cazul cel mai general şi anume atunci cînd legăturile sînt formate din bare elastice încastrate în rigid şi la bază (corpul fix).

Aşa cum s-a arătat, cazurile studiate în literatura de specialitate [1], [2], [3] constituie cazuri particulare ale teorei stabilite în prezenta lucrare.

Relaţiile (65), (66) deduse în lucrare pot fi utilizate la proiectarea suspensiilor autovehiculelor rutiere precum şi la proiectarea suspensiilor motoarelor cu vibraţii decuplate.

Primit la redacţie la 10 aprilie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. F. DIMENTBERG, *Teoriya vintov i ee prilozheniya*, Nauka, Moskva, 1978.
2. C. HARRIS, CH. CREDE, *Şocuri şi vibraţii*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1968.
3. M. MUNTEANU *Dynamics of single-mass vibrating machines mounted on elastic supports (general case)*. Buletinul Institutului Politehnic, Bucureşti. Seria mecanică, **XLVI–XLVII** (1984–1985).

4. N. PANDREA *Metoda deplasărilor relative în calculul sistemelor elastice*, Buletinul de comunicări științifice al I. I. S. Pitești (1978).
5. N. PANDREA, MARINA PANDREA, *Calculul eforturilor și deplasărilor în sisteme hibride cu ajutorul teoriei șuruburilor*, Simpozionul „Creația tehnică și fiabilitatea în construcția de mașini", I. P. Iași, vol. Mecanica, 1983.
6. N. PANDREA, E. PERIANU, *Metoda deplasărilor relative în calculul elastic al mecanismului de complianță RCC*, Simpozionul național de roboți industriali. Vol. II, București, 1985.
7. N. PANDREA, MARINA PANDREA, *Determinarea centrului elastic prin metoda deplasărilor relative*, St. mec. apl., **46**, 5 (1987).
8. M. TOFAN, I. GOIA, *L'assemblage des éléments discrets d'incidence par leur position*. Al IV-lea simpozion național de tensometrie, Vol. I, Brașov, 1986.
9. V. VÂLCOVICI, ȘT. BĂLAN R. VOINEA, *Mecanica teoretică*, Edit. tehnică, 1968.
10. R. VOINEA, D. VOICULESCU, V. CEAUȘU, *Mecanica*. Edit. Didactică și Pedagogică-București, 1983.

MODELAREA CURGERII INDUSE DE AMESTECĂTORUL TIP TURBINĂ CU PALE DREPTE, ÎN RECIPIENTE PREVĂZUTE CU DISPOZITIVE DE AMESTECARE

de GH. D. PASAT şi M. RENERT

Institutul Politehnic, Bucureşti

În lucrare se abordează modelarea matematică a curgerii induse de turbina cu pale drepte (standard) pe baza teoriei jeturilor submerse. Pe baza ipotezelor formulate s-a putut realiza rezolvarea analitică a sistemelor de ecuaţii Navier-Stokes şi de continuitate, ceea ce a permis precizarea componentelor cîmpului de viteze. Verificarea modelului matematic s-a realizat prin compararea cu date experimentale prezentate în literatura consultată.

1. GENERALITĂŢI

Amestecarea, operaţie fundamentală în tehnica proceselor, se regăseşte sub diferite forme, în cvasitotalitatea tehnologiilor chimice şi biochimice [1—3]. În condiţiile actuale, de intensificare a proceselor fizico-chimice şi de extindere a biosintezei, se remarcă o dezvoltare vertiginoasă a tehnologiilor bazate pe amestecare, fapt ce a impus diversificarea tipurilor de reactoare şi a dispozitivelor lor de amestecare, la acestea din urmă extind tendinţa de utilizare a celor de turaţie ridicată (numite rapide). Din grupa amestecătoarelor rapide (elice, impeller, disc, turbină), turbina cu pale drepte numită standard sau Rushton, este mai des utilizată datorită simplităţii constructive şi a spectrului larg de operaţii în care şi-a dovedit eficienţa.

Obţinerea unor randamente ridicate în ceea ce priveşte procesele fizico-chimice din reactoarele prevăzute cu dispozitive mecanice de amestecare necesită modelarea proceselor şi fenomenelor din reactor. Din punct de veder al dimensionării mecanice a dispozitivelor de amestecare şi amenajărilor interioare prezintă inters modelarea curgerii induse de diferitele tipuri de amestecătoare.

2. MODELAREA CURGERII INDUSE DE AMESTECĂTOARE

Modelarea matematică a reactoarelor chimice şi biochimice prevăzute cu dispozitive de amestecare presupune o analiză calitativă şi cantitativă a procesului de amestecare, ceea ce este dificil de realizat, datorită numărului mare de factori care îl influenţează [4].

Marea majoritate a lucrărilor apărute în acest domeniu se ocupă de modelarea matematică a procesului chimic din reactor în condiţii de amestecare, pe baza transferului de substanţă [5] — [8] şi, în legătură cu aceasta, de regimul de curgere din reactor (transferul de moment) [9]—[11].

Modelarea matematică a procesului chimic în corelaţie cu regimul de curgere promovat de amestecător este abordară de Liepe [12], care

propune modelarea proceselor de transfer de substanță considerate ca procese de scară macro (fig. 1) prin utilizarea unui model simplificat al curgerii (cu recirculare) promovate de amestecător (fig. 2) în condițiile aerării mediului lichid (mediu bifazic lichid-gaz).

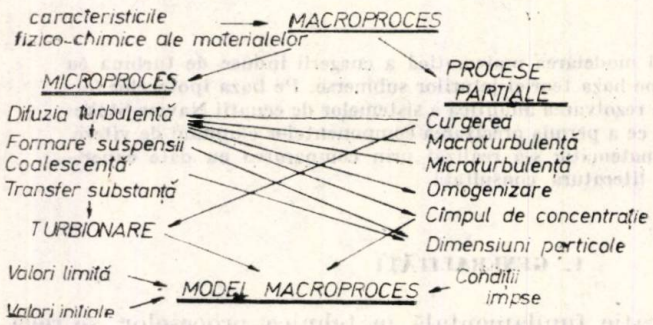


Fig. 1. — Modelul Liepe [12].

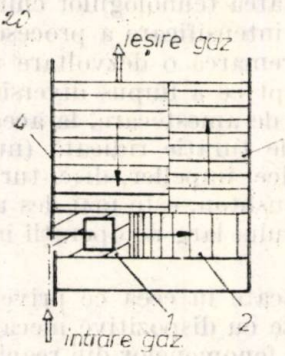


Fig. 2. — Modelul simplificat al curgerii [12] : *1* — zona de dispersare; *2* — zonă radială de curgere; *3* — zonă ascensională; *4* — zona de recirculare.

Din punctul de vedere al dimensionării dispozitivelor de amestecare și a amenajărilor interioare (șicane, spărgătoare de val etc.) prezintă interes modelele hidrodinamice ale curgerii induse de amestectătoare. Platzer [13] consideră că din punct de vedere al transferului de moment se disting două grupe de modele :

— grupa rezolvărilor numerice a ecuațiilor de transport simplificate, care, în general, se referă la curenții staționari, la condiții izoterme de curgere, medii omogene, incompensibile etc., și

— grupa modelelor specifice unui/unor domenii, pentru care rezolvarea analitică este posibilă, ceea ce prespune „compartimentarea" vasului în domenii (regiuni) și elaborarea pentru fiecare dintre domenii a unui model matematic adecvat și asamblarea acestor modele prin impunerea condițiilor de legătură și a celor la limită.

O evoluție remarcabilă în modelarea matematică a curgerii în reactoarele prevăzute cu dispozitive de amestecare a constituit-o utilizarea teoriei jeturilor [13], [14], de către De Souza [15] și ulterior Ambegaukar [16], care realizează primele modele ale zonei din imediata apropiere a amestecătorului tip turbină.

2.1. MODELUL JETULUI IMERSAT TANGENȚIAL, CILINDRIC ȘI DIVERGENT

Utilizarea amestecătorului tip turbină conduce, datorită turației ridicate la care lucrează, la formarea vîrtejului central care are efecte negative asupra procesului de amestecare [1]—[3] și asupra funcționării liniștite a dispzitivului de amestecare în ansamblul său [4], [17], [18]. Pentru distrugerea vîrtejului central, în practica curentă se utilizează amenajări interioare de tipul șicanelor, spărgătoarelor de vîrtej etc. Plasarea amenajărilor interioare și, în special, a șicanelor, modifică simetria de rotație în recipientul cilindric, ceea ce obligă la utilizarea unor modele matematice privind curgerea, adecvate noilor condiții.

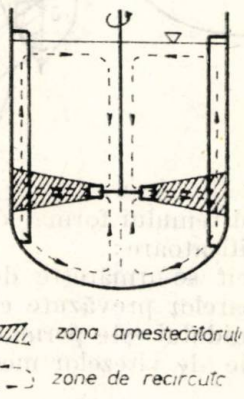


Fig. 3 — Delimitarea zonelor de curgere.

Studiul curegrii se va face prin divizarea volumului unui reactor cilindric în două domenii (fig. 3), urmărind a se elabora un model matematic al zonei amestecătorului, datorită importanței sale în studiul proceselor de amestecare, al eficacității amestecării, al solicitărilor mecanice ale recipientului și ale amenajărilor cu care acesta este prevăzut.

În această zonă, fluidul se află în contact cu sursa de energie (turbina), apar și se manifestă viteze și gradienți de viteze mari.Turbulența este puternică, iar tensiunile din fluid sînt considerabile. Este zona în care cea mai mare parte a energiei transmisă mediului prin intermediul turbinei este disipată, iar viteza de disipare a energiei este mare.

În recipientele cilindrice prevăzute cu șicane, efectul produs de turbină asupra fluidului poate fi echivalat cu cel al unui jet imersat tangențial, cilindric, divergent [4], [15], [16].

Descrierea cîmpului de viteze în zona jetului se face pe baza ecuațiilor Navier-Stokes și de continuitate, considerîndu-se că în această zonă curgerea este turbulentă [1], [4], [15], 16];

$$\bar{\rho}\frac{D\bar{U}}{Dt} = -\nabla\bar{p} + [\nabla\bar{\tau}] + \overline{F_i}, \tag{1}$$

$$\nabla\bar{U} = 0, \tag{2}$$

unde $\bar{U}$ reprezintă viteza medie a elementului de fluid, $\bar{p}$ — presiunea medie, $\bar{\tau}$ — tensorul tensiunilor, $\bar{\rho}$ -densitatea medie a fluidului, $\bar{F}_i$ — componentele forțelor masice medii, D/Dt — derivata substanțială.

Studiul mișcării fenomenului se face alegînd un sistem de coordonate cilindrice (fig. 4), componentele vitezei medii $\overline{U}$ fiind $\bar{u}_r$, $\bar{u}_\varphi$ și $\bar{u}_z$.

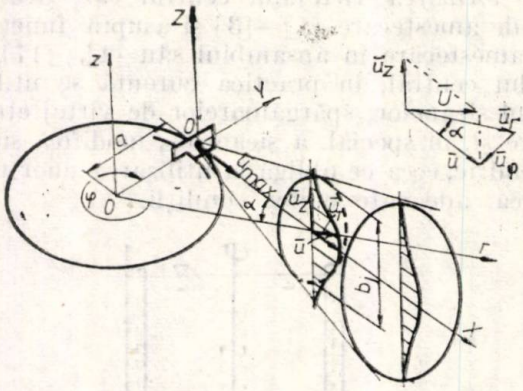


Fig. 4. — Modelul jetului imersat, tangențial, cilindric și divergent.

Asupra sistemului format din ecuațiile (1) și (2) se fac următoarele ipoteze simplificatoare:

1. Întrucît se urmărește descrierea regimului staționar, de funcționare al reactoarelor prevăzute cu dispozitive de ametecare, se consideră că mișcarea fluidului este permanentă, ceea ce conduce la neglijarea derivatelor parțiale ale vitezelor medii în raport cu timpul:

$$\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}_\varphi}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t} = 0. \tag{3}$$

2. Datorită caracterului axial simetric al curgerii în imediata apropiere a amestecătorului, rezultă că viteza medie $\overline{U}$ depinde numai de două variabile independente, r și z.

3. Din punct de vedere macroscopic, mediul poate fi considerat izotrop, omogen și incompresibil.

4. Se admite că din punct de vedere reologic, fluidul are o comportare newtoniană.

5. Se neglijează variația presiunii.

6. Asimilarea curgerii induse de turbină cu cea a jetului imersat, tangențial, cilindric și divergent, permite neglijarea tensorului tensiunilor și derivatelor lor, cu excepția tensunilor $\overline{\tau}_{rz}$ și $\overline{\tau}_{\varphi z}$ și a derivatelor lor în raport cu variabila z [4], [13].

7. Curgerea indusă de turbină este izotropică, ceea ce implică invarianța proprietăților statistice față de direcția axelor de coordonate și permite utilizarea ipotezei ergodice [4].

În condițiile ipotezelor simplificatoare precizate, sistemul de ecuații (1)—(2), transcris în coordonate cilindrice, devine:

$$\bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z} - \frac{\bar{u}_\varphi^2}{r} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{\tau}_{rz}}{\partial z},$$

$$\bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_\varphi}{\partial r} + \frac{\bar{u}_r \bar{u}_\varphi}{r} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_\varphi}{\partial z} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\rho \bar{\tau}_{\varphi z}}{\partial z}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot \bar{u}_r) + \frac{\partial}{\partial z}(r \cdot \bar{u}_z) = 0.$$

Prin utilizarea conceptului „turbulenței libere" elaborat de Prandtl [19], concept care permite stabilirea unei relații între tensiunile și deformațiile specifice curgerii turbulente unidimensionale, rezultă [19]:

$$\bar{\tau}_z = \bar{\eta}_t \cdot \frac{\mathrm{d}\bar{u}_z}{\mathrm{d}z}, \tag{5}$$

unde $\bar{\eta}_t$ reprezintă viscozitatea dinamică turbulentă, medie.

În cazul jetului submers tangențial, în baza celor de mai sus, rezultă

$$\bar{\tau}_{rz} = \bar{\eta}_t \left(\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial r} \right), \tag{6}$$

$$\bar{\tau}_{\varphi z} = \bar{\eta}_t \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial \bar{u}_\varphi}{\partial z} \right). \tag{7}$$

Datorită simetriei de rotație, $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \varphi} = 0$, iar $\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} \ll \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z}$, ceea ce conduce pentru tensiuni la

$$\bar{\tau}_{rz} = \bar{\eta}_t \cdot \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z}, \tag{6'}$$

$$\bar{\tau}_{\varphi z} = \bar{\eta}_t \cdot \frac{\partial \bar{u}_\varphi}{\partial z}. \tag{7'}$$

Prin utilizarea relațiilor (6') și (7') sistemul (4) devine:

$$\bar{u}_r \cdot \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \bar{u}_z \cdot \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z} - \frac{\bar{u}_\varphi^2}{r} = \frac{\bar{\eta}_t}{\bar{\rho}} \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial z^2},$$

$$\bar{u}_r \cdot \frac{\partial \bar{u}_\varphi}{\partial r} + \bar{u}_z \cdot \frac{\partial \bar{u}_\varphi}{\partial z} + \frac{\bar{u}_r \bar{u}_\varphi}{r} = \frac{\bar{\eta}_t}{\bar{\rho}} \frac{\partial^2 \bar{u}_\varphi}{\partial z^2}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot \bar{u}_r) + \frac{\partial}{\partial z}(r \cdot \bar{u}_z) = 0.$$

În condițiile geometrice specifice jetului tangențial (fig. 4), între componentele $\bar{u}_\varphi$ și $\bar{u}_r$ există relația:

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM 1848 KÖNYVTÁRA

$$\bar{u}_\varphi = \bar{u}_r \cdot \operatorname{tg}\alpha, \tag{9}$$

iar

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}}, \tag{10}$$

unde α este unghiul dintre direcţiile tangenţială şi radială de curgere, r — raza curentă, iar a este raza sursei cilindrice.

Utilizarea relaţiilor (9) si (10) în rezolvarea sistemului (8) conduce la concluzia că primele două ecuaţii ale sistemului (8) sînt indentice [4], deci acesta se reduce la :

$$\begin{gathered} \bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z} - \frac{\bar{u}_\varphi^2}{r} = \frac{\bar{\eta}_t}{\bar{\rho}} \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial}{\partial r}(r\bar{u}_r) + \frac{\partial}{\partial z}(r\bar{u}_z) = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Condiţiile la limită impuse sistemului (11) sînt cele corespunzătoare modelului jetului divergent [13], [14] :

$$\begin{gathered} \bar{u}_r = 0 \text{ şi } \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z} = 0 \text{ la } z = \pm\infty \text{ şi } r \geqslant a, \\ \bar{u}_z = 0 \text{ şi } \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z} = 0 \text{ la } z = 0 \text{ şi } r \geqslant a. \end{gathered} \tag{12}$$

Reynolds [20] arată că, în condiţiile curgerii divergente, viteza medie este independentă de densitate, viscozitate şi numărul Reynolds, cu condiţia ca aceasta să fie suficient de mare, pentru a asigura mişcarea turbulentă complet dezvoltată. De asemenea, Reynolds arată că în curgerile provocate de jeturile submerse se pot utiliza funcţiile de automodelare, deci aceste curgeri sînt curegri automodelate.

În baza celor de mai sus, în astfel de curgeri se poate defini viscozitatea cinematică aparentă în funcţie de viteza maximă a jetului [20],

$$\bar{\varepsilon}_{ta} = k \frac{x}{\Omega} \cdot \bar{u}_{max}, \tag{13}$$

unde k este o constantă; x — direcţia de propagare a jetului (fig. 4); Ω — parametrul specific modelului jetului tangenţial [4]; $\bar{u}_{max}$ — valoarea maximă a vitezei $\bar{u}$ (fig. 4).

Pentru rezolvarea sistemului (11) se propune soluţia de forma :

$$\bar{u} = \bar{u}_{max} \cdot F'(x, z), \tag{14}$$

relaţie în care F' reprezintă derivata funcţiei de automodelare F.

Printr-o schimbare adecvată de variabile:

$$\sigma = \Omega \cdot \frac{z}{x} \tag{15}$$

şi prin introducerea variabilelor adimensionale (pentru a se mări gradul de generalitate):

$$\bar{r} = \frac{r}{R}\ ;\ \bar{z} = \frac{z}{R}\ ;\ \bar{a} = \frac{a}{R}, \tag{16}$$

R fiind raza recipientului cilindric, sistemul (11) şi relaţiile (13) (14) devin:

$$\bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{z}} - \frac{\bar{u}_\varphi^2}{\bar{r}} = \frac{\bar{\varepsilon}_{ta}}{R} \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \bar{z}^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{r} \cdot \bar{u}_r) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\bar{r} \cdot \bar{u}_z) = 0 \tag{17}$$

şi

$$\bar{\varepsilon}_{ta} = k\, R \frac{(\bar{r}^2 - \bar{a}^2)^{0,5}}{\Omega} \bar{u}_{max}, \tag{18}$$

respectiv

$$\bar{u} = \bar{u}_{max} \cdot F'(\bar{\sigma}), \tag{19}$$

relaţie în care

$$\bar{\sigma} = \Omega \cdot \frac{\bar{z}}{(\bar{r}^2 - \bar{a}^2)^{0,5}}. \tag{15'}$$

Pe de altă parte, componentele $\bar{u}_r$ şi $\bar{u}_z$ ale cîmpului de viteze se pot defini prin intermediul funcţiei de curent ψ;

$$\bar{u}_r = \frac{1}{\bar{\rho} \cdot r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{şi} \quad \bar{u}_z = -\frac{1}{\bar{\rho} \cdot r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{20}$$

sau, utilizînd variabilele adimensionale (16),

$$\bar{u}_r = \frac{1}{\bar{\rho} R^2 \bar{r}} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} \quad \text{şi} \quad \bar{u}_z = -\frac{1}{\bar{\rho} \cdot R^2 \cdot \bar{r}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{r}}. \tag{20'}$$

Prin considerearea relaţiilor (9), (10), (14), şi (15') componenta vitezei pe direcţie radială $\bar{u}_r$ se poate scrie sub forma:

$$\bar{u}_r = \frac{\bar{\varepsilon}_{ta} \cdot \Omega}{k \cdot \bar{r} \cdot R} F'\left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right). \tag{21}$$

Din relaţiile (20') şi (21) rezultă:

$$\mathrm{d}\psi = \frac{\bar{\rho} \cdot R \cdot \bar{\varepsilon}_{ta} \cdot \Omega}{k} \cdot F'\left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right) \cdot \mathrm{d}\bar{z},$$

iar prin integrare [4] se obține expresia funcției de curent

$$\psi = 2\frac{\bar{\rho}\cdot R\cdot \bar{\varepsilon}_{ta}}{k}(\bar{r}^2-\bar{a}^2)^{0,5}\cdot F\left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right), \tag{22}$$

ceea ce permite calculul componentei axiale $\bar{u}_z$:

$$\bar{u}_z = -\frac{2\bar{\varepsilon}_{ta}}{k\cdot R\cdot(\bar{r}^2-\bar{a}^2)^{0,5}}F\left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right)+\frac{\Omega\cdot\bar{z}\cdot\bar{\varepsilon}_{ta}}{k\cdot R\cdot(\bar{r}^2-\bar{a}^2)}F'\left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right), \tag{23}$$

Înlocuind valorile $\bar{u}_r$ (rel. 21) și $\bar{u}_z$ (rel. 23) în sistemul (17), rezultă

$$F'''\left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right)+\frac{4}{k\Omega}\left[F\left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right)F''\left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right)+F'^2\left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right)\right]=0. \tag{24}$$

Rezolvarea analitică a ecuației (24) este posibilă dacă

$$\frac{4}{k\Omega}=1, \tag{25}$$

condiție valabilă în cazul curgerilor automodelate [20].

Ecuația (24) admite soluția:

$$F\left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right)=\mathrm{th}\left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right), \tag{26}$$

ea verificînd condițiile la limită (12).

Rezolvarea sistemului (17) permite determinarea funcției de curent ψ și a componentelor cîmpului de viteză $\bar{u}_r$, $\bar{u}_\varphi$ și $\bar{u}_z$, după cum urmează:

$$\psi=\frac{\Omega\cdot\bar{\rho}\cdot R\cdot\bar{\varepsilon}_{ta}}{2}(\bar{r}^2-\bar{a}^2)^{0,5}\cdot\mathrm{th}\left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right), \tag{27}$$

$$\bar{u}_r=\bar{u}_{max}\cdot\frac{(\bar{r}^2-\bar{a}^2)^{0,5}}{\bar{r}}\cdot\left[1-\mathrm{th}^2\left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right)\right], \tag{28}$$

$$\bar{u}_\varphi=\bar{u}_r\frac{\bar{a}}{(\bar{r}^2-\bar{a}^2)^{0,5}},$$

$$\bar{u}_z=-\frac{\bar{u}_{max}}{\Omega}\left\{2\mathrm{th}\left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right)-\bar{\sigma}\left[1-\mathrm{th}^2\left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right)\right]\right\}.$$

Din condiția de conservare a energiei specifice transmisă de turbină mediului [4], rezultă

$$\bar{u}_{max}=\frac{A}{2R}\left(\frac{\Omega}{\bar{r}}\right)^{0,5}(\bar{r}^2-\bar{a}^2)^{-0,25}, \tag{29}$$

în care A reprezintă un parametru al curgerii.

Din cele ce preced rezultă că modelul curgerii în zona amestecătorului depinde de parametrii Ω, A și a. Aceștia se determină pe baza analizei dimensionale și a teoriei similitudinii aplicate în cazul concret al dispozitivelor de amestecare [4] și au expresiile:

$$\Omega = 4{,}44\frac{Eu^{0,5}}{N_Q^{1,5}}, \tag{30}$$

$$A = 0{,}593\frac{Eu^{1/3}}{\Omega^{1/6}} \cdot n\bar{d}^2, \tag{31}$$

$$\bar{a} = 0{,}406\ \bar{d}, \tag{32}$$

relații în care Eu reprezintă criteriul Euler $\left(Eu = \frac{P}{\rho \cdot n^3 \cdot d^5}\right)$; N_Q — debitul adimensional al turbinei $\left(N_Q = \frac{Q}{nd^3}\right)$; d — diametrul (anvergura) turbinei; $\bar{d}$ — diametrul adimensional al turbinei; n — turația amestecătorului; Q — debitul turbinei; P — puterea necesară acționării amestecătorului tip turbină.

3. VERIFICAREA MODELULUI MATEMATIC AL CURGERII INDUSE DE TURBINĂ

Verificarea modelului matematic al curegrii induse de turbină, considerată ca un jet submers, tangențial, cilindric și divergent, s-a realizat prin compararea rezultatelor teoretice obținute cu rezultate experimentale prezentate în literatura consultată [21] — [26].

În mod uzual, în cazul curgerii induse de turbină, se determină numai valorile medii ale componentelor radială și tangențială ($\bar{u}_r$ și $\bar{u}_\varphi$) ale vitezei, neacordîndu-se atenție componentei axiale ($\bar{u}_z$) datorită valorilor ei mici.

Pentru a realiza o mai bună comparație între datele teoretice (calculate în baza unor programe de calcul [4]) cu cele obținute experimental s-a calculat viteza medie $\bar{V}$, conform relației

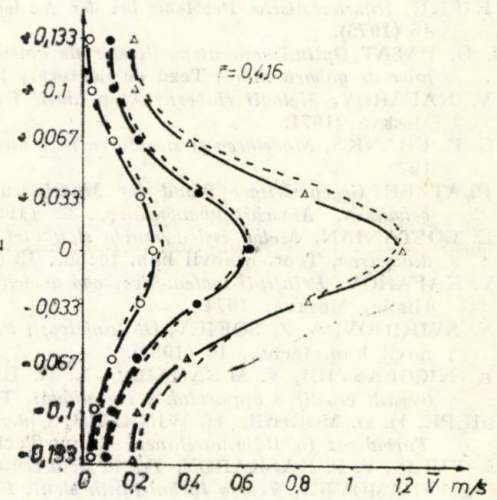


Fig. 5. — Dependența vitezei medii V de turație. valori calculate în baza relației (33); valori experimentale [27]; 0 — n = 66 rot/min; 0 — n = 131 rot/min; Δ — n = 250rot/min.

$$\bar{V} = (\bar{u}_r^2 + \bar{u}_\varphi^2 + \bar{u}_z^2)^{0,5}, \tag{33}$$

care s-a comparat cu cele prezentate de Oldshue [27], transpuse coordonatelor și mărimilor adimensionale din prezenta lucrare (fig. 5).

Din examinarea figurii 5 se observă buna concordanță dintre valorile teoretice și cele calculate cu observația că în imediata apropiere a planului $z = 0$ se observă o asimetrie a curgerii.

Această asimetrie a curgerii induse de trubină se datorește plasării asimetrice a turbinei pe înălțimea recipientului cilindric, respectiv la $\frac{h}{D} = 0{,}28$*, întrucît pentru valori $\frac{h}{D} = 0{,}5$ această asimetrie este nesemnificativă.

4. CONCLUZII

Modelul matematic al curgerii induse de turbină bazat pe teoria jeturilor submerse a condus la determinarea componentelor vitezei în zona amestecătorului. Verificarea modelului obținut a condus la obținerea unei concordanțe bune, abaterile între valorile calculate și cele determinate experimental încadrîndu-se în limitele $-7{,}3 \ldots + 8{,}7\%$ [4].

Primit la redacție la 12 februarie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. Z. A. VASILTEV, V. G. USAKOV, *Apparatii dlia peremeșivaniea jidkih sred*, Mașinastroenie, Leningrad, 1979.
2. M. BRUXELMANNE, *Aeration et agitation des reactors biochimiques*, Rev. Ferm. Ind. Alim. 18 (1985).
3. K. KIPKE, *Rührtechnische Probleme bei der Auslegung von Fermentern*, Chemie-Technik, 46 (1975).
4. GH. D. PASAT, *Optimizarea dispozitivelor de amestecare ale reactoarelor chimie și biochimice de gabarit mare*, Teză de doctorat, I. P. B., 1986.
5. V. V. KAFAROV, *Metodîi chibernetiki v himîi i himiceskoi tehnologîi*, Izd. 2-e, Himia, Moskva, t1971.
6. R. G. E. FRANKS, *Modelarea și simularea în industria chimică*, Edit. Tehnică, București, 1979.
7. B. PLATZER, *Gegenwärtiger Stand der Modellierung der Strömungsverhältnisse in Rührbehältern*, *Maschinenbautechnik*, 32 (1983).
8. A. E. COSTANIAN, *Metod issledovaniea strukturî potokov v protocinîh apparatah bol'șih diametrov*, Teor. osnovîi him. techn., 13 (1979).
9. V. V. KAFAROV, *Prințipîi matematiceskogo modelirovaniea himico-tehnologhiceskih sistem*, Himia, Moskva, 1974.
10. V. N. SVIRIDOV, A. Z. SOFIEV, *Ob usoicivosti himiceskih reactorov s meșenia*, Teor. osnovîi him. techn., 16 (1982).
11. E. K. NICOLASVILI, V. M.BARABAS, L. N. BRAGINKI, *Skorosti rastvoreniea tverdîh ceastiț v apparatah s meșalkami*, Teor. osnovîi him. tech., 14 (1980).
12. F. LIEPE, H. O. MOCHEL, H. WINKLER, *Untersuchungen über Homogesieren und übe Turbulentz in Rührmaschinen*, Chem. Tech., 23 (1971).
13. L. A. VULIS, V. P. KASKAROV, *Teoria strui reazkoi jidkostîi*, Fizmaghiz, Moskva, 1965
14. G. N. ABRAMOVICI, *Teoria turbulentnîh strui*, *Fizmaghizi* Moskva, 1960.
15. A. DE SOUZA, R. PIKE, *Fluid dynamics and flow pattens in stirred tanks with a turbine impeller*, Can. J. Chem. Eng., 50 (1972).

* Raportul h/D definește înălțimea de plasare a turbinei față de fundul recipientului cilindric.

16. J. MEDEK, I. FORT, *Contribution to the analysis of liquid macroflow in a cylindrical vessel wih a high speed impeller*, Coll. Czech. Chem. Com., 46 (1981).
17. W. BRUIJIN, K. VAN'T RIET, J. M. SMITH, *Power consumtion with aerated Rushton turbines*, Trans. Inst. Chem. Eng. 52 (1974).
18. K. VAN'T RIET, J. M. SMITH, *The behaviour of gas-liquid mixtures near Rushton turbine blades*, Chem. Eng. Sci., 28 (1973).
19. O. HINZE, *Turbulence*, Academic Press, New-York, 1975.
20. A. J. REYNOLDS, *Curgeri turbulente in tehnică*, Edit. Tehnică, București, 1982.
21. S. NAGATA, *Mixing. Principles and Applications*, J. Willey and Sons, New-York, 1975.
22. R. W. HICKS, J. R. MORTON, *How to design agitators for desired process response*, Chem. Eng., apr. (1976).
23. L. GATTES, J. R. MORTON, *Selecting agitators systems to suspend solids in liquids*, Chem. Eng., mai (1976).
24. B. PLATZER, G. NOLL, *Eine analytishe Näherungslösung für die Strömung in bewehrten. Behältern mit radial fördernden Rühren*, Chem. Tech., 33 (1981).
25. B. PLATZER, G. NOLL, *Die analytishe Berechnung der turbulenten Strömung in Rührbehäletern unter Berücksichtigung von gewölbten Böden* sowie von leitrohren, Chem. Tech., 37 (1985).
26. B. PLATZER, *Ein Beitrag zur Berechnung der turbulenten Strömung in bewölbten Behältern mit radial fördernden Rühren*, Chem. Tech., 33 (1981).
27. J. OLDSHUE, *Fermentation Mixing Scale-up Techniques*, Biotech. Bioeng., VIII (1966).

MODELE ŞI METODE DE CALCUL EXACTE ŞI APROXIMATIVE ÎN MECANICA STRUCTURILOR

D. DUBINĂ şi C. PACOSTE

Institutul Politehnic „Traian Vuia", Timişoara

În lucrare se formulează o teorie matematică a structurilor, încadrată în perimetrul analizei funcţionale, ca bază de elaborare şi dezvoltare a modelelor şi metodelor de calcul din mecanica structurilor. Se defineşte modelul de calcul din mecanica structurilor, care se generalizează prin introducerea noţiunii de cimp structural, şi se precizează teoremele în baza cărora se pot genera, din modelul exact, modelele de calcul aproximativ.

Calitatea modelelor aproximative se apreciază prin rezultatele obţinute în urma analizei convergenţei şi stabilităţii soluţiilor furnizate de către acestea. Pentru concretizare, această analiză se localizează în cadrul metodei elementelor finite particularizată pentru probleme liniare şi, respectiv, neliniare.

1. INTRODUCERE

Componentă a mecanicii solidului, mecanica structurilor conţine modelele fizice şi matematice pentru studiul stării de echilibru şi analiza stării de tensiuni şi deformaţii a structurilor şi elementelor structurale.

Considerînd aspectul matematic, pentru problemele de interes practic este important să se studieze analogiile formale dintre modelele de calcul, modul în care acestea pot genera unele din altele, de la modelul exact care guvernează problema către modelel de calcul numeric aproximativ.

Aria pe care se desfăşoară acest studiu este delimitată de teoremele analizei funcţionale.

Scopul acestui studiu este de a construi o *teorie matematică* a structurilor care să asigure cadrul general pentru formularea problemelor din mecanica structurilor, furnizînd algoritmele şi baza teoretică necesară pentru elaborarea, dezvoltarea şi analiza metodelor numerice de calcul.

2. MODELUL DE CALCUL DIN MECANICA STRUCTURILOR

Determinarea riguroasă a răspunsului structural la solicitări statice sau dinamice este, datorită numărului mare de variabile aleatoare ce intervin în proces, o problemă dificilă din punct de vedere teoretic, iar practic imposibil de rezolvat.

Din aceste motive, se admit, de regulă o serie de ipoteze simplificatoare privitoare la acţiuni, la comportarea materialelor şi la alcătuirea structurii. Rezultatul aplicării acestor ipoteze simplificatoare se concretizează prin definirea *modelului fizic* al structurii reale.

Pasul următor constă în elaborarea, pe baza modelului fizic, a *modelului matematic*, care, la rîndul său, poate fi afectată de o serie de ipoteze simplificatoare vizînd definirea matematică a problemei.

Un *model fizic* al unei structuri căruia i se ataşează un *model matematic* pentru a-i descrie comportarea formează *modelul de calcul* al structurii.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 46, NR. 6, 1987, P. 525–552

Definirea modelului de calcul este, așadar, afectată de două seturi de ipoteze simplificatoare care conferă rezultatelor un grad de aproximare dependent de finețea ipotezelor admise.

Implicarea calculatorului electronic în analiza comportării structurilor permite o ridicare a calității ipotezelor admise în modelarea fizică și matematică, apropiind modelul de calcul adoptat de structura reală. Modelul de calcul numeric constituie o aproximare a modelului de calcul exact — în limita ipotezelor admise — și se obține, în general, în urma unui proces de discretizare, fizică sau matematică, a sistemului fizic, care, în cazul de față, este structura.

2.1. MODELUL FIZIC

Stabilirea modelului fizic se face atît pe baza studierii modului de comportare a materialelor din care este alcătuită structura, cît și pe baza studierii comportării ansamblului structural sub acțiunea solicitărilor statice sau dinamice.

Comportarea ansamblului structural depinde de natura materialului folosit la realizarea structurii. Acțiunile aplicate pe structură și deplasările care se produc pe direcțiile lor sînt legate printr-o relație forță-deplasare ($P-U$) similară cu relația de legătură obținută din curba caracteristică a materialului ($\sigma - \varepsilon$). Din acest punct de vedere, în practică se operează cu curbe ($\sigma - \varepsilon$) idealizate, comportarea unui material putînd fi *ideal elastică*, *ideal elasto-plastică* sau *ideal plastică*. Curbele caracteristice, specifice acestor schematizări comportamentale, sînt bine cunoscute din literatura de specialitate.

Materialele cu comportare ideal elastică sînt caracterizate prin legea lui Hooke, care exprimă proporționalitatea dintre tensiunile normale σ și deformațiile specifice ε, fiind denumite materiale cu *comportare fizică liniară*. Materialele cu comportare ideal elasto-plastică sau plastică nu mai respectă legea lui Hooke, fiind materiale cu *comportare fizică neliniară*.

Materialele utilizate în mod curent în construcții sînt puțin deformabile, stabilirea dimensiunilor elementelor structurale făcîndu-se în așa fel încît poziția deformată să nu depășească o valoare limită prestabilită. Din acest motiv, în majoritatea situațiilor deplasările structurii sînt mici și noua poziție deformată a structurii este apropiată de cea inițială nedeformată. Pe baza acestor considerente se admite ca ipoteză simplificatoare ipoteza micilor deplasări, iar relația $P-U$ pentru structurile care respectă această ipoteză este liniară. Acestea sînt structurile cu *comportare liniară*.

Dacă deplasările structurii sînt mari și apare necesitatea analizării stării de echilibru pe structura deformată, atunci relația dintre acțiuni și deplasări nu mai este liniară. Aceste structuri au o *comportare neliniară*. În această categorie se încadrează și problemele legate de analiza de stabilitate a structurilor. Ținînd seama de cauza care induce caracterul neliniar în comportamentul acestui tip de structuri, neliniaritatea se definește ca *neliniaritate geometrică*.

Structurile care se realizează din materiale cu comportare neliniar elastică sau neliniar elasto-plastică sînt, de asemenea, caracterizate printr-o relație acțiuni-deplasări neliniară.

2.2. MODELUL MATEMATIC

Modelul matematic în mecanica structurilor conține trei grupuri de ecuații cunoscute sub numele de ecuații de echilibru și mișcare, ecuații constitutive și ecuații de compatibilitate. În cele ce urmează se definesc cele trei grupuri de ecuații asociate modelelor fizice definite anterior. Se presupun cunoscute cîteva noțiuni fundamentale legate de : vectorul tensiune, starea de tensiune, tensorul tensiune și, respectiv, vectorul deplasare, starea de deplasare și starea de deformație, tensorul deformație specifică.

2.2.1 Geometria și cinematica deformațiilor

Diferiți factori exteriori (forțe, variații de temperatură, etc.) duc la schimbări în configurația geometrică a corpurilor. Abordarea dintr-un punct de vedere matematic a procesului de deformare a corpurilor solide se face pe un model continuu în care punctele geometrice sînt puse în corespondență cu punctele materiale ale corpului real.

Se consideră un sistem de axe de coordonate $Oxyz$ și un punct M de coordonate x, y, z aparținînd unui corp solid astfel rezemat încît să se elimine mișcarea de corp rigid. Trecerea punctului $M(x, y, z)$ din poziția inițială nedeformată în poziția actuală deformată $M^*(x^*, y^*, z^*)$ este caracterizată de vectorul U de componente U_x, U_y, U_z astfel ca :

$$x_i^* = x_i + u_i \qquad \begin{matrix} x_i = x, y, z, \\ i = x, y, z, \\ x_i^* = x, y, z. \end{matrix} \tag{1}$$

Pentru caracterizarea stării de deformație în punctul considerat se introduce noțiunea de tensor de deformație lagrangean, definit prin relația :

$$T_L = (\varepsilon_{ij}) \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \tag{2}$$

cu componente ε_{ij} de forma :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) \qquad \begin{matrix} x_i, x_j, x_z = x, y, z, \\ l, j, k = x, y, z \end{matrix} \tag{3}$$

Acest tensor simetric de ordinul doi caracterizează starea spațială de deformații în condițiile în care deformațiile sînt mici, dar cu valori finite.

În cazul ipotezei micilor deformații, se admite că deformațiile se pot neglija în raport cu unitatea și de asemenea produsul a două deformații specifice este neglijabil în raport cu o a treia deformație specifică. Considerațiile acestei ipoteze constituie suportul teoriei liniare din punct de vedere geometric sau al *teoriei de ordinul întîi* a structurilor.

Ținînd seama de implicațiile ipotezei micilor deforații, relația devine :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad x_i,\ x_j,\ i,\ j,\ k = x,\ y,\ z. \tag{4}$$

care are următoarea reprezentare matriceală :

$$\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \tag{5a}$$

sau condensat : $\{\varepsilon\} = [L]\{u\}$ (5b)

Tensorul deformațiilor cu componentele date de relația (4) este cunoscut sub numele de tensorul deformațiilor al lui Cauchy.

Starea de deformație a întregului corp va fi dată de stările de deformație din fiecare punct al corpului.

Din punct de vedere matematic trebuie arătat că în cazul în care deformația corpului este continuă, atunci deplasările vor fi funcții de clasă C^1 pe domeniul considerat, iar derivatele parțiale nu vor fi influențate de secvența de derivare.

În dezvoltarea unei teorii matematice a deformațiilor, analiza ar putea fi limitată la definirea tensorului deformație specifică într-un punct oarecare al corpului atunci cînd în vecinătatea punctului sînt cunoscute componentele vectorului deplasărilor.

În multe din ecuațiile mediilor deformabile se pune însă problema rezolvării ecuațiilor în mod invers. Se admite cunoscută starea de deformații a întregului corp și pe baza ei se determină starea de deplasare a corpului. Problema revine, în acest caz, la stabilirea condițiilor ce trebuie să fie îndeplinite de deformații, astfel încît deplasările determinate pe baza lor să nu contravină sensului fizic al problemei.

Tratarea exhaustivă a acestei probleme a fost făcută de SAINT-VENANT, care a obținut, în ipoteza micilor deplasări, următoarele ecuații de compatibilitate a deformațiilor specifice :

$$\varepsilon_{ij,kk} + \varepsilon_{kk,ij} - \varepsilon_{ik,jk} - \varepsilon_{jk,ik} = 0. \tag{6}$$

Din punct de vedere matematic, relațiile (6) reprezintă condițiile necesare și suficiente de integrabilitate ale ecuațiilor (4). În plus, dacă domeniul ocupat de corp este simplu conex, relațiile (6) sînt și condițiile

necesare și suficiente pentru unicitatea deplasărilor, deoarece în cazul unui domeniu simplu conex o integrală curbilinie oarecare de forma $\oint A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y + C\mathrm{d}z$ este independentă de drumul de integrare în prezența condițiilor de tipul (6) [1].

Relațiile (6) se pot dezvolta pentru a pune în evidență funcțiile de compatibilitate :

$$\begin{aligned}
F_{xx} &= \varepsilon_{yy,zz} + \varepsilon_{zz,yy} - 2\varepsilon_{yz,yz} = 0,\\
F_{yy} &= \varepsilon_{zz,xx} + \varepsilon_{xx,zz} - 2\varepsilon_{zz,zz} = 0,\\
F_{zz} &= \varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} - 2\varepsilon_{xy,xy} = 0,\\
F_{xy} &= \varepsilon_{zz,xy} + \varepsilon_{xy,zz} - \varepsilon_{zz,zy} - \varepsilon_{yz,zx} = 0,\\
F_{yz} &= \varepsilon_{xx,yz} + \varepsilon_{yz,xx} - \varepsilon_{yx,xz} - \varepsilon_{zx,xy} = 0,\\
F_{zx} &= \varepsilon_{yy,yz} + \varepsilon_{xz,yy} - \varepsilon_{zy,yx} - \varepsilon_{xy,yz} = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Între funcțiile de compatibilitate F_{ij} există următoarele relații de legătură :

$$F_{ij,j}\delta_{ik} = 0, \quad i,\ j,k = x,\ y,\ z. \tag{8}$$

și

$$F_{ij} = F_{ji} \tag{9}$$

în care δ_{ij} este simbolul lui Kronecker.

Relațiile (7) se pot transcrie matriceal în forma

$$\begin{bmatrix}
\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\
0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0\\
0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
F_{xx}\\ F_{yy}\\ F_{zz}\\ F_{xy}\\ F_{yz}\\ F_{zz}
\end{Bmatrix} = \{0\} \tag{10}$$

sau condensat

$$[L_2]\{F\} = 0. \tag{11}$$

2.2.2. Mecanica tensiunilor

Starea de tensiune, corespunzătoare poziției deformate a corpului (caracterizată de tensorul de tensiune Lagrange sau Cauchy), este caracterizată, în mod analog, de tensorul de tensiune.

În ipoteza micilor deformații, starea de tensiune într-un punct este caracterizată de tensorul de tensiune al lui Cauchy :

$$T_\sigma \equiv (\sigma_{ij}) \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yz} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{12}$$

În baza legii dualității tensiunilor tangențiale, din cele nouă componente ale tensorului tensiunilor numai șase sînt independente.

Tensorul tensiune definit de relația (12) este un tensor simetric de ordinul doi.

În cazul deformațiilor finite, componentele tensorului tensiune vor fi de forma :

$$\sigma_{ij}^{*} = \sigma_{ij} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l}\sigma_{il} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\sigma_{lj} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\sigma_{xl}, \tag{13}$$

$$i, j, k, l = x, y, z,$$

$$x_k, x_l = x, y, z$$

unde σ_{ij} este elementul corespunzător din tensorul de tensiune Cauchy.

2.2.3. Ecuațiile constitutive

Elaborarea unei teorii complete și coerente a deformațiilor mediilor continue necesită, pe de o parte, definirea stării de tensiune și deformație într-un punct, iar pe de altă parte, modelarea matematică, a legăturii dintre acestea, adică stabilirea relației dintre tensorul tensiunilor și cel ale deformațiilor.

Pentru cazul materialelor cu comportare elastică, relația de legătură între tensiuni și deformații specifice este dată de legea lui Hooke, a cărei exprimare matematică este :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad i, j, k, l = x, y, z, \tag{14}$$

C_{ijkl} sînt componentele tensorului de ordinul patru al coeficienților elastici dați de relațiile :

$$C_{ijkl} = \lambda\,\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jk} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{15}$$

în care δ_{ij} este simbolul lui Kroneker, iar λ și μ sînt constantele elastice ale lui Lamé avînd expresia :

$$\lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu} = \frac{E\cdot\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}\cdot \tag{16}$$

În relația (16), E reprezintă modulul de elasticitate longitudinal, G este modulul de elasticitate transversal, iar ν este coeficientul lui Poisson.

Între E, G şi ν există relaţia de legătură

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{17}$$

Relaţiile (14) se transcriu matriceal sub forma :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \tag{18}$$

în care $[D]$ este matricea de elasticitate.

Dacă se exprimă din (18) deformaţiile specifice, se obţine relaţia :

$$\{\varepsilon\} = [c]\{\sigma\}, \quad [c] = [D]^{-1}. \tag{19}$$

În cazul general, pentru un material anziotrop matricea $[D]$ este o matrice simetrică care conţine 21 de coeficienţi independenţi. În cazul materialelor ortotrope, numărul acestor coeficienţi se reduce la nouă, astfel încît matricea de elasticitate are în acest caz forma :

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & d_{22} & d_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & d_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \text{simetric} & & & d_{44} & 0 & 0 \\ & & & & d_{55} & 0 \\ & & & & & d_{66} \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Pentru un material izotrop, matricea $[D]$ ia forma :

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu) \end{bmatrix}. \tag{20'}$$

În cazul comportării neliniare a materialului, relaţia dintre tensiuni şi deformaţii poate fi reprezentată sub forma :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x, \varepsilon). \tag{21}$$

În acest caz, σ este o funcţie tensorială neliniară ce depinde de punct şi de componentele tensorului de deformaţie. Un exemplu de astfel de lege este

$$\varepsilon_{ij} = \frac{k(\sigma)}{3K}\sigma\delta_{ij} + \frac{g(T_i^2)}{2G}(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}), \tag{22}$$

unde K este modulul de deformație volumică, iar $k(\sigma)$ și $g(T_i)$ sînt funcțiile presiune hidrostatică, respectiv intensitatea eforturilor tangențiale. O tratare exhaustivă a acestui model poate fi găsită în [1].

O altă modalitate de definire a unei relații neliniare între tensiuni și deformații este cea propusă de Ramberg și Osgood și care are forma :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{E}\left(1 + a\left|\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_e}\right|^{n-1}\right) \quad i = j = x,\ y,\ z, \tag{23}$$

în care σ_e este limita la curgere a materialului, iar a și n sînt constante pozitive care precizează configurația curbei $\sigma - \varepsilon$ în funcție de necesitățile practice.

Prin alegerea corespunzătoare a parametrilor a și n se pot modela matematic diferite tipuri de comportări neliniare ale materialelor cuprinse între cazurile limită de comportare : liniar elastic ($a = 0$ sau $n = 1$) și ideal elastio-plastic, Prandtl ($n = \infty$).

În cazul materialelor cu comportare vîsco-elastică, ecuația constitutivă are următoarea formă :

$$\sigma_{ij}(t) = E_{ijkl}(t)\ \varepsilon_{kl}(t) \quad i,\ j,\ k,\ l = x,\ y,\ z, \tag{24}$$

unde

$$E_{ijkl} = C_{ijkl}(t)\,\varepsilon_{kl}(t) + \int_0^t B_{ijkl}(t,\ \tau)\ \varepsilon_{kl}(\tau)\ \mathrm{d}\tau, \tag{25}$$

t fiind variabilbila temporală.

Integrala din relația (25) este în general înțeleasă în sensul lui Stiltjes.

Sînt îndeplinite, de asemenea, egalitățile :

$$E_{ijkl} = E_{klij} = E_{klji} = E_{lkij}. \tag{26}$$

Se observă cu ușurință că în cazul în care $B_{ijkl} = 0$, relația (25) este echivalentă cu legea lui Hooke.

2.2.4. Ecuațiile fundamentale ale mecanicii mediilor continue

Ecuațiile de echilibru dinamic care guvernează o structură cu comportare liniar elastică supusă la acțiuni dinamice sînt :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho\ddot{u}_i \quad i,\ j = x,\ y,\ z, \tag{27}$$

unde σ_{ij} sînt componentele tensorului tensiune, f_i sînt componentele vectorului f al forțelor masice, iar $\rho\ddot{u}_i$ reprezintă forțele inerțiale ale lui D'Alembert.

Dacă structura este supusă la acţiuni statice, ecuaţiile (27) devin

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \tag{28}$$

Dacă se elimină tensiunile şi deformaţiile specifice (4), între (14) şi (27) rezultă

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \nu) u_{j,ji} + f_i = \varrho \ddot{u}_i, \tag{29}$$

care, în cazul problemelor statice, devine

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \nu) u_{j,ji} + f_i = 0. \tag{30}$$

Neglijînd forţele masice, obţinem forma

$$\nabla^2 \nabla^2 u_i = 0, \tag{31}$$

unde ∇^2 este operatorul lui Laplace.

Ecuaţia (31) este cunoscută sub numele de ecuaţia lui Lamé a echilibrului elastic. Ecuaţia (30) poate fi transcrisă în formă matriceală după cum urmează :

$$[L]^T [D][L]\{u\} = \{f\}, \tag{32}$$

unde termenii au semnificaţiile indicate mai sus.

Înlocuind în ecuaţiile de compatibilitate (6) deformaţiile specifice ε_{ij} în funcţie de tensiuni, şi ţinînd seama de ecuaţiile de echilibru (28), obţinem

$$\Delta \sigma_{ij} = \frac{1}{1+\nu} \theta_{,ij} = -2 f_{i,j} - \frac{\mu}{1-\nu} f_{k,k} \delta_{ij} \qquad i, j, k = x, y, z \tag{33}$$

în care s-au folosit notaţiile

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ şi } \theta = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}.$$

Daci forţele masice sînt constante sau se neglijează, ecuaţiile (33) devin

$$\Delta \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\mu} \theta_{,ij} = 0, \quad i, j = x, y, z, \tag{34}$$

Ecuaţiile (33) poartă numele de ecuaţiile lui Beltrami-Michell şi nu sînt altceva decît exprimarea în tensiuni a ecuaţiilor lui Lamé.

În punctele de pe frontiera elementului structural acţionează de regulă forţe exterioare sau sînt impuse anumite deplasări.

Dacă pe frontiera S, care mărgineşte domeniul V ocupat de un mediu elastic omogen şi izotrop, elementul structural, structura, se cunosc

forţele, condiţiile la limită în tensuni, de tip Neumann se scriu

$$\sigma_{ij} n_j |_S = h_i \qquad i, j = x, y, z, \tag{35}$$

unde n_j sînt componentele normalei la frontiera S.

Dacă se cunosc deplasările $\bar{u}_i$ pe S, condiţiile la limită sînt de tip Dirichlet şi se formulează în deplasări astfel:

$$u_i(x_i, y_i, z_i, t)|_S = \bar{u}_i. \tag{36}$$

Condiţiile iniţiale referitoare la deplasări se scriu astfel:

$$u_i|_{t=0} = \bar{u}_i\,; \quad \dot{u}_i|_{t=0} = \dot{u}_i, \quad x, y, z = t. \tag{37}$$

Condiţiile la limită admit şi o formulare mixtă pe două porţiuni complementare S_1 şi $S_2 \subset S$ ($S_1 + S_2 = S$).

Avînd definite ecuaţiile de echilibru şi condiţiile la limită, se poate trece la formularea riguroasă a problemelor (de echilibru) la limită pentru mediile elastice omogene şi izotrope.

Problema la limită în deplasări: Să se determine cîmpul vetorial u de clasă C° în $V + S$ şi C^2 în D soluţie sistemului (30) astfel încît pe frontiera sa să fie îndeplinite condiţiile (36). Analog, se enunţă problemele la limită în tensiuni sau mixtă folosind formularea condiţiilor la limită în tensiuni sau cea mixtă.

În cazul mediilor elastice fizic neliniare la care ecuaţia constitutivă are forma (21), problema la limită corespunzătoare echilibrului are următoarea expresie matematică:

$$\begin{aligned} &-\sigma_{ij,j}(x.\ \varepsilon) = f_i \quad \text{în } v, \\ &U_i = g_i \quad \text{pe } S_1, \\ &\sigma_{ij}(x, \varepsilon) n_j = h_i \text{ pe } S_2 = S - S_1. \end{aligned} \tag{38}$$

Ecuaţia (21) poate fi astfel aleasă încît să acopere şi comportarea modelelor de comportare elastio-plastică, forma generală a problemelor la limită dată de (38) rămînînd aceeaşi.

Pentru cazul deformaţiilor finite se analizează cazul unui corp ce ocupă în spaţiul euclidian un domeniu mărginit V_0. Fie S_0 frontiera domeniului V_0. Se notează cu V şi S domeniul, respectiv frontiera, ocupat de corp în stare deformată. Din punct de vedere matematic, se poate spune că domeniul V se obţine din V_0 printr-o transformare biunivocă, cu derivatele de primul ordin continue în $V_0 + S_0$ şi cele de ordinul doi continue în V_0, dată de

$$x = \chi(x) \qquad x \in V_0 + S_0. \tag{39}$$

Caracterizarea stării de deformaţie într-un punct se face cu ajutorul tensorului de tensiune lagrangean ale cărui componente sînt date de re-

lațiile (3), iar starea de tensiuni este dată de tensorul tensiunilor cu elementele definite de relația (13).

Echilibrul unui corp elastic supus la deformații mari este atunci guvernat de ecuația

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[\sigma_{ij}(x, \nabla u)] = -f_i. \tag{40}$$

unde prin ∇u s-a notat gradientul deplasărilor.

Problema la limită (în formulare mixtă) are următorul enunț:

Să se determine cîmpul vectorial u de clasă C^1 în $V_0 + S_0$ și C^2 în V_0 soluția a sistemului (40) astfel încît să fie satisfăcute următoarele condiții la limită:

$$u|_{S_0^{(1)}}(1) = 0 \text{ pe } S_0^{(1)} \subset S_0, \tag{41}$$

$$\sigma_{ij} n_j \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}S_0}\bigg|_{S_0^{(2)}} = h_i(x) \tag{42}$$

pe porțiunea $S^{(2)} = S - S_0^{(1)}$, care, prin transformarea $x = X + u(x)$, corespunde porțiunii $S_0^{(2)} = S_0 - S_0^{(1)}$, unde $n_j (j = x, y, z)$ sînt componentele normalei la $S - S_0^{(1)}$, iar $h_i[\chi(x)] = h_i^0(z), h_i^0(i = x, y, z)$ fiind funcții de x date pe $S_0^{(2)}$.

Concluzionînd, putem afirma următoarele:

Orice ansamblu structural (sau, într-un sens mai larg, orice sistem fizic) poate fi caracterizat printr-o mulțime de variabile care sînt funcție de coordonatele spațiale și de timp. Un număr de variabile pot fi prestabilite: proprietățile fizico-mecanice ale materialului, dimensiunile geometrice, forțele aplicate, condițiile de margine. Restul variabilelor, u, constituie necunoscutele problemei (deplasări, deformații, tensiuni, viteze).

Un model matematic al acestui sistem constă în stabilirea unei relații între u și σ în urma aplicării legilor fizice caracteristice sistemului. Această relație generează un set de ecuații de forma:

$$K(u_1, u_2, \ldots, u_n, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m) = 0 \tag{43}$$

sau

$$K(u) = f_V \text{ pe domeniul } V \tag{44}$$

la care se atașează un set de condiții la limită:

$$C(u_1, u_2, \ldots, u_n, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m) = 0 \tag{45}$$

sau

$$C(u) = f_s \text{ pe frontiera } S \text{ a domeniului } V. \tag{46}$$

Ecuațiile de definiție, împreună cu condițiile la limită, formează ecuațiile de guvernare [9] ale sistemului, care are soluții de forma:

$$u = u(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m). \tag{47}$$

În relațiile (44) și (46) K și C sînt operatori diferențiali sau integrodiferențiali caracteristici sistemului, u reprezintă necunoscutele problemei, iar f_v și f_s sînt funcții date.

2.3. DEFINIREA CÎMPULUI STRUCTURAL

Pentru claritate, în cele ce urmează, discuția va face referiri la cazul sistemelor liniar elastice fără ca prin aceasta să se reducă gradul de generalitate al problemei.

Din punct de vedere matematic, definirea cîmpului structural înseamnă studierea proprietăților domeniului de definiție al operatorului K din ecuația (44).

Un cîmp de tensiuni și un cîmp de deformatii sau deplasări cu relațiile de legătură (14) formează un cîmp structural [11].

Un cîmp structural este numit compatibil în raport cu un sistem de incompatibilități — mulțimea condițiilor la limită — dacă satisface (compatibilizează) ecuațiile (4) în prezența condițiilor (37).

Un cîmp structural este în echilibru (echilibrat) în raport cu un sistem de forțe exterioare — mulțimea acțiunilor și forțelor de legătură pe frontierea S — dacă satisface ecuațiile (27) și (14) în prezența condițiilor (35).

Un cîmp structural care este în același timp compatibil și echilibrat satisface ecuațiile (29) si condițiile (36) și (37) pe două porțiuni complementare ale frotierei S_1, $S_2 \subset S$, $S_1 + S_2 = S$.

Dacă se asociază unei structuri elastice oarecare o mulțime X de cîmpuri structurale, se poate demonstra că mulțimea X formează un spațiu Banach (spațiu vectorial normat complet).

Pentru acesta se demonstrează, în primul rînd, că mulțimea X formează un spațiu vectorial peste corpul numerelor reale prin definirea operațiunilor de adunare $(x_1 + x_2)$ și înmulțire cu scalari λx, $x_1, x_2 \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Este ușor de demonstrat că elementele din spațiul X se supun cunoscutelor axiome de comutativitate, asociativitate, distributivitate și independență liniară și că operația de bază din acest spațiu este produsul scalar a două elemente componente x_1 și x_2 definit prin

$$(x_1, x_2) = \int_V x_1 x_2 dV. \tag{48}$$

Existența produsului vectorial asigură existența normei în spațiul X. Un spațiu vectorial înzestrat cu o normă pentru fiecare din elementele sale formează un spațiu vectorial normat.

Norma unui element al spaţiului se defineşte astfel:

$$\|x\| = \sqrt{\int_V x^2 \, dV} \text{ sau } \|x\| = \sqrt{\int_V x_1 x_2 \, dV}, \qquad (49\ a,b)$$

adică

$$\|x\| = \sqrt{\int_V \sigma_1 \sigma_2 \, dV}, \text{ respectiv } \|x\| = \sqrt{\int_V u_1 u_2 \, dV}. \qquad (50\ a,b)$$

Într-un spaţiu normat X un şir de elemente $\{x_n\} \subset X$ este fundamental dacă şi numai dacă $\|x_m - x_n\| \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$. Ca urmare, un spaţiu vectorial va fi complet dacă şi numai dacă din $\|x_m - x_n\| \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$ rezultă existenţa unui element $x_0 \in X$, a.î. $x_n \to x_0$, adică dacă X conţine limitele tuturor şirurilor fundamentate formate cu elementele sale.

Dacă spaţiul normat X nu este complet, atunci el poate fi întotdeauna inclus într-un spaţiu normat complet $\hat{X}$. Operaţiile algebrice şi norma definite pe X se pot extinde unic pe $\hat{X}$, acesta devenind un spaţiu Banach.

Deoarece, aşa cum rezultă din relaţiile (49), şi (50), norma din X este generată de un produs scalar, spaţiul Banach definit anterior este un spaţiu Hilbert [1,4].

Se demonstrează că spaţiul Hilbert definit pe X este un spaţiu energetic — pe care se defineşte un produs energetic şi o normă energetică — şi constituie o extindere a lui X, la ale cărui element se ataşează produsul energetic corespunzător.

Consecinţa acestui fapt este apariţia unor elemente noi (funcţi $x \in H_E$ care nu pot să satisfacă condiţiile la limită naturale ale problemei Dacă în schimb condiţiile la limită sînt *principale* sau *esenţiale* (geometrice sau cinematice), adică în cazul mecanicii structurilor nu conţin derivate atunci ele pot fi satisfăcute de către toate funcţiile spaţului energetic H. Se spune că are loc o relaxare a condiţiilor la limită.

O mulţime de cîmpuri structurale care satisface condiţiile de echilibru formează o submulţime X_σ care se zice izoechilibrată — metoda deplasărilor.

O mulţime de cîmpuri structurale care satisface condiţiile de compatibilitate formează o submulţime X_u care se zice izocompatibilă — metoda forţelor.

Ecuaţiile de echilibru şi compatibilitate se pot scrie acum într-o formă mult mai generală:

$$\sigma(x) = \sigma; \ x \in X \text{ şi } \sigma \in X_\sigma, \qquad (51)$$

$$u(x) = u; \ x \in X \text{ şi } u \in X_u \qquad (52)$$

Dacă mulţimea $X_\sigma \cap X_u \neq 0$, se poate stabili o corespondenţă biunivocă între elementele lui X şi cele ale produsului cartezian $X_\sigma \times X_u = \Gamma$. Se defineşte astfel prin Γ spaţiul acţiunilor exterioare, X constituind spaţiul răspunsurilor structurii.

Fiecărei perechi (σ, u) i se poate asocia o funcție continuă: $\chi : \Gamma \to X$ astfel ca

$$x = \chi(\sigma, u). \tag{53}$$

Soluția exactă a problemei — cîmpul structural compatibil și/sau echilibrat — se obține impunînd condiții de staționaritate energie potențiale a sistemului π sau energiei potențiale complementare π^*:

$$\delta\pi = \int_V \sigma\delta u \, dV, \tag{54 a}$$

sau

$$\delta\pi^* = \int_V u \, \delta\sigma \, dV \tag{54 b}$$

Dacă se consideră pe X topologia generală de norma definită prin relațiile (49) sau (50) (adică familia de seminorme constituită din această singură normă), atunci X este un spațiu local convex. Topologia generată se numește topologia normei.

Extinzînd un rezultat din teoria spațiilor local convexe în acest caz particular, se poate afirma că orice spațiu vectorial normat este un spațiu local convex metrizabil.

Definind în continuare distanța dintre două puncte x_1 și x_2 prin relația:

$$d(x_1, x_2) = \| x_1 - x_2 \|, \tag{55}$$

se pot verifica cu ușurință axiomele distanței [4].

Relația (55) e echivalentă cu:

$$d(x_1, x_2) = \min \int_{x_1}^{x_2} dS, \tag{56}$$

unde dS reprezintă distanța dintre două puncte foarte apropiate conținute în V și

$$d^2S = \frac{1}{2} \int_V \delta u \, \delta\sigma \, dV. \tag{57}$$

Pentru $x = \chi(\sigma, u)$ se demonstrează că în același punct există, dacă

$$\delta^2\pi = \int_V \delta\sigma \, \delta u \, dV, \tag{58}$$

$$\delta^2\pi^* = \int_V \delta u \, \delta\sigma \, dV, \tag{59}$$

egalitatea

$$\delta\pi = \delta\pi^*. \tag{60}$$

În continuare, pe baza relației (57) pentru un Δ suficient de mic rezultă relațiile

$$d^2(x + \Delta, x) = \pi(x + \Delta) - \pi(x); \quad \Delta \in \sigma_0, \tag{61}$$

$$d^2(x + \Delta, x) = \pi^*(x + \Delta) - \pi^*(x); \quad \Delta \in u_0, \tag{62}$$

unde prin σ_0 și u_0 s-au notat elementele nule ale mulțimilor X_σ și X_u.

Cu aceste elemente modelul matematic și soluția problemei, respectiv cîmpul structural, se pot considera definite în perimetrul analizei funcționale.

3. MODELE APROXIMATIVE DE CALCUL NUMERIC

În general, modelele de calcul aproximativ în cadrul cărora au fost elaborate metodele de calcul din mecanica structurilor sînt modele de calcul discrete (discretizarea fiind de natură matematică sau fizică).

Abordarea pe această cale are avantajul că permite formularea matriceală a problemelor, condiție absolut necesară atunci cînd se elaborează algoritmele de calcul automat. Sînt cunoscute însă și metode aproximative continue, un exemplu bine cunoscut în acest sens fiind rezolvarea problemei încovoierii plăcilor curbe subțiri în cadrul teoriei de membrană. Există și cazuri în care modelul discret se aproximează printr-un model continuu echivalent, de exemplu în cazul structurilor reticulate.

Datorită gradului de diversitate al metodelor de calcul din mecanica structurilor, este greu de stabilit un criteriu care să permită o clasificare exhaustivă. Acestea se vor împărți în metode exacte și aproximative. Dintre metodele aproximative, de largă răspîndire sînt acelea care pot fi formulate și pe cale matriceală, permițînd prin acestea automatizarea calculului.

Metodele exacte se folosesc la calculul structurilor în anumite cazuri particulare de acțiuni și geometrie a structurii. Numărul problemelor care pot fi rezolvate cu metode analitice exacte este redus și, la ora actuală, sînt cunoscute. O dezvoltare de dată mai recentă o constituie metoda funcțiilor generalizate, care permite abordarea formal continuă a problemelor sistemelor discrete sau continue cu singularități prin intermediul teoriei distribuțiilor.

Dintre metodele aproximative se rețin doar trei grupuri: metode matriceale directe, metode reziduale și metode variaționale. În figura 1 se prezintă schematic o clasificare de principiu a acestor metode.

Pentru fundamentarea și aprecierea acestor metode este necesar să se procedeze la studiul teoretic al următoarelor trei probleme [4]:

a) stabilirea existenței și convergenței algoritmului;

b) studiul vitezei de convergență;

c) estimarea efectivă a erorii.

Se consideră, pentru exemplificare, cazul ecuațiilor liniare de tipul

$$Kx = y \tag{63}$$

în care K este un operator liniar continuu. În conformitate cu modul de definire a cîmpului structural, se va analiza cazul în care domeniul de definiție al operatorului K este spațiu Hilbert.

METODE DE ANALIZĂ A STRUCTURILOR

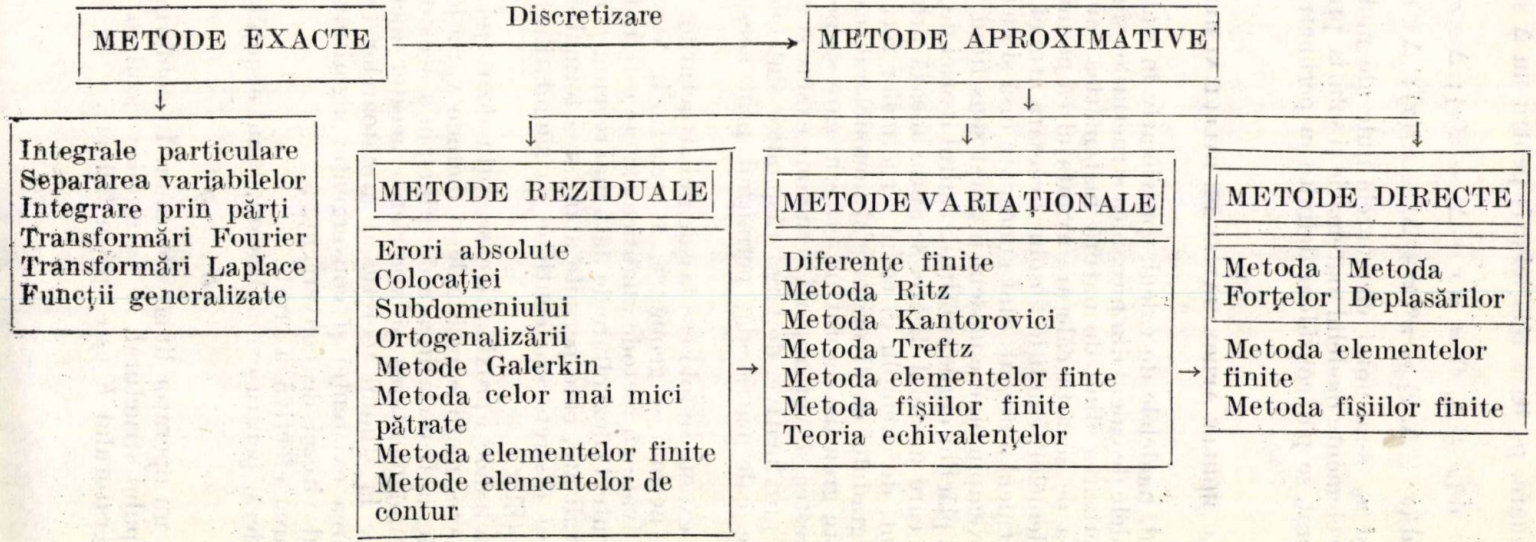


Figura 1

În acest caz, în conformitate cu modul de definire a algebrei operatorilor liniari într-un spațiu Hilbert, operatorul K poate fi pus și sub forma :

$$K = I - \lambda H. \tag{64}$$

Separarea operatorului identitate I se dovedește a fi indicată deoarece operatorul H poate avea proporietăți mai bune decît operatorul K, permițînd un studiu mai complet al ecuației (63).

Fie X un spațiu Hilbert și $\widetilde{X}$ un subspațiu complet. Se presupune că există un operator liniar continuu L care proiectează X pe $\widetilde{X}$, adică

$$L(X) = \widetilde{X}, \qquad L^2 = L. \tag{65}$$

Este evident că operatorul L nu schimbă elementele din X.

Se consideră două ecuații :

$$Kx = x - \lambda Hx = y \qquad \text{în spațiul } X \tag{66}$$

și

$$\widetilde{K}\tilde{x} = \tilde{x} - \lambda \widetilde{H}\tilde{x} = y \qquad \text{în spațiul } \widetilde{X}. \tag{67}$$

Cele două ecuații vor fi denumite ecuația exactă (66) și, respectiv, ecuația aproximativă (67) (corespunzătoare ecuației exacte (66)).

Se impun următoarele condiții operatorilor K, $\widetilde{K}$ (respectiv H și $\widetilde{H}$) și spațiilor X și $\widetilde{X}$.

a. Pentru orice $\tilde{x} \in \widetilde{X}$

$$\| LH\tilde{x} - \widetilde{H}\tilde{x} \| \leqslant \eta \| \tilde{x} \| \tag{68}$$

sau echivalent

$$\| PK\tilde{x} - \widetilde{K}\tilde{x} \| \leqslant |\lambda| \eta \| \tilde{x} \|. \tag{69}$$

Condiția (68) (respectiv (69)) reprezintă condiția de apropiere a operatorilor H și $\widetilde{H}$ (respectiv K și $\widetilde{K}$).

b. Pentru orice $x \in X$ există $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ astfel încît

$$\| Hx - \tilde{x} \| \leqslant \eta_1 \| x \|. \tag{70}$$

Condiția (70) reprezintă condiția de bună aproximare a elementelor de forma Hx prin elementele din $\widetilde{X}$.

c. Există un element $\tilde{y} \in \widetilde{X}$ astfel încît

$$\| y - \tilde{y} \| \leqslant \eta_2 \| y \|. \tag{71}$$

Condiția (71) reprezintă condiția de bună aproximare a termenului liber. Spre deosebire de condițiile anterioare, în acest caz η_2 nu depinde de y. Pentru ecuațiile care satisfac aceste condiții se vor da fără demonstrație trei teoreme corespunzătoare criteriilor de analiză enunțate la începutul acestei secțiuni (o tratare mai detaliată a problemelor, precum și demonstrațiile teoremelor se găsesc în [4]).

I. Presupunem că sînt îndeplnite condițiile a și b și că operatorul K are invers bilateral continuu. Atunci, dacă

$$q = |\lambda| \, [\eta + \| I - P \| \eta_1], \tag{72}$$

operatorul $\tilde{K}$ are un invers continuu și

$$\|\tilde{K}^{-1}\| = \frac{\|K^{-1}\|}{1-q}. \tag{73}$$

Teorema I afirmă, de fapt în condițiile enunțate, *rezolubilitatea ecuației aproximative.*

II. Dacă sînt îndeplinite condițiile a, b și c, există operatorul continuu $\tilde{K}^{-1}$ și ecuația (68) are soluția x^0, atunci are loc *estimarea* :

$$\|x^0 - \tilde{x}^0\| \leqslant p\,\|x^0\|, \tag{74}$$

unde $\tilde{x}_0$ este soluția ecuației (69) și

$$p = 2|\lambda|\eta\|\tilde{K}^{-1}\| + (\eta_1|\lambda| + \eta_2\|K\|)(1 + \|\tilde{K}^{-1}PK\|). \tag{75}$$

Observații

1. Teorema II oferă *estimarea soluției aproximative.*

2. În condițiile teoremei II se poate demonstra că este posibil să aproximăm elementul x^0 cu elemente din X cu o precizie de ordinul $\eta_1 + \eta_2$. Mai exact, se poate demonstra că

$$\|x^0 - \tilde{x}\| \leqslant \varepsilon\,\|x^0\|, \tag{76}$$

unde

$$\varepsilon = \min\ [1,\ \eta_1|\lambda| + \eta_2\|k\|]. \tag{77}$$

Se poate, deci, în unele cazuri, ca posibilitatea de a aproxima elementele x^0 cu elemente din X să fie stabilită direct. În acest caz, îndeplinirea condițiilor b și c nu mai este necesară. Rezultă că din aceste considerații importanța modului de alegere a proiectorului L și a operatorului K.

3. Pe baza teoremei II sînt ușor de obținut estimări ale apropierii soluției exacte de cea aproximativă fără a folosi informații asupra soluției exacte.

III. Considerăm un șir de ecuații aproximative și șirul de soluții aproximative corespunzător. Atunci, dacă sînt îndeplinite condițiile :

1. Operatorul K are invers continuu ;

2. pentru orice $n = 1, 2, \ldots$ sînt îndeplinite condițiile a, b și c și, în plus,

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} \eta_{1n}\|L_n\| = 0,\ \lim_{n\to\infty} \eta_{2n}\|P_n\| = 0, \tag{78 a, b, c}$$

atunci pentru n suficient de mare, ecuația aproximativă este rezolubilă și șirul de soluții aproximative converge la soluția exactă, adică

$$\lim_{n\to\infty} \|x_0 - \tilde{x}_n^0\| = 0, \tag{79}$$

4. Dacă se folosește estimarea (76), obținem

$$\|x^0 - x_n^0\| \leqslant Q'\eta + Q''\tau\|L_n\| \tag{80}$$

și condițiile de convergență se înlocuiesc cu

$$\lim_{n\to\infty} \eta = 0,\ \lim_{n\to\infty} \tau\|P_n\| = 0. \tag{81 a, b}$$

În acest caz, condiția c este de prisos.

3.1 LEGI DE GENERARE ALE MODELELOR DE CALCUL NUMERIC

Pentru a evidenţia importanţa legilor de generare a modelelor matematice, de la modelul exact la modelul aproximativ, se va face referire la generarea modelelor discrete din modelele continue, discretizarea fizică şi matematică fiind procedee tipice analizei structurilor.

Condiţiile, teoremele şi observaţiile enunţate anterior conduc la ideea de a alege ca operator $\tilde{H}$ (sau $\tilde{K}$) operatorul LH (sau IK), deoarece, cu această condiţie, condiţia a este îndeplinită cu $\eta = 0$. O modalitate particulară de realizare a acestei alegeri va fi analizată în cele ce urmează. Se pleacă de la ideea că ecuaţiile de echilibru şi condiţiile la limită aferente problemei de rezolvat se introduc simultan şi trebuie să fie satisfăcute identic în cadrul modelului generator. Corespondenţa dintre cîmpurile generate şi cîmpul generator, originar, se poate reprezenta sub forma

$$y = L_1(x)\,;\quad x \in X\,;\quad y \in Y, \tag{82}$$

în care $L_1 : X \to Y$ este un operator liniar, iar Y este spaţiul cîmpurilor structurale generate.

Sistemele care fac obiectul analizei în mecanica structurilor sînt sisteme gradientale. Pe baza acestei observaţii se poate afirma că utilizarea unui principiu variaţional (de exemplu principiul lucrului mecanic virtual) conduce la stabilirea ecuaţiilor generale de echilibru şi compatibilitatea în cadrul noului model generat.

Introducînd în plus o ipoteză simplificatoare (de pildă, definirea cîmpului de deplasări din metoda elementelor finite) se stabileşte o corespondenţă între elementele definite pe X şi cele definite pe Y. Se poate introduce astfel un nou operator liniar

$$L_2 : Y \to \tilde{X},\quad \tilde{X} \subset X. \tag{83}$$

Metoda energetică pune condiţia de invariabilitate a energiei potenţiale de deformaţie totală sau complementar, ceea ce revine la satisfacerea ecuaţiilor

$$\pi[L_2(y)] = \pi(y)\,;\quad \pi^*(L_2(y)] = \pi^*(y). \tag{84a,b}$$

Se defineşte, în concordanţă cu cele arătate, operatorul liniar de interpolare $L : X \to \tilde{X}$,

$$L = L_1 \cdot L_2. \tag{85}$$

Elementele $x \in X$ şi $\tilde{x} \in \tilde{X}$ definite prin intermediul operatorului de interpolare se numesc condiţionate şi se notează cu z, respectiv $\tilde{z}$:

$$\tilde{z} = L(z)\,;\quad \tilde{z} \in \tilde{Z}\,;\quad z \in Z. \tag{86}$$

Se spune că submulţimea condiţionată $\tilde{Z}$, a imaginilor prin L ale elementelor submulţimii condiţionate $Z \subset X$, corespunde lui Z. Submulţimea cîmpurilor structurale Z se zice izocondiţionată dacă dispune de un

minimizator α. Mulțimea M a minimizatorilor corespunzătoare submulțimilor izocondiționate Z din X formează o submulțime minimizatoare a lui x. Fiecărei submulțimi minimizatoare din X îi corespunde o funcțională $\pi \in \Phi$ în care Φ este o familie de funcționale definite pe X. O submulțime minimizatoare $\widetilde{M} \subset \widetilde{X}$ corespnde unei submulțimi minimizatoare $M \subset X$ dacă la ambele corespunde una și aceeași funcțională $\pi \in \Phi$.

Operatorul de interpolare L are următoarele proprietăți:

1. Imaginea prin L a oricărui element $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ coincide cu elementul

$$L(\tilde{x}) = \tilde{x}\,; \quad \forall\ \tilde{x} \in \widetilde{X}. \tag{87}$$

2. Submulțimile condiționate și minimizatoare satisfac aceleași condiții în raport cu aceeași familie de funcționale Φ.

3. Imaginea prin L a elementelor izocondiționate din x sînt elemente izocondiționate din $\widetilde{X}$.

Se introduce în continuare un operator secund A numit de aproximare, care realizează corespondența

$$A : (Z \cap M) \to (\widetilde{Z} \cap \widetilde{M})\,; \; Z, M \subset X\,; \; \widetilde{Z}, \widetilde{M} \subset \widetilde{X}. \tag{88}$$

Imaginea prin A a elementelor $x \in X$ se numește aproximația lui x în $\widetilde{X}$.

Considerarea operatorilor L și A permite discutarea conversiei unei probleme variaționale date într-una nouă, eventual mai simplă decît prima, capabilă să prevadă o soluție aproximativă a acesteia.

Dacă operatorul de interpolare este astfel ales încît $\widetilde{X} \subset X$ să constituie un spațiu n dimensional X_n, problema variațională se poate rezolva cu ușurință. Funcționala π devine o funcție de n variabile, iar elementele minimizatoare ale acesteia se rezolvă prin rezolvarea unui sistem de n ecuații cu n necunoscute.

Dacă L este conform și $\widetilde{Z} \subset Z$, modelul de calcul aproximativ generat nu este altceva decît cunoscute metodă Ritz, iar funcționala π este în acest caz energia potențială totală.

Prin precizarea, în maniera prezentată anterior, a operatorului de interpolare L, alegerea operatorului $\widetilde{K}$ (respectiv $\widetilde{H}$) de forma LK (respectiv LH) se poate considera definită. Teoremele I, II și III admit în această situație cîteva modificări, și anume:

I. În teorema I q devine:

$$q = |\lambda| \eta_1 \| I - L \| \, \| K^{-1} \|. \tag{89}$$

II. În teorema II p devine

$$p = (\eta_1 |\lambda| + \eta_2 \|K\|)(1 + \|\widetilde{K}^{-1} PK\|). \tag{90}$$

III. În teorema III condițiile 2 se înlouiesc prin

$$\lim_{n \to \infty} \eta_{1n} \|L_n\| = \lim_{n \to \infty} \eta_{2n} \|L_n\| = 0. \tag{91}$$

4. METODE MATRICEALE

În această categorie intră cele două metode clasice din perimetrul analizei structurale : metoda deplasărilor şi metoda forţelor.

4.1. DERIVAREA METODELOR MATRICEALE DIN PROPRIETĂŢILE OPERATORILOR LINIARI

În cazul structurilor cu comportare liniar elastică, modelul matematic este, după cum s-a arătat în paragraful 2.2.4. generat de un set de ecuaţii de forma

$$K(u) = f_V \qquad \text{pe domeniul } x, \tag{44}$$

cu condiţiile

$$C(u) = f_S \text{ pe frontiera } S \text{ a domeniului.} \tag{46}$$

Se consideră o alegere a operatorului de interpolare L, definit anterior, în aşa fel încît $\tilde{X} \subset X$ să fie un spaţiu n dimensional $\tilde{X}_N$. Ecuaţia (44) se înlocuieşte atunci prin ecuaţia aproximativă corespunzătoare

$$\tilde{K}(u) + \tilde{f}_V = 0 \qquad \text{pe domeniul } \tilde{X}_N, \tag{92}$$

$$\tilde{c}(u) + \tilde{f}_s = 0 \qquad \text{pe frontiera } S \text{ a domeniului } \tilde{X}_N. \tag{93}$$

Aşa cum s-a menţionat anterior, spaţiul $\tilde{X}_N$ este un subspaţiu complet al spaţiului X (spaţiul cîmpurilor structurale). Atunci, în conformitate cu proprietăţile spaţiului cîmpurilor structurale se poate afirma că subspaţiul finit dimensional $\tilde{X}_N$ este un spaţiu Banach. Se notează prin $u_i (1 = 1, 2, \ldots, n)$ elementul din spaţiul X_N ale cărui coordonate sînt egale cu 0, mai puţin coordonata cu indice 1 pe care o presupunem egală cu unitatea. Pentru $u = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ şi $f_v = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ rezultă

$$u = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i u_i ; \quad f_V = \sum_{i=1}^{n} \eta_i u_i . \tag{94 a,b}$$

Dacă u este soluţia ecuaţiei (44), atunci

$$f_V = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \tilde{K}(u_i).$$

Se notează coordonatele elementului $\tilde{K}(u_i)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ prin $k_{1i}, k_{2i} \ldots k_{ni}$ şi efectuînd înlocuirile obţinem

$$f_V = \sum_{j=1}^{n} \eta_j g_j = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \sum_{j=1}^{n} k_{ji} u_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} k_{ji} \varepsilon_i \right) u_j \tag{95}$$

deoarece elementele u_k au fost astfel alese încît sînt liniar independente, rezultă că

$$\eta_j = \sum_{i=1}^{n} k_{ji} \varepsilon_i \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{96}$$

Aşadar coordonatele elementului $f_Y = K(u)$ se obţin din coordonatele elementului x printr-o transformare realizată de matricea

$$K_L = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & & k_{nn} \end{pmatrix}. \tag{97}$$

De asemenea, se poate demonstra cu uşurinţă că şi reciproca este valabilă ; orice matrice de această formă defineşte un operator liniar.

Din punct de vedere al analizei structurale, proprietatea operatorilor liniari definiţi într-un spaţiu Banach de dimensiune finită n are o semnificaţie fizică precisă.

Localizînd pentru simplitate, discuţia pe exemplul unei structuri din bare, ceea ce evident nu restrînge cu nimic generalitatea afirmaţiilor, vectorului u_1 i se conferă semnificaţia de vector al deplasării unitare pe direcţia gradului de libertate 1. În aceste condiţii, matricea K_L nu este altceva decît matricea de rigiditate globală a structurii în metoda deplasărilor pentru cazul structurilor cu comportare liniar elastică.

Ataşînd vectorului u_1 o altă semnificaţie fizică şi anume, aceea de forţă unitate aplicată pe direcţia gradului de liberate l, matricea K_L primeşte semnificaţia matricei de flexibilitate din metoda forţelor.

Proprietatea operatorilor liniari enunţată anterior asigură suportul matematic al metodelor matriceale din mecanica structurilor, cunoscute sub denumirile lor clasice de metoda deplasărilor şi metoda forţelor.

5. METODA ELEMENTELOR FINITE

O prezentare exhaustivă a principiilor metodei elementelor finite este în condiţiile lucrării de faţă superfluă datorită numărului mare de lucrări de referinţă în care principiile şi formulările acestei metode sînt amplu descrise [5], [6], [7], [8]. De un real interes este însă, în contextul articolului de faţă, analizarea unor aspecte referitoare la convergenţa metodei şi stabilitatea calculului numeric. Se impun, cu toate acestea, pentru fixarea cadrului general al discuţiei, cîteva precizări legate de modul de aplicare a metodei.

Etapele ce trebuie parcurse pentru rezolvarea prin intermediul metodei elementului finit a unei probleme oarecare sînt următoarele :
a. Stabilirea spaţiului de energie şi a funcţionalei π supusă minimizării. În cazul mecanicii structurilor, acestea sînt spaţiul cîmpurilor structurale şi energia potenţială totală.
b. Transformarea problemei într-un sistem de ecuaţii, ceea ce revine la alegerea convenabilă a subspaţiilor finit dimensionale în norma energiei. Cîmpul soluţiilor necunoscute — cîmpul deplasărilor în interiorul elementelor în cazul de faţă — se caută de forma

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \varphi_i \, \bar{u}_{ik} \quad (\bar{u}_{i0} = 1), \tag{98}$$

unde constantelor φ_i li se atribuie semnificația concretă cunoscută a parametrilor de deformație a elementului finit, iar $\bar{u}_{ik}$ sînt deplasările generalizate la nodurile k ale elementului finit (sistemul de coordonate în spațiul X_n).

c. Rezolvarea sistemului de ecuații.

În situațiile în care funcționala π nu poate fi definită, se poate totuși da o formulare a metodei în baza teoriei reziduurilor medii ponderate.

5.1. CRITERII DE CONVERGENȚĂ ȘI UNICITATE A SOLUȚIILOR APROXIMATIVE PRIN METODA ELEMENTELOR FINITE

Problema convergenței se pune între elementele a două cîmpuri structurale : cel al soluțiilor aproximative $\tilde{X}$ și cel al soluțiilor exacte X. Corespondența între elementele celor două cîmpuri este realizată de operatorul de aproximare A definit anterior. Condiția de convergență presupune că distanța dintre un element $x \in X$, care minimizează funcționala π pe Z și corespondentul său aproximativ $\tilde{x}_a = Ax$, $\tilde{x}_a \in \tilde{X}$ satisface inegalitatea

$$\mathrm{d}(x, \tilde{x}_a) < \varepsilon : \quad \forall\, \varepsilon > 0 \tag{99}$$

(vezi observația 2 la T II).

5.1.1. Probleme liniare

Considerînd spațiul X un spațiu Banach de dimensiune finită n, căutăm soluția aproximativă $\tilde{x}_{an}$ pentru care $\| x - \tilde{x}_{an} \|$ să fie mică.

Vectorul unic cu proprietatea $\| x - \tilde{x}_{an} \| = \min\limits_{\tilde{x} \in \tilde{X}_N} \| x - \tilde{x} \|$ se numește „aproximația element finit" a lui x.

Se va enunța în continuare o teoremă care garantează existența și unicitatea unui asemenea element.

IV. Dacă X este un spațiu liniar normat (cu normă $\| \cdot \|$) și X_N un subspațiu finit dimensional al său, orice punct are cea mai bună aproximație $\tilde{x}_{an} \in \tilde{X}_N$, deci

$$\| x - \tilde{x}_{an} \| = \min_{\tilde{x} \in \tilde{X}_N} \| x - \tilde{x} \|. \tag{100}$$

În cadrul domeniului mecanicii structurilor, întrucît X este spațiu Hilbert, condițiile acestei teoreme sînt îndeplinite.

În aceste condiții, pentru ca șirul soluțiilor aproximative $\{\tilde{x}_{an}\}$ să fie convergent, el trebuie să fie un șir fundamental (Cauchy). Existența limitei $x \in X$ a oricărui șir fundamental din spațiul X este garantată de completitudinea spațiului (vezi §§ 2.3.). Limita șirului $\{\tilde{x}_{an}\}$ este funcția z (soluția exactă) către care aceasta converge. Această convergență este o convergență în medie, adică este satisfăcută relația

$$\int_V (x - \tilde{x}_{an})\, \mathrm{d}V < \delta ; \quad \forall\, \delta > 0. \tag{101}$$

Deoarece integrala este totdeauna pozitivă, relaţia (101) se rescrie sub forma

$$\| x - \tilde{x}_{an} \| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{102}$$

În continuare se arată că şirul $\{\tilde{x}_{an}\}$ este un şir de funcţii complete în sensul convergenţei în medie, care are asigurată condiţia de completitudine, condiţie care garantează convergenţa şi în acelaşi timp conformitatea soluţiilor. În cazul formulării variaţionale a metodei elementelor finite, completitudinea şirului $\{\tilde{x}_{an}\}$ este în energie, spaţiul cîmpurilor structurale X şi $\tilde{X}$ fiind spaţii Hilbert energetice. În baza teoremei IV rezultă atunci că *aproximaţia element finit* este *cea mai bună aproximaţie în energie a soluţiei exacte.*

Se va prezenta în cele ce urmează un criteriu de convergenţă simplificat.

Se poate arăta [9], [12] că relaţia de convergenţă între $\tilde{x} \in \tilde{X}$ şi $x \in X$ este de forma

$$\mathrm{d}(x, \tilde{x}_a) \leqslant \mathrm{d}(x_a, \tilde{x}_a) + \sqrt{|\delta_x \pi| + |\delta_a \pi|}, \tag{130}$$

unde

$$\delta x \pi = \pi(\tilde{x}) - \pi(x), \tag{104}$$

$$\delta_a \pi = \pi(\tilde{x}_a) - \pi(x_a), \tag{105}$$

iar x_a este izocondiţionat în raport cu x astfel încît

$$\tilde{x}_a = L(x_a).$$

În cazul metodei elementelor finite $\tilde{Z} \subset Z$. Aceasta înseamnă că $\tilde{x}$ şi $\tilde{x}_a$ sînt izocondiţionate în raport cu X şi X_a. Atunci, dacă $\tilde{x}_a \in Z$, rezultă că $x_a \equiv \tilde{x}_a$, iar din (103) rezultă

$$\mathrm{d}(x, \tilde{x}_a) \leqslant \sqrt{\delta_x \pi}. \tag{106}$$

Pe de altă parte, dacă $\tilde{x}_a$ este aproximaţia lui x în $\tilde{X}$, $\tilde{x}_a$ minimizează funcţionala π pe $\tilde{Z}$, adică

$$\pi(\tilde{x}_a) \leqslant \pi(\tilde{x}). \tag{107}$$

Înlocuind acum (104) şi (105) în (107), se obţine

$$\pi(x_a) + \delta_x \pi - \delta_a \pi \leqslant \pi(x) \tag{108}$$

şi ţinînd cont că x minimizează funcţionala π pe Z, deci $\pi(x) \leqslant \pi(x)$ Se obţine relaţia

$$\pi(x_a) + \delta_x \pi - \delta_a \pi \leqslant \pi(x) \leqslant \pi(x_a). \tag{109}$$

Pe de altă parte, dacă x este izocondiţionat în raport cu $\tilde{Z}$ din (109), rezultă că

$$\mathrm{d}^2(x, \tilde{x}) = \pi(\tilde{x}) - \pi(x) = \delta_x \pi, \tag{110}$$

iar (106) devine

$$d(x, \tilde{x}_a) \leqslant d(x, \tilde{x}). \tag{111}$$

Interpretarea relației (100) duce la concluzia că eroarea de aproximație este mărginită superior de eroarea de interpolare, rezultat anticipat prin discuția din capitolul 3.

Pe baza criteriului de convergență prezentat, problema convergenței soluțiilor furnizate de modelul de calcul aproximativ către soluția exactă se reduce în cazul problemelor liniare la rezolvarea a două etape importante :

a. Determinarea cîmpului soluțiilor aproximative x izocondiționate în raport cu x și stabilite pe baza funcțiilor de interpolare a soluțiilor exacte

b. Evaluarea ordinului variației $\delta\pi$ a funcționalei asociate și a erorii de interpolare, atît pentru modelul de calcul exact, cît și pentru cel aproximativ.

În ceea ce privește stabilitatea procesului, aceasta depinde de sistemul de coordonate ales (în cazul de față, deplasările generalizate u). Astfel, Mihlin a stabilit că procesul de calcul este stabil dacă și numai dacă sistemul de coordonate este tare minimal în spațiul energetic. Exemple de instabilitate a calculului, precum și dezvoltarea acestei condiții se găsesc în [1] și [12].

5.1.2. Probleme neliniare

Problemele de echilibru neliniar în mecanica structurilor concentrează în general interesul nu numai pe determinarea cîtorva soluții corespunzătoare unor parametri de încărcare fixați, ci, în special, pe determinarea comportării structurilor cînd acești parametrii variază.

Se consideră o problemă neliniară de forma

$$K(x, \lambda) = 0 \tag{112}$$

care depinde nu numai de variabila de stare x, dar și de parametrul λ

$$K : x \times \Delta \to x. \tag{113}$$

unde X este un spațiu Banach infinit dimensional, iar $\Delta \subset \mathbb{R}$ un interval în mulțimea numerelor reale.

Se introduc notațiile

$DK(x, \lambda)$ — derivata Frechet a lui K în punctul (x, λ) :

$D_x K(x, \lambda) \in \mathcal{L}(x, x)$ și $D_\lambda(x, \lambda) \in X$ — derivatele parțiale corespunzătoare, unde $\mathcal{L}(x, y)$ este spațiul tuturor aplicațiilor continue din X în Y.

Un punct (x, λ), soluție a ecuației (112), este numit punct regulat dacă matricea iacobiană DK este nesingulară.

În cele ce urmează, discuția se restrînge la posibilitatea aproximării ramurilor de soluții nesingulare ale ecuației (112). Problema aproximării soluțiilor în vecinătatea punctelor singulare este deosebit de dificilă și vastă. O prezentare mai amănunțită a acestei probleme se poate găsi în [10], [11].

Se consideră operatorul K de forma

$$K(\lambda, x) = x + \lambda TG(x), \tag{114}$$

unde G este un operator de clasă C^1, $G : \Delta \times X \to Y$, iar T este un operator liniar continuu $T : Y \to X$.

Se caută aproximări ale soluţiilor nesingulare ecuaţiei (112) astfel încît

$$K(\lambda, x(\lambda)) = 0 \quad \forall \lambda \in \Delta,$$

$x : \Delta \to X$ este o funcţie continuă.

Se presupun îndeplinite condiţiile

a. pentru orice $x \in X$, operatorul $TDG(x) \in \mathcal{L}(x, x)$ este compact;

b. există o ramură de soluţii nesingulare pentru ecuaţia (112).

În acest caz, teorema funcţiilor implicite afirmă că $x(\lambda)$ este o funcţie de clasă C^1 $x : \Delta \to X$.

Se consideră spaţiul finit dimensionat X_h, $h = \frac{1}{n}$ şi ecuaţia :

$$K_h(\lambda, x_h) = 0, \tag{115}$$

unde $K_h : X_h \times \Delta \to X_h$ este de clasă C^1.

Se consideră, de asemenea, un operator mărginit $L_h \in \mathcal{L}(x; x_h)$.

În aceste condiţii existenţa şi convergenţa soluţilor aproximative (λ, x_h) sînt stabilite de următoarele teoreme [4] :

V. Se presupune următoarele ipoteze :

a. Oricare ar fi $\lambda \in \Delta$, există $\alpha > 0$ independentă de h şi λ astfel încît

$$\| D_x K_h(\lambda, L_h x(\lambda)) x_h \| \geqslant \alpha_h \| x_h \|, \quad \forall x_h \in x_h \tag{116}$$

b.
$$\sup_{\lambda \in \Delta} \| D_\lambda K_h(\lambda, L_h x(\lambda)) \|_X \leqslant C \tag{117}$$

c. există o funcţie monoton crescătoare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ independentă de h astfel încît oricare ar fi $\lambda \in \Delta$ şi pentru orice $(\lambda^*, x_h^*) \in A \times V_h$ cu $|\lambda^* - \lambda| + \| x_h - L_h x(\lambda) \|_x \leqslant \varepsilon$, să existe :

$$\| DK_h(\lambda^*, U_h^*) - DK_h(\lambda, L_h\ x(\lambda)) \|_{\mathcal{L}(X \times \Delta; x)} \leqslant \tag{118}$$

$$\leqslant f(\varepsilon)\ (|\lambda^* - \lambda| + \| x_h^* - L_h x(\lambda) \|_X)$$

d.
$$\lim_{h \to 0} \sup_{\lambda \in \Delta} \| K_h(\lambda, L_h\ x(\lambda) \|_X = 0. \tag{119}$$

În aceste condiţii, pentru $h \leqslant h_0$ suficient de mic există o constantă $a > 0$ independentă de h şi o funcţie unică $x_h : \Delta \to X_h$ de clasă C^1 astfel încît pentru orice $\lambda \in \Delta$,

$$K_h(\lambda, x_h(\lambda)) = 0 \text{ şi } \| x_h(\lambda) - L_h x(\lambda) \|_X \leqslant a. \tag{120 a,b}$$

și, în plus,

$$\| x_h(\lambda) - x(\lambda) \|_X \leqslant C\{\| x(\lambda) - L_h x(\lambda) \|_X + \| k_h(\lambda L_h x(\lambda)) \|_X\}. \quad (121)$$

Dacă K_h este de forma

$$K_h(\lambda), \; x_h) = x_h + \lambda \; T_h \; G(x_h). \quad (122)$$

teorema V devine :

VI. Se presupun următoarele ipoteze :

a. $G : x \times \Delta \to Y$ este de clasă C^2 și aplicația $D^2G(x)$ este mărginită pe toate subspațiile mărginite ale lui X ;

b. $$\lim_{h \to 0} \| T - T_h \|_{\mathcal{L}(Y,X)} = 0, \quad (123)$$

c. $$\lim_{h \to 0} \| x - L_h x \|_X = 0 : \; \forall \, x \in X. \quad (124)$$

În aceste condiții există o vecinătate Q a originii în K și pentru $h \leqslant h_0$ suficient de mic o funcție unică $x_h : \Delta \to X_h$ de clasă C^1 astfel încît oricare ar fi $\lambda \in \Delta$

$$x_h(\lambda) + \lambda \; T_h G(x_h(\lambda)) = 0 \quad (125)$$

și, în plus,

$$\| x_h(\lambda) - x(\lambda) \|_X \leqslant C\{\| x(\lambda) - L_h x(\lambda) \|_X + \| (T - T_h) \, G(x(\lambda)) \|_X\} \quad (126)$$

unde C este o constantă pozitivă independentă de h și λ.

Corolar : $$\lim_{h \to 0} \sup_{\lambda \in \Delta} \| x_h(\lambda) - x(\lambda) \|_X = 0 \quad (127)$$

Relația (127) afirmă că ramura soluțiilor aproximative $\{(\lambda, \; x_h(\lambda) ; \; \lambda \in \Delta\}$ converge uniform la ramura soluțiilor exacte $\{(\lambda, \; x(\lambda) ; \; \lambda \in \Delta\}$.

Observație.

Dacă G este de clasă C^m, este ușor de demonstrat că funcția $X_h(\lambda)$ este de clasă C^m și, în plus, se poate estima și aproximația :

$$\sup_{\lambda \in \Delta} \| x_h^{(l)}(\lambda) - x^{(l)}(\lambda) \|_X \text{ unde } 1 \leqslant l \leqslant m - 1.$$

În ceea ce privește stabilitatea procesului de calcul, în cazul problemelor neliniare, tare minimalitatea sistemului de coordonate numai este o condiție suficientă. Trebuie definită, în plus, o măsură pentru slaba condiționare a sistemului de ecuații ce urmează a fi rezolvat. O asemenea măsură — numărul de condiționare — a fost introdusă relativ recent de Rheinboldt, dar evaluarea lui este în general anevoioasă.

6. CONCLUZII

Teoria matematică a structurilor constituie un cadru general pentru formularea problemelor din mecanica structurilor, asigurînd suportul teoretic necesar pentru dezvoltarea modelelor și metodelor numerice de calcul.

Parte integrantă a analizei funcționale, domeniu al matematicii aflat în continuă evoluție, teoria matematică a structurilor își are direcțiile sale proprii de dezvoltare, cu implicații directe și importante în rezolvarea problemelor inginerești din mecanica structurilor.

Ca disciplină, în același timp matematică și inginerească, teoria matematică a structurilor este o știință interdisciplinară cu proprietăți intrinseci de dezvoltare.

Prezentul studiu, fără pretenția de a fi exhaustiv, încearcă o abordare din punct de vedere matematic a problemelor din mecanica structurilor cu intenția de a demonstra, de pe poziția inginerului de structuri, necesitatea justificării matematice riguroase a modelelor și metodelor de calcul exacte și aproximative cu care se operează în acest domeniu.

Primit la redacție la 4 mai 1987

BIBLIOGRAFIE

1. V. PARTON, P. PERLINE, *Méthodes de la Théorie mathématique de l'élasticité*, Édition Mir, 1984, Moscou.
2. P. MAZILU, F. S. SBURBLAN, *Metode funcționale în rezolvarea ecuațiilor teoriei elasticității*, Edit. Academiei, București, 1973.
3. A. BELEȘ, C. MIHĂILESCU, ST. MIHĂILESCU, *Calculul construcțiilor pe terenuri deformabile*, Edit. Academiei, București, 1987.
4. V. I. KANTOROVICI, P. G. AKILOV, *Analiză funcțională*, Edit. Științifică și Enciclopedică, București, 1986.
5. K. J. BATHE. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice Hall, New Jersey, 1982.
6. H. K. HUEBNER, *The Finite Element Method for Engineers*, John Wiley, New York, 1975.
7. O. C. ZIENKIEWICZ, *The Finite Element Method in Engineering Science*, McGraw-Hill London, 1971.
8. B. IRONS. S. AHMAD, *Techniques of Finite Elements*, Ellis Horwood, Chichester, 1981.
9. D. DUBINĂ, *Teoria matematică a structurilor*, în : *Contribuții la perfecționarea metodelor de calcul al construcțiilor metalice hidrotehnice. Stavile*, Teză de doctorat, I. P. „Traian Vuia", Timișoara, 1986.
10. I. A. SCHIOP, *Analiza unor metode de discretizare*, Edit. Academiei, București, 1978.
11. F. BREZZI, *Behaviour of finite element solution near a bifurcation point, Procedings of the Europe-U. S. Workshop „Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics", Ruhr-Univ., Bochum, July 28—31, 1980*, Edit. Wunderlich W., Stein E., Bathe K. J., Springer Verlag, Berlin—Heildelberg—New York, 1981.
12. E. R. A. OLIVEIRA, *Results of the Convergence on the Finite Element Method in Structural and Non Structural Cases, Proceedings of the Conference on Finite Element Method in Engineering*, Sydney, 1974.

POSIBILITĂȚI DE CORECȚIE A DEBITULUI DE GAZE LA FRACȚIUNI MARI DE APĂ ÎN CURENTUL DE GAZE

de AL. D. STAN și M. ALBULESCU
Institutul de Petrol și Gaze, Ploiești

În practică, de multe ori, prin elementele de măsură curg fluide bifazice, deși dispozitivele de măsură au fost etaloanate pentru un fluid monofazic. Apariția curentului bifazic conduce la o modificare a parametrilor hidrodinamici. Această lucrare stabilește o metodologie de corecție a debitului de fluid bifazic față de cel monofazic. Experiențele de laborator au arătat că debitul de fluid bifazic ce trece prin elementul de măsură diferă de cel monofazic.

1. INTRODUCERE

Un procedeu comod și frecvent utilizat la măsurarea debitului de gaze este acela al orificiului, în care se realizează, printr-o diafragmă montată pe conductă, o pierdere locală de presiune remanentă. Relația de calcul aferentă acestui procedeu are la bază ipoteza că fluidul este monofazic.

Foarte frecvent însă, această ipoteză nu este satifăcută deoarece în multe cazuri (sondele extractive de gaze, transportul gazelor naturale etc.) se produce o curgere bifazică, fluidul fiind format dintr-o fază gazoasă și una lichidă, de obicei apă.

În cele ce urmează, căutăm să stabilim, pe cale experimentală, corecțiile necesare la curgerea fluidelor bifazice astfel ca formula de calcul a debitului de fluid monofazic, reglementată prin STAS 7347/2—83 să rămînă valabilă, oricare ar fi raportul între cele două faze, gazoasă, respectiv lichidă.

2. CURGEREA UNUI SISTEM BIFAZIC PRINTR-UN AJUTAJ

În scopul stabilirii dependenței debitului de parametrii hidrodinamici ai curgerii unui fluid printr-un sistem de măsură, se consideră ca punct de plecare ecuația lui Bernoulli corectată prin introducerea pierderii de presiune ce se produce în elementul de măsură.

Pentru un fluid compresibil, dacă notăm cu 1 parametrii mișcării amonte de elementul de măsură și cu 2 aval de acesta, rezultă

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{\Delta p}{\rho_m}, \tag{1}$$

v fiind viteza medie în secțiunea transversală, p — presiunea, ρ — densitatea, $\varkappa$ — exponentul adiabatic al fluidului și ρ_m — densitatea în secțiunea minimă. Cu Δp a fost notată căderea de presiune ce se realizează în lungul elementului de măsură, care poate fi un ajutaj; această cădere de

ST. CERC. MEC. APL. TOM 46, NR. 6, 1987, P. 553—561

presiune are expresia

$$\Delta p = \rho_2 \frac{v_2^2}{2} \frac{l}{d} \lambda, \tag{2}$$

l şi d fiind o lungime şi un diametru caracteristice pentru ajutaj.

Dacă se ţine seama de ecuaţia de continuitate,

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2, \tag{3}$$

şi de ecuaţia de stare,

$$\frac{p_1}{\rho_1^\varkappa} = \frac{p_2}{\rho_2^\varkappa}, \tag{4}$$

rezultă expresia vitezei la ieşirea din ajutaj,

$$v_2 = \frac{\sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}}{\sqrt{1 + \frac{\rho_2}{\rho_m} \frac{l}{d} \lambda - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2}}. \tag{5}$$

O nouă utilizare a ecuaţiei de stare sub forma

$$\frac{p_m}{\rho_m^\varkappa} = \frac{p_2}{\rho_2^\varkappa}, \tag{6}$$

face ca expresia (5) a vitezei să devină

$$v_2 = \frac{\sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}}{\sqrt{1 + \xi \left(\frac{p_2}{p_m}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{\varkappa}}}}, \tag{7}$$

unde s-a introdus notaţia

$$\xi = \frac{1}{d} \lambda. \tag{8}$$

În cazul în care prin elementul de măsură curg gaze, cu o viteză v_g, iar dacă gazele conţin şi apă, cu o viteză v_{ga}, raportul acestor viteze este deci

$$\frac{v_g}{v_{ga}} = \frac{\sqrt{1 + \xi_{ga} \left(\frac{p_2}{p_m}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{\varkappa}}}}{\sqrt{1 + \xi_g \left(\frac{p_2}{p_m}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{\varkappa}}}}. \tag{9}$$

Prin urmare, debitul de gaze curate Q_g este legat de debitul de gaze cu apă Q_{ga} prin relația

$$Q_g = Q_{ga} \frac{\sqrt{1 + \xi_{ga}\left(\frac{p_2}{p_m}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{\varkappa}}}}{\sqrt{1 + \xi_g\left(\frac{p_2}{p_m}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{\varkappa}}}}. \tag{10}$$

Este de așteptat ca atunci cînd o sondă produce gaze cu apă viteza de curgere prin ajutaj să nu se modifice esențial față de cazul în care sonda ar produce numai gaze curate. Viscozitatea sistemului format din gaze și apă diferă însă suficient față de aceea a gazelor curate; această situație se reflectă în valorile numerelor lui Reynolds și prin urmare ale parametrilor ξ_g și ξ_{ga}.

Trebuie menționat că formula (10) permite o corecție a debitului de gaze în condițiile în care s-a determinat viteza v_2 dată de formula (7). Pentru situația în care ar curge gaze curate, viteza acestora este dată de formula

$$v_{2g} = \frac{v_{2gt}}{\sqrt{1 + \xi_g\left(\frac{p_2}{p_m}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{\varkappa}}}}, \tag{11}$$

unde v_{2gt} reprezintă viteza teoretică a gazelor

$$v_{2gt} = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1} Z_1 R_g T_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}, \tag{12}$$

R_g fiind constanta gazelor, iar Z_1 și T_1 factorul de abatere și tempertura corespunzătoare stării 1.

O formulă asemănătoare se poate scrie și pentru viteza de ieșire a gazelor cu apă în fază separtă v_{2ga}, constanta R_g înlocuindu-se cu constanta R_{ga} pentru un amestec de gaze și apă, care apare în expresia vitezei teoretice v_{2ga}. În afară de aceasta și exponenții adiabatici pot prezenta variații, ceea ce duce la o valoare a vitezei v_{2ga} diferită de v_{2g}.

3. EXPERIENȚE DE LABORATOR

În cadrul catedrei de hidraulică de la Institutul de Petrol și Gaze din Ploiești au fost efectuate mai multe experiențe cu ajutaje calibrate, utilizate la sondele productive de gaze care, aproape în toate situațiile, debitează și apă din zăcămînt. În acest scop, s-a construit aparatul a cărui schemă este redată în figura 1, introducîndu-se în acesta pe rînd ajutajele calibrate de 2 mm și 5 mm; prin acestea s-a vehiculat apă al cărei debit

s-a măsurat cu un debitmetru (rotametru). Simultan cu înregistrarea debitului s-a măsurat și căderea de presiune Δp din zona ajutajului.

În figura 2 se prezintă coeficientul ξ care a fost calculat din formula [1]

$$\xi = \frac{\Delta p}{\rho_a \frac{v_a^2}{2}}, \tag{13}$$

ρ_a fiind densitatea apei, iar v_a — viteza medie a acesteia în ajutaj. Pentru ambele ajutaje experimentate se observă tendința de variație a coeficientului ξ în funcție de numărul lui Reynolds,

$$Re = \frac{\rho_a \, v_a \, d}{\mu_a}. \tag{14}$$

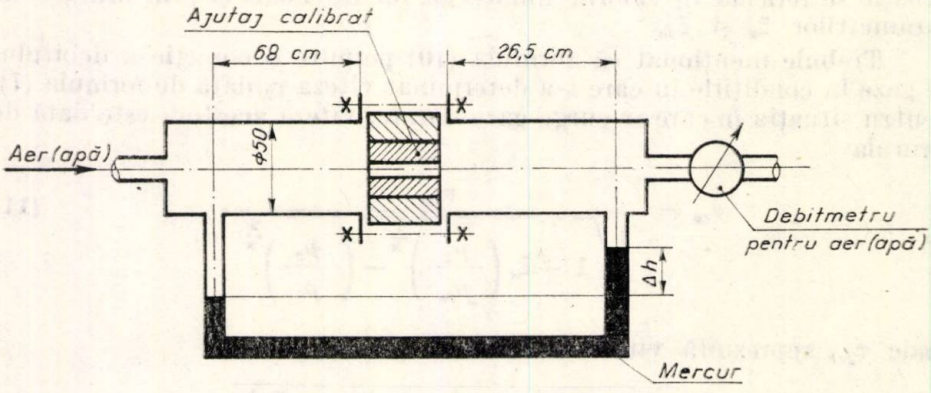


Fig. 1

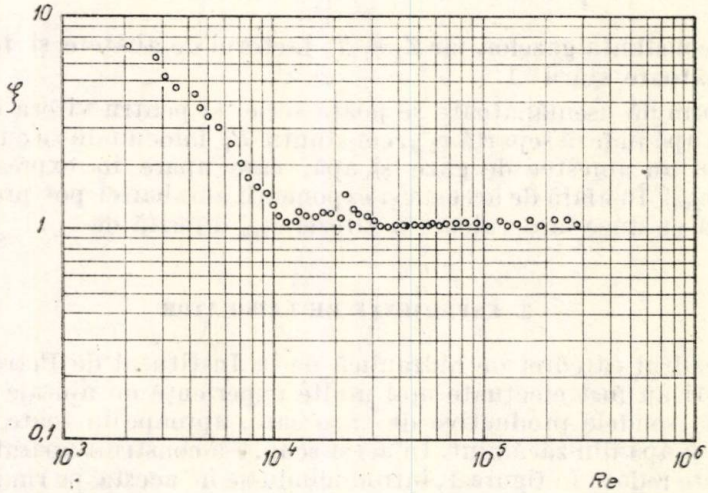


Fig. 2

Densitatea ρ_a a apei a fost luată egală cu 1000 kg/m^3, iar viscozitatea dinamică μ_a egală cu 10^{-3}Ns/m^2. Se observă că, începînd aproximativ de la un număr al lui Reynolds egal cu 10^4, coeficientul ξ, pentru ajutajele prin care s-a vehiculat apă, devine practic constant și tinde către valoarea 1,05.

Tot cu același aparat, utilizîndu-se ajutajele calibrate de 2 mm și 5mm au fost efectuate experiențe similare, vehiculîndu-se prin aparat aer cu densitatea $\rho = 1{,}2928$ kg/m^3 și viscozitatea dinamică $\mu = 0{,}0000102$ Ns/m ^{2}.

Coeficientul ξ a fost calculat cu ajutorul unui calculator FELIX, din formula

$$\xi = \frac{\Delta p}{\rho_m \frac{v_m^2}{2}}, \tag{15}$$

ρ_m fiind densitatea medie a aerului la presiunea medie p_m calculată cu formula [2]

$$p_m = \frac{2}{3}\left(p_1 + \frac{p_2^2}{p_1 + p_2}\right), \tag{16}$$

în timp ce viteza medie v_m are expresia

$$v_m = \frac{\rho_2 Q_2}{\rho_m \frac{\pi d^2}{4}}, \tag{17}$$

Q_2 fiind debitul de volum, iar p_1 și p_2 presiunile determinate amonte, respectiv aval de ajutajul calibrat. În figura 3 este reprezentat coeficientul ξ pentru cele două ajutaje calibrate de 2mm și 5 mm în funcție de numărul lui Reynolds,

$$Re = \frac{\rho_m v_m d}{\mu}. \tag{18}$$

În ambele cazuri se observă o ușoară creștere a coeficientului ξ în funcție de numărul lui Reynolds. Avîndu-se în vedere faptul că ajutajele calibrate au fost introduse într-o conductă de felul celor utilizate la sondele productive de gaze din țara noastră, rezultatele pot servi la determinarea influenței pe care o are prezența apei în gazele extrase la aceste sonde. Rezultatele din laborator pot fi aplicate și în șantier cu condiția ca numărul lui Reynolds să fie definit în mod similar în ambele situații.

În figura 4 sînt date valorile vitezelor obținute experimental în laboratorul de hidraulică de la Institutul de Petrol și Gaze, precum și valorile vitezelor calculate cu formula stabilită mai înainte (11), în funcție de numărul lui Reynolds dat de (18). Pe același grafic este prezentată și eroarea relativă aferentă vitezei gazului, în raport cu aceea calculată din

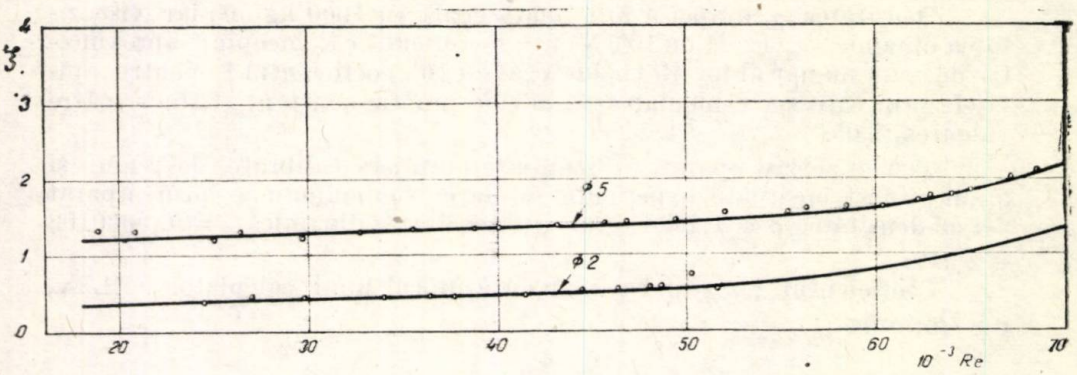


Fig. 3

formula (11). Se constată că erorile sînt nesemnificative ca mărime şi au probabil un caracter de eroare sistematică, introdusă la toate determinările din laborator deoarece sînt practic de acelaşi semn.

4. APLICAREA ÎN ŞANTIER A REZULTATELOR OBŢINUTE

Rezultatele anterioare pot fi aplicate în parctică pentru a se corecta debitul de gaze atunci cînd acestea curg în elementul de măsură simultan cu apa.

Analiza formulelor (11) şi (12) arată că o curgere prin elementul de măsură a gazelor împreună cu apa poate duce la o modificare a constantei de gaz perfect R_g, a exponentului adiabatic $\varkappa$ şi a coeficientului ξ_g, toate aferente gazului curat, la valorile R_{ga}, $\varkappa_a$, respectiv ξ_{ga}, acestea din urmă fiind caracterizate şi de prezenţa apei în curentul de gaze. De asemenea, factorul de abatere de la legea gazelor perfecte poate prezenta, teoretic, unele variaţii la apariţia apei. Totuşi, practic, acest din urmă factor poate fi considerat invariabil, dacă se admite că atît presiunea p_1 din faţa elementului de măsură, cît şi temperatura T_1 sînt aceleaşi în cele două situaţii.

În ceea ce priveşte pe R_g şi $\varkappa$, în tabelul 1 sînt date valorile lor în funcţie de cantitatea de apă a, exprimată ca fracţie volumică din curentul de gaze curate.

Tabelul 1

$\frac{m^3 \text{ apă}}{m^3 \text{ gaze}}$	0	0,000001	0,00005	0,0005	0,005
R, J/kgK	512,617	512,617	512,613	512,589	512,320
$\varkappa$	1,329	1,329	1,329	1,329	1,329

Gazul considerat, asimilat cu metanul, are parametrii din tabelul 1, pentru un conţinut nul de apă ($a=0$). Din datele prezentate, rezultă că, practic, atît R_g cît şi $\varkappa$ nu variază în funcţie de fracţia de apă din curentul de gaze, în domeniul de valori considerat pentru aceasta din urmă.

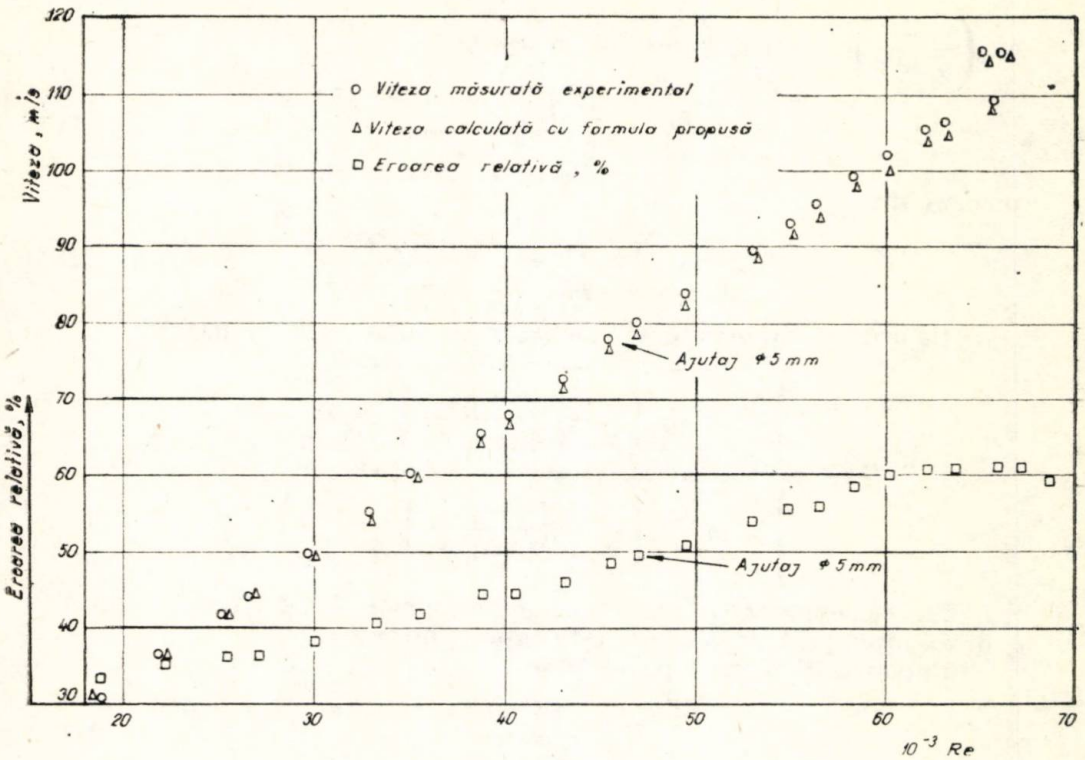


Fig. 4

La apariția apei în curentul de gaze se modifică deci numai parametrul ξ_g care devine ξ_{ga}.

Se poate efectua un calcul comparativ pentru a se stabili corecția debitului de gaze atunci cînd sonda produce și apă, față de condițiile în care ar produce gaze curate.

Din (10) rezultă că raportul celor două debite are expresia

$$\frac{Q_{ga}}{Q_g} = \frac{\sqrt{1 + \xi_g \left(\frac{p_2}{p_m}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{\varkappa}}}}{\sqrt{1 + \xi_{ga} \left(\frac{p_2}{p_m}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{\varkappa}}}} \tag{19}$$

presiunea medie p_m având expresia (16). Dacă se introduce notația

$$\frac{p_2}{p_1} = e, \tag{20}$$

cu $\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} \leqslant e \leqslant 1$, rezultă cu ușurință

$$\frac{p_m}{p_1} = \frac{2}{3}\,\frac{1+e+e^2}{1+e} \tag{21}$$

precum și

$$\frac{p_2}{p_m} = \frac{p_2}{p_1}\,\frac{p_1}{p_m} = \frac{3}{2}\,\frac{e(1+e)}{1+e+e^2}. \tag{22}$$

Ca urmare, raportul debitelor Q_{ga} și Q_g notat cu E, ia forma

$$E = \frac{\sqrt{1+\xi_g\left[\frac{3}{2}\,\frac{e(1+e)}{1+e+e^2}\right]^{\frac{1}{\varkappa}} - e^{\frac{2}{\varkappa}}}}{\sqrt{1+\xi_{ga}\left[\frac{3}{2}\,\frac{e(1+e)}{1+e+e^2}\right]^{\frac{1}{\varkappa}} - e^{\frac{2}{\varkappa}}}}. \tag{23}$$

Practic, exponentul $\varkappa$ are valori cuprinse între 1,3 și 1,4 iar raportul e, de exemplu pentru $\varkappa = 1{,}32$, este cuprins între 0,542 și 1.

Raportul E se mai poate scrie

$$E = \frac{\sqrt{b + c\xi_g}}{\sqrt{b + c\xi_{ga}}} \tag{24}$$

expresiile coeficienților b și c rezultînd prin comparație cu (23).

În tabelul 2 sînt date valorile acestor coeficienți pentru unele valori ale raportului e.

Tabelul 2

	0,5420	0,6	0,7	0,8	0,9	1
b	0,6046	0,5388	0,4175	0,2868	0,1475	0
c	0,7491	0,7917	0,8565	0,9118	0,9592	1
b/c	0,8071	0,6806	0,4874	0,3145	0,1538	0

Dacă se consideră expresia (24) a raportului E se poate face o analiză a erorilor introduse asupra valorii lui în funcție de e.

Raportul E al debitelor (23) admite și expresia aproximativă

$$E = \frac{Q_{ga}}{Q_g} = \frac{Re_{ga}}{Re_g}, \tag{25}$$

în care Re_{ga} este numărul lui Reynolds pentru cazul cînd sonda produce gaze cu apă, iar Re_g, numărul lui Reynolds în situația în care sonda pro-

duce gaze curate ; aproximația se bazează pe ipoteza că fracția de apă nu modifică sensibil viscozitatea gazelor.

Pe de altă parte, coeficienții ξ_{ga}, ξ_g pot fi scriși sub forma

$$\xi_{ga} = A' + B' Re_{ga}, \qquad \xi_g = A + B Re_g, \tag{26}$$

valabile cel puțin pe un domeniu restrîns de variație al numerelor lui Reynolds. Coeficienții A' și B' pot fi obținuți, ca și A și B pe cale experimentală pentru diverse fracții de apă în curentul de gaze.

Avîndu-se în vedere relațiile (26), raportul debitelnr devine

$$E = \frac{B}{B'} \cdot \frac{\xi_{ga} - A'}{\xi_g - A}. \tag{27}$$

Egalînd cele două expresii ale lu E se poate calcula coeficientul ξ_{ga}. Odată acesta determinat, rezultă debitul de gaze curate,

$$Q_g = Q_{ga} \sqrt{\frac{b + c\,\xi_{ga}}{b + c\,\xi_g}}. \tag{28}$$

5. CONCLUZII

În cazul unei curgeri monofazice printr-o diafragmă, debitul de gaze se poate calcula cu ușurință din relația dedusă în acest scop.

De multe ori, în parctică, apar cazuri în care curgerea este bifazică, formată dintr-o fază gazoasă și una lichidă, în special apă.

În lucrare sînt stabiliți experimental, pentru ajutajele ce echipează panourile de măsură ale sondelor de gaze, coeficienții ce trebuie introduși în expresia factorului de corecție al debitului de gaze curate dacă în urma operației de la sondă rezultă date pentru debitul bifazic.

Primit la redacție la 20 iulie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. I. CREȚU, AL. D. STAN, *Transportul fluidelor prin conducte*, Edit. Tehnică, București, 1984, p. 99—103.
2. T. OROVEANU, V. DAVID, AL. D. STAN, C. TRIFAN, *Colectarea, transportul, depozitarea și distribuția produselor petroliere și gazelor*, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1985, p. 176—177.

O CONTRIBUȚIE LA STUDIUL INDICELUI DE REFRACȚIE ÎN SPAȚIUL FINIT

I. SPULBER
Institutul Politehnic București
C. SPULBER
Intreprinderea Optică Română, București

În lucrare se analizează modul în care variațiile de presiune apărute într-un lichid de volum finit datorate modificării configurației geometrice a suprafeței închise care-l cuprinde, intervin asupra modului de formare a indicelui de refracție a lichidului luat în studiu. Datorită neliniarităților introduse în ecuația de mișcare a electronilor din lichid, indicele de refracție va diferi în diverse puncte de coordonate din volumul în cauză, modificîndu-se astfel anizotropia optică locală.

1. CONSIDERAȚII FENOMENOLOGICE

În figura 1 s-a reprezentat suprafața închisă S în care se află două lichide de viscozitate diferite, ν_1 și ν_2, separate de suprafața lenticulară Σ, variabilă în timp. Se mai presupune că în direcția Oz, suprafața S este bombardată de un fascicul luminos de fotoni emis de o sursă luminoasă, E_0, exterioară lui S. Se consideră că se manifestă următoarele fenomene:

a) electronii din masa de lichid care are viscozitatea ν_1 și volumul V_1 vor oscila corespunzător cîmpului electric al sursei E_0, mișcarea acelora putînd fi descrisă de ecuații liniare de ordinul doi;

b) aceiași electroni, ca urmare a modificării volumului V_1 în care se află, vor fi supuși unor unde de presiune Δp_1, suplimentare celei inițiale, p, și variabile în planele meridian și paralel, în acest fel, fiecare electron va oscila ca un mic oscilator.

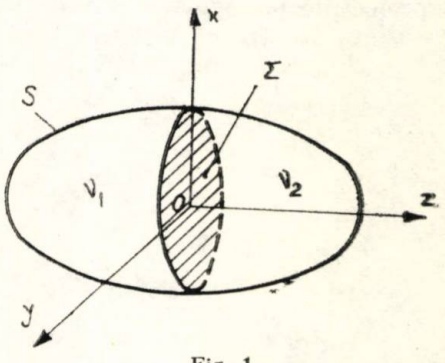


Fig. 1

2. CONSIDERAȚII ANALITICE

Mișcarea datorată cursei luminoase E_0 va fi pe direcția ox și va fi descrisă o relație de forma

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1 x\right) = q_0 E_0 \, e^{i\omega_0 t}, \tag{1}$$

în care m este masa unui electron, q_0 este sarcina electrică a acestuia, iar σ_0 este pulsația acestuia, iar σ_0 este pulsația unei luminoase.

Soluția relației (1) este de forma

$$x = x_0 \, e^{i\omega_0 t}, \tag{2}$$

ceea ce determină, în cazul trecerii fascicolului de fotoni printr-un spațiu finit, de lungimi l, un indice de referințe n de forma indicată în lucrarea [1]

$$n = 1 + \frac{Nq_0}{2\varepsilon_0 m(\omega_1^2 - \omega_0^2)}, \tag{3}$$

ε_0 fiind permeabilitatea mediului, iar N numărul de electroni pe unitatea de volum V_1; se observă că n este constant.

Fenomenele se complică atunci cînd intervine perturbația Δp_i; aceasta prin similitudine poate fi exprimată prin relația

$$\Delta p_i = \frac{E}{V_1} \, \mathrm{d}\varphi,$$

în care cu E am notat modulul de elasticitate al lichidului de viscozitate ν_1, iar φ reprezintă funcția care descrie suprafața Σ, astfel dacă suprafața circulară Σ se divide în elemente ale funcției φ, putem crie relația:

$$(\Sigma): \varphi[x(b) \cdot y(b), \; z(b)] = 0. \tag{5}$$

Fie Δp_{ix}; Δp_{iy}; Δp_{iz} și E_x, E_y E_z, proiecțiile pe cele trei axe de coordonate ale variabilelor Δp_i și E. Se obține următorul sistem;

$$\begin{aligned} \Delta p_{ix} &= \frac{E_x}{V_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \\ \Delta p_{ix} &= \frac{E_y}{V_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \\ \Delta p_{iz} &= \frac{E_z}{V_1} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}. \end{aligned} \tag{6}$$

Datorită elasticității suprafeței S și amortizării din lichidul considerat din volumul V_1, variațiile de presiune se sting în timp. Presiunea variază ca o oscilație cvasiarmonică a cărei ecuație are forma

$$\Delta p = \Delta p_0 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_2 t - k_0 t} \tag{7}$$

cu $\omega_2 \neq C$, iar k_0 fiind o constantă de amortizare.

După cum se indică în lucrarea [3], în situații similare deplasarea masei mobile este defazată cu ψ față presiune cum se vede în figura 2. Scriind variația de presiune sub forma

$$\Delta p_{ix} = \Delta p_{oix} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_2 t - k_0 t}, \tag{8}$$

și dacă ținem seama de relația (6) și (8) obținem

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{v_1}{E_x} \frac{1}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}} \Delta p_{oix} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_2 t - k_0 t - \mathrm{i}\psi}. \tag{9}$$

Din lucrarea [1] și ținînd seama de relațiile (1), (2) și (3), se obține întîrzierea undei, scrisă sub forma

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{m(\omega_1^2 - \omega_0^2)}{\mathrm{i}\omega l E_0 \ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-l/c)}}, \tag{10}$$

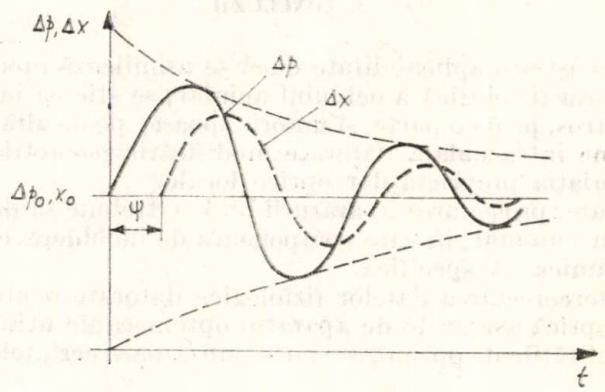


Fig. 2

c fiind viteza luminii în vid.

Și acum nu rămîne decît să adunăm cele două viteze (a căror sumă va fi $\frac{\mathrm{d}\,x\,t}{\mathrm{d}t}$) date de relațiile (9) și (10).

Din relațiile (3) și (10), cu observațiile de la început

$$n = 1 + k\frac{\mathrm{d}x_t}{\mathrm{d}t}, \tag{11}$$

se observă că $n = n(\Delta\ p, \ldots)$.

La o concluzie similară se poate ajunge și luînd ca obiect de studiu birefringența b. Așa cum este ea dată în lucrarea [2],

$$b = C\frac{\partial v_x}{\partial y}, \tag{12}$$

C fiind o constantă, iar $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ este variația pe direcția axei oy a componentei V_x a vitezei de curgere a lichidului datorate variației de presiune Δp. Aplicînd relația lui Bernoulli între două puncte succesive de pe aceeași linie de curent, în direcția normalei la Σ, expresia $\frac{\partial V_x}{\partial y}$ se determină cu ușurință dacă se ține seama de relația (6).

Deoarece în lucrare nu s-a luat în considerare influențele aduse de viscozitate, de componentele de variație a vitezelor pe celelalte două direcții în funcție de descriere a indicelui de refracție, considerăm necesară continuarea lucrării într-o comunicare ulterioară care va fi posibilă în urma a noi investigații în această direcție.

3. CONCLUZII

Lucrarea își are aplicabilitate dacă se asimilează modelul fizic propus cu structura fiziologică a ochiului animal; se știe că în spațiul închis al corpului vitros, pe de o parte, și umorii apoase, pe de altă parte, variațiile de presiune intraoculară datorate modificării geometriei cristalinului conduc la variația proprietăților optice locale.

Ca urmare, proiectarea aparaturii optice trebuie să devină o proiectare de sistem automat, în care componenta de închidere este ochiul animal, cu dinamica sa specifică.

Prin intercorectarea datelor fiziologice datorate ochiului, și a celor de corecție optică asigurate de aparatul optomecanic utilizat, se pot determina modalitățile de optimizare corespunzătoare cerințelor de utilizare.

BIBLIOGRAFIE

1. R. FEYNMANN *Fizica modernă*, Editura Tehnică, București, 1969.
2. G. MOISIL, E. CURATU, *Optică. Teorie și aplicații*, Editura Tehnică, București, 1986.
3. C. SPULBER, Teză de doctorat, Institutul Politehnic, București. 1985.

RUDOLF ZURMÜHL, SIGURD FALK, *Matrizen und ihre Anwendungen für Angewandte Mathematiker, Physiker und Ingenieure. Fünfte, überarbeitete und erweiterte Anflage. Teil 2: Numerische Methoden* (Matrice și aplicațiile lor pentru matematicienii care se ocupă de aplicații, fizicieni și ingineri. Ediția a cincea prelucrată și amplificată. Partea a doua : Metodele numerice). Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokio, 1986, XV + 476 pg., 103 fig.

Partea întîia a acestei lucrări, care conține bazele teoretice, apărută în anul 1984 în aceeași editură, a fost recenzată în numărul 4/1986 al revistei noastre. Continuînd reeditarea bine cunoscutei lucrări a defunctului profesor Rudolf Zurmühl, profesorul Sigurd Falk prezintă, în esență, în acest de al doilea volum, metodele numerice de calcul al matricelor.

Bazele calculului numeric al matricelor sînt expuse în capitolul al șaptelea (numerotarea capitolelor se face în continuarea primului volum) care conține, în general, noțiunile fundamentale necesare în continuare.

Capitolul următor este consacrat transformărilor, atît în ceea ce privește teoria acestora, cît și realizarea practică.

Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare este una dintre cele mai importante probleme ale calculului numeric cu matrice. Ca urmare, capitolul al nouălea al cărții este dedicat unei prezentări amănunțite a acestei probleme.

La fel de importantă, în cadrul metodelor de calcul numeric cu matrice, este problema valorilor proprii expusă în capitolul următor pentru cazul liniar.

Capitolul al unsprezecelea are ca obiect tot problema valorilor proprii, însă în cazul neliniar.

În sfîrșit, în ultimul capitol sînt prezentate unele utilizări ale matricelor în matematica aplicată și în mecanică.

Acest de al doilea volum al lucrării constituie o completare reușită a primului, în sensul unei treceri de la teorie la practică. Prezentarea foarte sumară pe care am făcut-o mai sus nu dă decît o idee cu totul generală asupra bogăției efective a conținutului. Lucrarea, în ansamblul ei, este în același timp o carte de matematică și una de calcul, în care cercetătorul poate găsi sugestii pentru activitatea sa, iar cel care se ocupă cu aplicațiile, un ghid prețios pentru acestea.

În raport cu primul volum,cel de al doilea conține un număr destul de mic de demonstrații, acestea fiind prezentate anterior, dar cuprinde în schimb numeroase indicații pentru programe, scheme și figuri pentru ilustrarea cuprinsului și aproximativ o sută de exemple numerice, în care intervin matrice pînă la un rang foarte mare, necesare în cadrul actualelor metode de calcul numeric.

Lucrarea cuprinde numeroși algoritmi, dintre care unii sînt publicați pentru prima oară. În această categorie se înscrie, de exemplu, algoritmul RAPIDO/RAPIDISSIMO pentru rezolvarea sistemelor de ecuații liniare, algorimul de selecție BONAVENTURA și algoritmii globali SECURITAS și VELOCITAS pentru perechi de matrice.

Ca și în prima parte, stilul este clar ceea ce face ca lectura să nu prezinte dificultăți, iar exemplele numerice ajută mult la fixarea conținutului.

Aplicațiile din ultimul capitol, deși puține la număr față de posibilitățile pe care le oferă calculul cu matrice, sînt interesante și utile. Autorul declară, de altfel, în prefață, că a fost obligat să reducă acest ultim capitol pentru ca lucrarea, în ansamblu, să nu aibă un volum exagerat de mare.

Totalizînd, împreună cu primul volum, 818 pagini, această lucrare este menită să rămînă, așa cum a fost și la primele ei ediții, de referință în domeniul teoriei și în special al aplicațiilor calculului cu matrice.

Cercul celor interasați este foarte larg, începînd cu studenții și în general cei care doresc să se inițieze în calculul cu matrice și terminînd cu specialiștii din cele mai variate domenii ale științei și tehnicii.

T. Oroveanu

ST. CERC. MEC. APL., TOM 46, NR. 6, 1987, P. 567—573

ASSEM DEIF, *Sensitivity Analysis in Linear Systems* (Analiza sensibilității sistemelor liniare), Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1986, XII + 224 p., 15 fig.

Se poate spune, fără a exagera prea mult, că o mare parte din munca inginerească este consacrată testării sensibilității sistemelor față de modificarea parametrîlor de proiectare. Ca urmare, elementele cele mai sensibile vor fi acelea asupra cărora se va concentra întreaga atenție a proiectantului. Pe de altă parte, deoarce modelele matematice care stau la baza proiectării sînt adesea idealizate și simplificate, perturbațiile neprevăzute pot determina sistemul să reacționeze într-o manieră diferită față de cea calculată. Întrebarea este la ce anume perturbații este mai sensibil sistemul și care va fi abaterea maximă. Analiza de sensibilitate poate ajuta inginerul să găsească cea mai bună soluție pentru minimizarea abaterilor. Totodată se pot lua măsuri pentru a limita perturbațiile posibile în datele de intrare în așa fel încît acestea să nu conducă la comportamente nedorite ale sistemului.

Toate metodele și modelele de optimizare matematică sînt legate într-o oarecare măsură de sensibilitate, începînd cu metoda gradientului și terminînd cu sistemele de urmărire și sistemele autoinstruibile. Tehnicile de analiză a sensibilității sistemelor nu sînt, desigur, noi. Dar ele au fost, pînă acum, utilizate ca aplicații elemntare în cadrul unor lucrări de automatică, teorie a perturbațiilor, în algebra liniară sau în lucrări cu caracter aplicativ. Este meritul autorului de a fi încercat și reușit, după părerea noastră, reunirea lor în cadrul unei lucrări unitare, sub forma unui corp unitar de cunoștințe.

La baza lucrării stau cîteva noțiuni importante, ca de pildă numărul de condiție, pus în evidență încă din 1948 de către Turing, număr care caracterizează în bună măsură sensibilitatea soluției sistemelor de ecuații liniare de tipul $Ax = b$ la variațiile elementelor matricei A. În legătură cu acest indicator sînt prezentate și discutate diferite norme ale matricelor și vectorilor, comportarea sistemului în vecinătatea singularității matricei A, limitele impuse a priori matricei A, rezolvarea prin pivotare, importanța alegerii pivotului și rolul echilibrării în micșorarea erorilor datorate perturbațiilor posibile, toate în cadrul primului capitol al lucrării.

Tot în cadrul acestui capitol se prezintă și două interesante aplicații. Prima, în domeniul teoriei circuitelor electrice, se bazează pe definiția sistemului adjunct al unui sistem de ecuații liniare și constă în determinarea sensibilității tensiunilor de ieșire în funcție de valorile reale ale matricelor care reprezintă caracteristicile rețelei. Cea de a doua se referă la ecuația lui Liapunov și, mai general, la ecuația lui Sylvester $AX - XB = C$ care apare frecvent în studiul sistemelor dinamice liniare. Acestea pot beneficia de un studiu de sensibilitate al rezultatului X în funcție de A, B și C supuse perturbațiilor.

Există, în general, trei tipuri de erori posibile în analiza numerică: a) datorate rotunjirilor, b) datorate trunchierilor, c) provenite din datele de intrare în modele. Dacă primele două tipuri de erori pot fi remediate prin mărirea preciziei de calcul a mașinii, cel de al treile tip de eroare rămîne necontrolabil. Cum pot fi evaluate totuși erorile care apar în rezolvarea unor ecuații diefernțiale de tipul $\frac{dy}{dx} = ax^b$, $x(0) = c$, în care constantele a, b, c, sînt supuse unui grad oarecare de incertitudine (variații într-o anumită plajă de valori)? La această întrebare se răspunde în cadrul capitolului al doilea, care face o trecere în revistă a diverselor metode de analiză a intervalelor (aritmetice, Hansen, bazate pe programarea liniară, bazată pe o prelucrare ulterioară a rezultatelor sau care își propun determinarea intervalelor maxim și minim de variație a rezultatului x^1). Capitolul se încheie, de asemenea, cu o aplicație în domeniul rețelelor electrice și anume proiectarea filtrelor de frecvență.

Capitolul al treilea este destinat metodelor iterative de rezolvare a ecuațiilor liniare, în general mai simple și mai ușor de aplicat, singura grijă în aplicarea lor fiind aceea a garanției convergenței. Ele sînt adecvate sistemelor mari, caracterizate prin matrice rare, care apar, de exemplu, în problemele de vibrații sau în rezolvarea ecuațiilor diferențiale prin metode de diferențe finite. Metodele de rezolvare ale lui Jacobi, Gauss-Seidel sau de tip relaxare sînt examinate din punctul de vedere al sensibilității, atît a soluției finale, cît și a ratei de convergență cu care se tinde spre această soluție. Sînt examinate, de asemenea, metoda Varah de reducere a numărului ecuațiilor pentru sistemele rău condiționate și estimare a erorii produse în rezultatul final, metoda rafinării iterative plecînd de la o soluție presupusă cunoscută și, în cele din urmă, cazul în care coeficienții nu mai reprezintă valori fixe ci intervale de valori.

În capitolul următor, se trece la analiza sensibilității în sistemele de ecuații liniare la care numărul m al ecuațiilor este diferit de numărul n al necunoscutelor. Pentru cazul sistemelor nedeterminate ($m < n$) sînt introduse noțiunile de matrice inversă generalizată, matrice inversă generalizată reflexivă și matrice inversă Moore-Penrose. Pentru sistemele supradeterminate ($m > n$) se studiază soluția care minimizează eroarea reziduală $e = Ax - b$, în sensul celor mai mici pătrate. Această situație este adesea întîlnită, în fizica experimentală de exemplu, unde numărul observațiilor depășește pe cel al necunoscutelor. Rezultatul, calculat prin rezolvarea a n ecuații, nu verifică, de obicei, restul măsurătorilor. Soluția (Gauss) reprezintă, în acest caz, o dreaptă care trece cel mai aproape de toate punctele — observații avute în vedere. Se definește cu această ocazie o matrice, numită pseudo-inversă, suficientă pentru tratarea completă a sensibilității unor asemenea sisteme.

În sfîrșit, ultimul capitol este consacrat problemelor de programare liniară. Deoarece aceste probleme reprezintă cazuri întîlnite frecvent în economie (determinarea structurii optime a producției, optimzarea stocurilor, cumpărarea de noi echipamente, studiul fluctuației forței de muncă etc.), analiza sensibilității este deosebit de prețioasă și de mare ajutor în luarea unor decizii importante. În acest capitol sînt abordate tendințe mai vechi și mai noi. Una dintre cele mai vechi este aceea a programării parametrice în care atît coeficienții sistemului de restricții $Ax \leqslant b$, cît și cei ai funcției liniare $F = cx$ se presupun variabili în timp. În multe aplicații practice, este, de asemenea, interesant de știut ce joc de date poate fi admis pentru a menține, în linii mari, aceeași soluție optimă, cu alte cuvinte probelma domeniului de decizie pentru fiecare parametru. Programarea liniară în care restricțiile apar sub formă de intervale $b^- \leqslant Ax \leqslant b^+$ este de asemenea analizată. În sfîrșit, ultimele două secțiuni sînt consacrate programării liniare în condiții de certitudine. Dacă valorile date tripletului (A, b, c) aparțin unui singur domeniu de decizie, se poate face o analiză a sensibilității pentru erori mici (Babbar), exprimînd vectorul aleator, optimal x în funcție de determinanți aleatori, utilizînd regula lui Cramer și apoi aproximînd distribuția acestor determinanți prin distribuții normale. O metodă mai directă este aceea datorată lui Prékopa care dezvoltă funcția aleatoare F_0 în serii Taylor în jurul valorii așteptate $E(F^0)$ atunci cînd valorile așteptate $E(A)$, $E(b)$ și $E(c)$ aparțin aceluiași domeniu de decizie. O tratare mai riguroasă și unitară se obține rezolvînd ecuația $A(\omega)x\, x = b(\omega)$ în care ω este o variabilă aleatoare (Bharucha—Reid). Pentru aplicațiile practice autorul recomandă metoda Monte Carlo.

Cartea este destinată în primul rînd inginerilor, studenților, profesorilor și cercetătorilor din automatică, cibernetică, informatică, cercetări operaționale sau din alte domenii tehnice conexe. Datorită expunerii gradate a noțiunilor, exercițiilor de la sfîrșitul fiecărui capitol, numeroaselor referiri bibliografice precum și nivelului matematic acceptabil, lucrarea poate servi unei categorii mult mai largi de cititori, dornici să-și completeze cunoștințele cu aceste aspecte ale sensibilității sistemelor liniare, indispensabile utilizării eficiente a calculatoarelor în toate domeniile.

L. Dumitrașcu

BRUCE A. FRANCIS, A *Course in H_∞ Control Theory* (Un curs despre teoria reglării în H_∞) *Lecture Notes in Control and Information Sciences, Edited by M. Thoma and A. Wyner* (Note de lectură în teoria informației și a reglării, Editate de M. Thoma și A. Wyner). Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1987, XI + 146 p., 19 fig.

Toate funcțiile F de o variabilă complexă s, analitice și mărginite din semiplanul $Re\,(s) > 0$, cu alte cuvinte pentru care există un număr real b astfel încît $|F(s)| \leqslant b$, alcătuiesc un spațiu Hardy, iar numărul b poartă numele de normă H_∞ a lui F. Aceste funcții joacă un rol deosebit în teoria reglării automate și anume servesc la proiectarea circuitelor și regulatoarelor care să satisfacă anumite performanțe, impuse mărimii de ieșire, la studiul stabilității și sensibilității sistemelor de reglare etc.

În prezenta lucrare este rezolvată o singură problemă și anume: să se proiecteze un regulator care să minimizeze norma H_∞ a matricei de transfer a unei anume bucle închise, dinainte stabilite. În această problemă, instalația este considerată cunoscută, regulatoarele trebuind să fie proiectate. Totuși, așa cum recunoaște și autorul, problema generală a proiectării unui regulator H_∞ optimal pentru cea mai nepotrivită instalație în anumite condiții rămîne, deocamdată, nerezolvată.

În general, partea teoretică se bazează pe aplicarea unor operatori și calculul funcțiilor de intrare-ieșire. Pentru spațiul stărilor sînt prezentate proceduri de calcul. Cartea conține și cîteva exemple numerice realizate utilizînd PC-MATLAB și o serie de rutine specializate pentru sistemele de reglare automată (Control Systems Toolbox).

Primul capitol prezintă principiile metodei, prin intermediul a două exemple de probleme care fac de obicei obiectul studiilor de reglare automată : stabilizarea robustă și atenuarea perturbațiilor într-o anumită bandă de frecvență.

Capitolele doi și cinci sînt destinate unor fundamente matematice. Capitolul al doilea tratează spațiile de funcții : spațiile Banach și Hilbert, spațiile domeniu-timp și domeniu-frecvență și legăturile dintre ele. Capitolul al cincilea este consacrat operatorilor Hankel, Toeplitz, Laurent și teoremei lui Nehari.

Capitolul al treilea prezintă cîteva probleme tip dintre care amintim așa-numita problemă a suprapunerii modelelor în care se cere proiectarea unui regulator montat în cascadă în așa fel încît răspunsul instalației să imite cît mai bine pe acela al modelului conectat în paralel cu instalația respectivă.

Capitolul al patrulea tratează problema stabilității și arată modul în care problemele tip prezentate în capitolul anterior pot fi rezolvate pe baza studiului de stabilitate. Se parametrizează regulatorul care conduce la stabilitatea întregii instalații cu ajutorul unei matrice-parametru Q proiectate în spațiul H_∞ al funcțiilor real-raționale (RH_∞).

Capitolele șase, șapte și opt completează și fundamentează soluția problemelor standard. Perspectiva spațiilor Hardy oferă și metode de calcul ale limitelor de performanță cantitative și calitative ce pot fi atinse în proiectarea soluțiilor. Aceste metode fac obiectul ultimului capitol, al nălea.

Cartea reprezintă, în esență, o tratare elementară a teoriei reglării automate în domeniul liniar, pe baza criteriului de optimalitate H_∞. Sistemele tratate sînt toate liniare, invariabile în timp, finit dimensionale și se operează peste tot în timp continuu. Lucrarea este bine gradată, pornește de la noțiuni simple, elementare și termină cu analize complexe susținute de calcule efectuate pe exemple concrete. Se menționează existența exercițiilor în cadrul secțiunilor mai importante. De asemenea, tot ca un fapt pozitiv, se semnalează numeroase note și referințe bibliografice dintre cele mai recente la sfîrșitul fiecărui capitol.

Datorită caracterului ei didactic, stilului clar și concis, înaltei ținute științifice și metodei de prezentare, cartea poate fi recomandată studenților, profesorilor, proiectanților și cercetătorilor din domeniul automaticii, ca un excelent complement al manualelor de specialitate și ca un exercițiu util în practica de proiectare a instalațiilor de automatizare.

L. Dumitrașcu

A. GUPTA, R. P. SINGH, *Fatigue Behaviour of Offshore Structures* (Comportarea la oboseală a structurilor din mediu marin). *Lecture Notes in Engineering* (Note de lectură în inginerie), sub red. C. Brebbia și S. A. Orszag, vol. 22, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York — Tokyo, 1986, 309 p.

În condițiile actuale ale economiei mondiale, care caută să valorifice rezervele minerale de pe fundul mărilor și al oceanelor, apariția unei lucrări care avansează studii privind compararea la oboseală a structurilor destinate platformelor de foraj și extracție marină se dovedește de o reală oportunitate.

Lucrarea este structurată în șapte capitole pe parcursul a 298 de pagini avînd 74 diagrame, 21 tabele și 100 titluri bibliografice apăute între anii 1955—1983.

Capitolul 1 face o succintă introducere în mecanica ruperii prin oboseală a oțelului și o trecere în revistă a principalelor lucrări bibliografice care se ocupă de : modelarea încărcărilor provenite din mediul marin, a modelării structurii construcțiilor de foraj subacvatic, a estimării duratei de viață a elementelor de construcții ce lucrează la acțiuni repetate.

Capitolul al doilea intitulat „Încărcarea hidrodinamică", prezintă modelarea matematică a acțiunii mării sub forma a doi termeni — termenul de lungă durată raportat la înălțimea valului și perioada de revenire — termenul de scurtă durată aproximat printr-un proces gaussian și concretizat prin funcția densității de putere. Componenta de lungă durată revine din considerarea a 15 stări ale mării, iar aceea de scurtă durată rezultă din simularea evoluției ale-

atoare a suprafeței mării folosind ecuația Pierson-Moskowitz. Încărcarea hidrodinamică pe elementele unor construcții ia în considerare viteza valurilor pe orizontală și verticală (folosind teoria liniară Airy) ca și adîncimea submersă variabilă. Încărcarea hidrodinamică se concentrează în nodurile structurii.

„Modelarea structurală" este cel de al treilea capitol care prezintă idealizarea platformei de foraj marin prin două cadre metalice plane din elemente tubulare. Primul model consideră barele prinse rigid în noduri, iar cel de al doilea le consideră articulat. În acest capitol sînt evaluate elementele necesare analizei modale a celor două modele : matricea maselor, matricea de amortizare, matricea de regiditate. În sfîrșit se prezintă ecuația generală a dinamicii structurilor liniar elastice în domeniul timp.

Pilonii de fixare ai platformelor marine, adînc introduși în stratele fundului de mare constituie obiectul de studiu dinamic al capitolului patru intitulat „Impedanțele fundației". Modelul matematic al turnului-pilon, rigiditatea și amortizarea terenului, calculul impedanței capului de pilon sînt principalele etape necesare efectuării analizei dinamice care se rezolvă în acest capitol.

În capitolul al 5-lea „Evaluarea eroziunii de oboseală", autorii dezvoltă supozițiile teoretice pentru obținerea duratei de viață a elementelor structurilor metalice supuse la încărcări variabile.

Pentru început se parcurg etapele de calcul a răspunsului dinamic al elementelor structurii concertizat în vectorii deplasărilor extremităților barelor prin integrarea în pași a sistemului ecuațiilor diferențiale de mișcare. Apoi are loc stabilirea eforturilor axiale și de încoviere plană. Calculul tensiunilor în punctele de concentrare a acestora prin intermediul factorului de încrestare încheie partea pregătitoare.

În sfîrșit se trece la evaluarea duratei de viață a îmbinărilor sudate, pentru o ramificație cu geometria K, pe baza principiului superpozițiilor liniare Palmgren-Miner.

„Rezultate și discuții" se intitulează capitolul al 6-lea. Aici sînt comentate și ilustrate grafic patru tipuri de îmbinări de elemente metalice tubulare din punct de vedere al eroziunii la oboseală. Sînt considerate succesiv modulul de forfecare al terenului de fundație, variația acestui modul de forfecare pe adîncimea pilonului, parametrii încărcării hidrodinamice (adîncimea submersă a pilonului, viteza curentului), configurația modelului structural (noduri încastrate respectiv noduri articulate), diferite curbe de durabilitate (în varianta britanică respectiv americană).

Capitolul al 7-lea încheie lucrarea cu concluzii și recomandări pentru lucrările de cercetare viitoare.

I. Dimoiu

A. GOMERSALL (sub red.), *Lasers in Materials Processing. A Bibliography of a Developping Technologg* (Laserii în prelucrarea materialelor. O bibliografie a unei tehnologii în dezvoltare), Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York — Tokyo, 1986, 167 p., 51 fig.

Lucrarea reprezintă o bibliografie selectivă a dezvoltării tehnologice spectaculoase ce caracterizează domeniul studierii și aplicațiilor industriale a fasciculului laser.

887 de rezumate ale unor articole, cărți precum și ale altor surse de informare sînt grupate astfel încît să acopere o gamă cît mai largă de preocupări în domeniul laserului. Astfel, într-un prim capitol, sînt semnalate o serie de lucrări cu caracter general privind bazele fizice și efectele radiației laser precum și posibilele sale aplicații industriale.

În continuare sînt prezentate surse documentare referitoare la echipamentele laser, inclusiv la utilizarea acestora în cadrul unor sisteme robotizate.

După prezentarea fizicii fasciculului laser, lucrarea se referă la o gamă largă de procedee de prelucrare cu laser, atît a materialelor feroase, cît și a celor neferoase, ca : sudarea, tăierea, prelucrarea suprafețelor. Capitolul mai cuprinde informații privind analiza metalografică a prelucrărilor cu laser și măsuri de protecție a muncii.

Lucrarea se încheie cu aplicațiile laserului în industria aerospațială, energetica nucleară, industria electronică, încercări și control.

Lucrarea constituie un ghid eficient pentru cei ce abordează domeniul procedeelor neconvenționale, în general, și pentru specialiștii angrenați în studierea laserului, în special.

X. Epure

H. GRUNDMANN, E. STEIN, W. WUNDERLICH (sub red.), *Finite Elemente. Anwendungen in der Baupraxis* (Elemente finite. Aplicații în practica construcțiilor). Ernst u. Sohn, Berlin, 1985, 576 pagini, 466 figuri, 26 tabele.

Cele 47 lucrări cuprinse în volum sînt grupate pe 12 capitole ; majoritatea acestora începe cu un referat de sinteză. Capitolul A dă o privire de ansamblu asupra formulării metodei elementelor finite în mecanica construcțiilor și asupra sistemelor de programe existente. Se prezintă avantajele și dezavantejele metodei arătîndu-se că programele moderne trebuie să pună accentul cuvenit pe pre- și postprocesori în vederea ușurării utilizării lor.

Construcțiile din beton armat fac obiectul capitolului B. Utilizarea calculului biografic al structurilor din beton armat permite descrierea și înțelegerea mai corectă a comportării acestora, cît și reducerea experimentărilor fizice constisitoare pe seama unor experimentări numerice. Acest calcul începe să pătrundă însă tot mai mult și în practica proiectării, mai ales pentru fundamentarea unor tehnologii constructive noi și pentru studiul remedierii avariilor. Capitolul C se referă la plăcile podurilor, fiind tratate plăci de forme speciale, plăci oblice precomprimate longitudinal și transversal și sisteme plane și spațiale de plăci.

Construcțiile speciale sînt grupate în capitolul D. După o prezentare a metodei elementelor finite în analiza plăcilor curbe subțiri și groase, cu luarea în considerare a neliniarităților geometrice și fizice, se dau exemple de aplicare a metodei la calculul static și dinamic al unor structuri de construcții respectiv la anliza roții cu cupe a unui excavator. Cîteva aplicații speciale a metodei elementelor finite sînt cuprinse în capitolul E. Analiza neliniară a stabilității structurilor elastice cu aplicații la plăci cilindrice este urmată de calculul elementelor din beton armat a două platforme maritime. Se prezintă și aplicații geometrice neliniare ale metodei în construcții de lemn.

Unele variante ale calculului cu elemente finite sînt prezentate în capitolul F. Se fundamentează o metodă de luare în considerare a unor modificări structurale fără a fi necesar un calcul complet nou, elemente finite bazate pe funcții Trefftz, criterii de a preciere a calității unui calcul cu elemente finte și aplicarea procedeelor de calcul neliniar la structuri din bare și plăci.

Capitolul G este dedicat mecanicii pămînturilor și rocilor. După o trecere în revistă a ceea ce oferă metoda în acest domeniu și ce se așteaptă de la ea se discută rezultatele calculului neliniar al unor tuneluri, probleme de stabilitate în minerit și calculul iterativ al redierelor cu procedeul modulilor de rigiditate. Exclusiv tunelurilor le este rezervat capitolul H. Referatele tratează modele de calcul, calculul tunelurilor de metrou în medii afînate, respectiv în roci strtificate și analiza elastico-plastică a secțiunilor de tunel.

Probleme de dinamica structurilor sînt grupate în capitolul I. Se dă o privire de ansamblu asupra aplicării metodei elementelor finite în acest domeniu, se prezintă cercetări dinamice (cutremure, unde de șoc) a structurilor constructive, studiul interacțiunii dinamice sol-structură și calculul propagării undelor în teren.

Capitolul J se referă la construcțiile metalice. Se tratează calculul capacității portante a sistemelor plane de bare în cazul deplasărilor și rotirilor mari, încărcarea de bifurcare și teoria de ordinul doi pentru sisteme de bare solicitate spațial, utilizarea metodei elementelor finite la proiectarea statică și dinamică a unei platforme pentru încercări seismice, calculul macaralelor în teoria geometric neliniară și simularea unor curgeri locale în rezervoare metalice, definînd o lege adecvată de comportare visco-plastică a materialului.

Aplicarea microcalculatoarelor în mecanica structurilor face obiectul capitolului K. Datorită ofertei mari de calculatoare personale se dau criterii de alegere a mijlocului de calcul potrivit pentru utilizarea metodelor de calcul moderne. Capitolul L se referă la posibilitățile de verificare a rezultatelor obținute cu metoda elementelor finite și prezintă proiectul unor instrucțiuni privind efectuarea și verificarea calculelor electronice.

Lucrările cuprinse în volumul recenzat atestă faptul că metoda elementelor finite a devenit un mijloc de calcul indispensabil birourilor de proiectare, întreprinderilor de execuție și bineînțeles institutelor de învățămînt. În multe domenii ale mecanicii construcțiilor ea face parte din rutină, în altele utilizatorul mai întîmpină difucultăți la aprecierea limitelor ei cît și a preciziei rezultatelor furnizate.

Cartea de față prezintă interes pentru toți inginerii confruntați cu problemele de mecanica mediilor continue, indiferent dacă au sau nu experiență în aplicarea metodei elementelor finite.

R. Friedrich

B. S. GOTTFRIED, *Programmieren mit Pascal* ((Programarea în Pascal), McGraw Hill, Hamburg, 1986, p. 484, 391 probleme, numeroase exemple de programare.

Limbajul Pascal, creat la începutul anilor 70 în vederea ușurării învățării programării structurate, s-a răspîndit foarte repede, devenind operațional și universal. Interesul de care se bucură este justificat de faptul că oferă posibilitatea elaborării unor programe bine organizate, clare și corecte — pentru toate tipurile de calculatoare inclusiv cele în regim conversațional.

Cartea de față face parte dintr-o serie de texte privind limbajele de programare, reprezentînd o introducere completă în versiunea standard ; într-o anexă este prezentată versiunea Turbo-Pascal pentru principalele programe elaborate. Cele 12 capitole ce urmează după introducere tratează pe rînd noțiunile de bază ale limbajului, tipurile de date, introducerea și extragerea datelor, pregătirea și utilizarea unui program, structurile de control, procedurile și funcțiile, tipurile de date definite de utilizator, cîmpurile, propozițiile, fișierele, mulțimile, listele și indicatorii. Elementele de bază ale limbajului sînt reluate sintetic în șapte anexe, foarte utile la elaborarea unui program.

Materia este prezentată astfel încît cititorul să poată scrie repede programe simple în limbajul Pascal. Acest lucru stimulează interesul pentru continuarea studiului în vederea asimilării cunoștințelor necesare elaborării unor programe mai complexe. Textul cuprinde numeroase exemple de programe cu diferite grade de dificultate, iar fiecare capitol se încheie cu întrebări de control și probleme propuse pentru rezolvare.

Lucrarea se adresează tuturor celor interesați în însușirea temeinică a Pascal-ului, ce a avut o mare influență asupra tehnicii de programare și rămîne unul din cele mai apreciate limbaje, folosit din ce în ce mai frecvent și în probleme de mecanică.

R. Friedrich

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 46 1987

INDEX ALFABETIC

	Nr.	Pag.
ALBULESCU, M., v. STAN, AL. D.	6	553
BALCU, I., v. CHIRIACESCU, S. T.	2	184
BOGDAN, R. C., v. PLOSCEANU, B.	4	323
BRATU, P., V. ENE, GH. I.	5	471
BRIŞAN, M.C., v. HANDRA-LUCA, V.	4	313
CHIRIACESCU, S.T., POPESCU, N., DANCAŞIU, M., BALCU, I., MUNTEANU, RODICA, Supapa de limitare a presiunii—sursă de vibrţii şi zgomote în instalaţiile hidraulice	2	184
CONSTANTINESCU, D., Contribuţii la utilizarea carburilor metalice sinterizate în foraj. II	1	81
COZMA, A., Asupra unor proprietăţi ale dezlocuirii trifazice	6	491
CREŢU, O.S., FRUNZĂ, GH., Transmisie mecanică de putere constantă	2	150
DANCAŞIU, M., v. CHIRIACESCU, S.T.,	2	184
DRĂGHICI, GH., v. ZECHERU, GH.	3	270
DRĂGHICI, GH., v. ZECHERU, GH.	4	378
DUBINĂ, D., PACOSTE, C., Modele şi metode de calcul exacte şi aproximative în mecanica structurilor	6	525
DUGARU-DRAGA, ANA, Mişcarea subsonică în prezenţa unui profil portant, într-o formulare variaţională	5	426
DUDA, I., O metodă de determinare a soluţiilor pentru deformaţiile din jurul unui tunel orizontal circular	5	441
DUMITRESCU, H., SĂVULESCU, ŞT., N., Consideraţii asupra formulării matematice a efectului Coandă în fluid real. Aplicaţii.	1	3
ENE, GH. I., BRATU, P., Stabilirea parametrilor dinamici ai transportoarelor vibratoare elicoidale	5	471
FLORIAN, V., v. ŞOVĂREL, E., Cinematica sapelor cu role „cu alunecare"	5	431
FRUNZĂ, GH., v. CREŢU, O.S.	2	150
GEORGESCU, ADELINA, Notă asupra unor probleme izoperimetrice în calculul elicei de randament maxim	5	478
HANDRA-LUCA, V., Studiul geometrico-cinematic al angrenajului globoidal neriglat	3	226
HANDRA-LUCA, V., BRIŞAN, M.C., Sinteza geometrică a mecanismelor cu oscilaţii reglabile	4	313
IONESCU, FL., IOSIP, M., Motoare hidraulice liniare cu sustentaţie hidrostatică. Analiza, sinteza şi proiectarea	2	174
IOSIP, M., v. IONESCU, FL.	2	174
JELEV, I., Calculul regimului tranzitoriu al apei în conducte şi reţele de conducte sub presiune. I	1	38

	Nr.	Pag.
JELEV, I., Calculul regimului tranzitoriu al apei în conducte și rețele de conducte sub presiune. II	2	105
LUGOJANU, R., v. REDLOV, T.G.	3	250
MARCOV, N., Mișcări fluide în jurul unor profile simetrice	4	308
MARȚIAN, I., Plăci plane circulare cu deformații mari supuse acțiunii unei variații de temperatură	4	331
MITROIU, M.M., v. STAN, AL. D.	3	260
MUNTEANU, RODICA, v. CHIRIACESCU, S T.	2	184
MUNTEANU, M., Vibrațiile plăcilor subțiri sub acțiunea ciocnirilor transversale	5	458
NICODIM, D., Evaluarea debitului de scăpări prin rosturile de execuție a ecranelor	1	30
OBLEMENCO, GH., Calculul plăcilor ortotrope utilizîndu-se echivalenți elastici idealizați	3	239
ONU, G., Echivalent cu constringeri pentru coloana activă ca element al structurilor cu fundații flexibile	1	66
ONU, G., Efectul neliniar al forțelor axiale în calculul structurilor fundate pe coloane	2	137
OPREAN, A., PRODAN, D., Determinarea unor parametri hidraulici, cinematici și dinamici la pompele (motoarele) hidraulice cu performanțe ridicate	2	163
PACOSTE, C., v. DUBINĂ, D.	6	525
PANDREA, MARINA, v. PANDREA, N.	5	409
PANDREA, N., PANDREA, MARINA, Determinarea centrului elastic prin metoda deplasărilor relative	5	409
PANDREA, N., Vibrațiile rigidului cu legături elastice	6	499
PANTAZOPOL, A., v. PASAT, GH. D.	5	451
PASAT, GH. D., PANTAZOPOL, A., Influența forțelor hidrodinamice asupra turației critice a dispozitivelor de amestecare	5	451
PASAT, GH. D., RENERT, M., Modelarea curgerii induse de amestecătorul de tip turbină cu pale drepte, în recipiente prevăzute cu dispozitive de amestecare	6	513
PAVEL, A., Forma practică a condiției de stabilitate, corespunzătoare structurilor de tip recipient, conductă sau coloană tubulară	4	394
PLOSCEANU, B., BOGDAN, R.C., Transmisii mecanice diferențiale cu variator la ieșire	4	323
POPA, AL., v. ZECHERU, GH.	3	270
POPA, AL., v. ZECHERU, GH.	4	378
POPESCU, N., v. CHIRIACESCU, S. T.	2	184
PRODAN, D., v. OPREAN, A.	2	163
RĂDUICĂ, N., v. SOARE, M.V.	4	352
REDLOV, T.G., LUGOJANU, R., Aplicarea metodei grinzii asociate în statica firului acționat de un sistem spațial de forțe concentrate și distribuite	3	250
RENERT, M., v. PASAT, GH. D.	6	513
ROMAN, P., O nouă teorie a turbulenței în cadrul sistemelor dinamice disipative	1	94
SĂVULESCU, ȘT. N., v. DUMITRESCU, H.	1	3
SOARE, M.V., RĂDUICĂ, N., O comparație a eficienței structurale a unor cupole reticulate	4	352
SOÓS, E., Condiții de salt în electrodinamica corpurilor continue, mobile și deformabile I.	3	205
SOÓS, E., Condiții de salt în electrodinamica corpurilor continue, mobile și deformabile. II. Confruntarea teorie — experiment	4	299
SPULBER, C., v. SPULBER, I.	5	467
SPULBER, C., v. SPULBER, I.	6	563
SPULBER, I., SPULBER, C., Aplicații la calculul preliminar al supapelor de presiune în regim viscos	5	467
SPULBER, I., SPULBER, C., O contribuție la stdiul indicelui de refracție în spațiul finit	6	563
STAN, AL. D., MITROIU, M.M., Protecția imobilelor adiacente conductelor de gaze	3	260
STAN, AL. D., ALBULESCU, M., Posibilități de corecție a debitului de gaze la fracțiuni mari de apă în curentul de gaze	6	553

	Nr.	Pag.
ȘOVĂREL, E., v. FLORIAN, V.	5	431
ȚEPOSU, I., Sarcinile aerodinamice pe organele avionului în cazul manevrelor longitudinale neliniare cu variații mici de altitudine și viteză. II	1	14
ZECHERU, GH., DRĂGHICI, GH., POPA, AL., Simularea numerică a funcționării cleștilor multifuncționali pentru foraj-extracție. I.	3	370
ZECHERU, GH., DRĂGHICI, GH., POPA, AL., Simularea numerică a funcționării cleștilor multifuncționali pentru foraj-extracție. II	4	378